응용통계연구 제 **12**권 1호, *1999*년, *pp. 203–211*

수리 가능한 시스템의 평균고장간격시간 추정에 관한 연구

이현우 [1] 김치용 [2]

요 약

수리 가능한 시스템의 평균고장간격시간에 대한 많은 연구들이 진행되어 왔으며, 그 대부분 은 n번째 고장발생시각 T_n을 관측한 후 그 다음 고장이 발생할 때까지의 평균시간, 즉 $E(T_{n+1}-T_n|T_n=t_n)$ 에 관한 연구들이었다. 본 연구에서는 수리 가능한 시스템의 고장이 와이블과정을 따라 일어날 경우, n번째와 $n+1$번째 고장간의 평균고장간격시간 $E(T_{n+1}-T_n)$ 에 대한 불편추정량을 구하고 일치성 및 근사적 정규성을 증명하였다.

1. 서론

이제까지의 신뢰성 연구의 대부분은 수리 불가능한 시스템에 대한 연구들이었다. 그러나, 제품이 고장나면 수리를 해서 사용할 수 있는 수리 가능한 시스템의 신뢰성에 대한 연구 역시 중요한 문제이다. 수리 가능한 시스템에 대한 가장 보편적인 모형은 재생과정(renewal process)과 동질성이 아닌 포아송과정(Non-homogeneous Poisson process :NHPP)이다. 고장난 시스템을 완전히 처음 사용할 때와 같은 조건으로 수리 가능하다면 그 시스템은 재생과정에 의하여 모형화 된다. 반면에, 시간이 지남에 따라 신뢰도가 변하는 형태가 있을 수 있는데, 이는 수리 가능한 시스템에 관한 연구에서 주로 다루어지는 내용이다. NHPP를 확률모형으로 적용함에 있어서, 시간의 흐름에 따른 고장률의 변화를 나타내는 함수인 강도함수(Intensity function)의 형태에 따라 시스템을 신뢰성 성장모형(Reliability Growth Model) 또는 열화모형(Deteriorating Model)으로 볼 수 있다. 즉, 시간이 지남에 따라 고장률이 점점 감소하는 경우 강도함수는 감소함수의 형태가 되며 신뢰도는 증가하게 되므로 신뢰성 성장모형이 되고, 반대로 시간이 지남에 따라 고장률이 점점 증가한다면 마모모형이 된다.

신뢰도가 변하는 시스템의 확률모형으로 지금까지 가장 많이 연구 되어온 확률모형중 하나는 NHPP의 특수한 형태인 와이블과정이라 불리는 확률모형이다. 이 모형은 NHPP의 강도함수가 와이블분포의 고장률함수와 동일한 형태로 주어진다고 해서 와이블과정이라고 일컬어지며, 강도함수의 형태는 다음과 같다.

$$\lambda(t) = \left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}, \tag{1.1}$$

여기에서, $\theta > 0, \beta > 0$ 이다.

위 모형 (1.1)에서, $\beta < 1$ 이면 $\lambda(t)$ 는 감소함수이며 고장간격시간은 점점 길어지는 경향을 띄게되어 신뢰성 성장모형이 되고, $\beta > 1$ 이면 $\lambda(t)$는 증가함수로서 마모모형이 된다. $\beta = 1$인 경우 $\lambda(t)$ 는 상수함수가 되므로 HPP로 귀착된다.

1) (151-742) 서울시 관악구 신림동 산 56-1, 서울대학교 기초과학연구원
2) (136-704) 서울시 성북구 정릉동 산 16-1, 서경대학교 응용통계학과, 조교수

수리 가능한 시스템의 연구에서는 평균고장간격, 즉 MTBF(Mean Time Between Failures)에 대해 많은 관심을 갖게 되며, 특히 신뢰성 성장모형에서는 시스템이 고장이 난후 그 다음 고장이 일어날 때까지 걸리는 시간의 평균에 대한 추정문제가 중요한 관심사이다. 즉, $T_1 < T_2 < \cdots$ 을 시스템의 고장발생시각이라 하면, n 번째 고장발생시간이 $T_n = t_n$ 으로 관측된 후, 그 다음 고장이 일어날 때까지의 평균고장간격인 $MTBF(t_n) \equiv E(T_{n+1} - T_n | T_n = t_n)$ 에 대한 많은 연구들이 진행되어 왔다. Duane(1964)은 시스템의 고장이 포아송과정을 따라 발생할 경우 평균고장간격은 고장발생률의 역수가 된다는 점에 착안하여 시점 t 에서 시스템의 다음 고장까지의 평균시간을 시점 t 에서의 강도함수의 역수로 가정하였다. Duane(1964)이후 Crow(1974, 1982), Bain and Engelhardt(1986)와 Engelhardt and Bain(1986) 등 최근까지의 많은 신뢰성 성장모형의 연구에서 $MTBF(t_n)$의 값을 강도함수의 역수인 $1/\lambda(t_n)$ 로 계산하였는데, 이는 엄밀히 말하면 HPP의 경우에서만 성립하는 것이다. 최근 Tsokos(1995)는 $MTBF(t_n)$과 강도함수 $\lambda(t_n)$과의 관계를 수리적으로 밝혔으며 이를 이용하여 $MTBF(t_n)$의 상한과 하한을 구한 뒤 그 평균을 이용해서 $MTBF(t_n)$를 추정하였다. 그러나, Tsokos의 추정량은 형상모수인 β값의 영역에 따라 그 형태가 달라진다는 단점을 갖고 있다. 이현우등(1998)은 이러한 단점을 보완해서 β의 영역에 의존하지 않는 추정량을 제안하였다.

이제까지의 연구들은 n번째 고장이 일어난 시점 t_n을 관측한 후, 그 다음 고장이 일어날 때까지의 평균시간, $MTBF(t_n)$에 관한 연구들이었다. 그러나, 어떤 제품의 개발을 시작하기 이전에 이 제품개발의 필요성 혹은 타당성을 미리 알아보기 위하여 n번째 고장시점에서의 MTBF를 판단의 기준으로 삼는다고 하자. 이때의 n번째 고장시점은 하나의 확률변수로서 $MTBF(t_n)$이 아닌 $MTBF_n$을 이용하여야 한다. 그러나, 대부분의 신뢰성 연구에서는 이런 관점에서의 연구가 아직 미흡한 실정이다. 따라서, 본 연구에서는 수리 가능한 시스템의 경우에 시스템의 고장이 강도함수 (1.1)을 갖는 와이블 과정을 따라 발생할 경우, n번째와 $n+1$번째 고장간의 평균고장간격시간을 $MTBF_n \equiv E(T_{n+1} - T_n)$와 같이 정의하고, 이의 추정 문제에 관하여 살펴보고자 한다. 2절에서는 먼저 n번째까지의 고장시각 $T_1 < T_2 < \cdots < T_n$에 근거한 $MTBF_n$ 의 불편추정량을 구하고 이 추정량의 일치성을 증명한 뒤, 3절에서는 추정량의 분포에 대한 근사적 정규성을 증명하고자 한다.

2. MTBF의 추정

$T_1 < T_2 < \cdots$ 을 강도함수 (1.1)을 갖는 와이블과정을 따라 발생하는 시스템의 고장시각이라 하고, $t_1 < t_2 \cdots < t_n$을 고장시각을 관측한 데이터라고 하자. 그러면 우도함수는

$$L(\beta, \theta; t_1, \cdots, t_n) = \left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\theta}\right)^{\beta}\right\} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta-1} \tag{2.1}$$

로 주어지며, 각 모수에 대한 최우추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log(T_n/T_i)} \quad , \quad \hat{\theta} = \frac{T_n}{n^{1/\hat{\beta}}} \ . \tag{2.2}$$

Møller(1976)는 n번째 고장발생시각 T_n은 다음 (2.3)식의 확률밀도함수를 갖는 일반화 감마분포를 따르고, T_n과 $\hat{\beta}$은 서로 독립임을 밝혔다.

$$f_{T_n}(t) = \frac{\theta}{\beta\Gamma(n)}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n\beta-1}\exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right\}\ ,\ t\ >\ 0 \tag{2.3}$$

또한 Lee and Lee(1978)는 $2n\beta/\hat{\beta}$가 자유도 $2(n-1)$인 카이제곱분포를 따른다는 사실을 밝혔다.

$T_1 = t_1, T_2 = t_2, \cdots, T_k = t_k$가 주어졌을 때, T_{k+1}의 조건부 확률밀도함수는

$$f_{k+1}(t|t_1,\cdots,t_k) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}\exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}+\left(\frac{t_k}{\theta}\right)^{\beta}\right\},\ t_k < t,$$

이므로, n번째 고장이 일어난 시각이 $T_n = t_n$으로 주어졌을 때, 그 다음 고장이 일어날 때까지의 평균고장간격 $MTBF(t_n)$은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} MTBF(t_n) &= E[T_{n+1} - T_n \mid T_n = t_n] \\ &= \int_{t_n}^{\infty} t f_{n+1}(t \mid t_1,\cdots,t_n)dt - t_n \\ &= \beta\exp\left\{\left(\frac{t_n}{\theta}\right)^{\beta}\right\}\int_{t_n}^{\infty}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right\}dt - t_n \\ &= \frac{\theta}{\beta}\exp\left\{\left(\frac{t_n}{\theta}\right)^{\beta}\right\}\int_{(t_n/\theta)^{\beta}}^{\infty} e^{-t}\ t^{1/\beta-1}dt \end{aligned} \tag{2.4}$$

위 (2.4)식을 이용하여 이중기대값의 법칙을 적용하면, $MTBF_n$을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} MTBF_n &= E[E(T_{n+1} - T_n|T_n)] \\ &= \int_0^{\infty} MTBF(t) f_{T_n}(t)dt \\ &= \int_0^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n\beta-1}\int_{(t/\theta)^{\beta}}^{\infty} e^{-u}\ u^{1/\beta-1}dudt \end{aligned}$$

여기서, $y = (t/\theta)^{\beta}$ 로 변수변환을 하면, $MTBF_n$은 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\begin{aligned} MTBF_n &= \int_0^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n)}\frac{\theta}{\beta}y^{n-1}\int_y^{\infty} e^{-u}\ u^{1/\beta-1}\ dudy \\ &= \frac{\theta}{\beta}\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} e^{-u}\ u^{1/\beta-1}\int_0^{u} y^{n-1}dy\ du \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\theta}{\beta}\frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty u^{n+1/\beta-1}e^{-u}du \\
&= \frac{\theta}{\beta}\frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Lee and Lee(1978)의 결과로부터 $2n\beta/\hat{\beta}$는 자유도 $2(n-1)$인 카이제곱분포를 따르므로 $E[1/\hat{\beta}] = (n-1)/n\beta$ 이고, Møller(1976)의 결과로부터 $E[T_n] = \theta\Gamma(n+1/\beta)/\Gamma(n)$이며, T_n과 $\hat{\beta}$은 서로 독립이므로, 다음과 같은 관계식을 유도할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
E\left[T_n/\hat{\beta}\right] &= E\left[T_n\right]\cdot E[1/\hat{\beta}] \\
&= \frac{\theta}{\beta}\frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)}\cdot(n-1) \\
&= MTBF_n\cdot(n-1)
\end{aligned}
$$

따라서, 다음 (2.6)에 주어진 추정량 $\widehat{MTBF}_n$은 $MTBF_n$의 불편추정량 이다.

$$
\widehat{MTBF}_n = \frac{T_n}{(n-1)\hat{\beta}} \tag{2.6}
$$

정리 2.1 만약 $\beta \geq 1$이면, $\widehat{MTBF}_n$은 $MTBF_n$ 의 일치 추정량이다. 즉,

$$
\widehat{MTBF}_n - MTBF_n \xrightarrow{p} 0 .
$$

증명: Lee and Lee(1978)와 Møller(1976)의 결과로부터, $E[1/\hat{\beta}^2] = (n-1)/n\beta^2$이고 $E[T_n^2] = \theta^2\Gamma(n+2/\beta)/\Gamma(n)$ 이므로, $\widehat{MTBF}_n$의 분산은 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
V(\widehat{MTBF}_n) &= E\left[\left(\frac{T_n}{(n-1)\hat{\beta}}\right)^2\right] - MTBF_n^2 \\
&= \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2\frac{\Gamma(n+2/\beta)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{1}{n-1} - \left\{\frac{\theta}{\beta}\frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)}\right\}^2 \\
&= \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2\frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)}\left[\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\Gamma(n+2/\beta)}{\Gamma(n+1/\beta)} - \frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)}\right]
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

추정량의 일치성을 증명하기 위하여 위 (2.7)식의 분산이 0으로 수렴함을 보이면 되는데, 이는 $\beta = 1$인 경우와 $\beta > 1$인 경우로 나누어 증명할 수 있다.

Case 1 : $\beta = 1$인 경우.

이 경우 식 (2.7)의 추정량의 분산은 아래와 같이 간단히 표현되므로 명백히 0으로 수렴함을 알 수 있다.

$$
V(\widehat{MTBF}_n) = \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2\left[\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+1)} - 1\right] \longrightarrow 0,\ n\to\infty.
$$

Case 2 : $\beta > 1$인 경우.

스털링의 공식을 적용하면, 임의의 양수 α에 대하여;

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)} &= \frac{\sqrt{2\pi(n-1+\alpha)}(n-1+\alpha)^{(n-1+\alpha)}e^{-(n-1+\alpha)}\{1+o(1)\}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\{1+o(1)\}} \\ &= \sqrt{\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)}\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)^n (n-1+\alpha)^{\alpha-1}e^{1-\alpha}\{1+o(1)\} \qquad (2.8)\end{aligned}$$

이 성립한다. 특히, $0 < \alpha < 1$ 이면,

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)} \longrightarrow 0\ ,\ n \to \infty, \qquad (2.9)$$

임을 알 수 있다. 따라서, (2.7)식의 두 번째 항은 명백히 0으로 수렴한다. (2.7)식의 첫 번째 항은 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 각각의 경우에 0으로 수렴함을 보일 수 있다. 먼저, $1/2 < 1/\beta < 1$ 이면 $0 < \gamma = 2/\beta - 1 < 1$ 이므로 (2.9)식의 결과에 의해 첫 번째 항은 다음과 같이 명백히 0으로 수렴한다.

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\Gamma(n+2/\beta)}{\Gamma(n+1/\beta)} \\ &= \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\Gamma(n+2/\beta)}{\Gamma(n+1)} \\ &= \frac{n+\gamma}{n-1}\cdot\frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+1)} \longrightarrow 0,\ n \to \infty\ .\end{aligned}$$

다음으로, $0 < 1/\beta \le 1/2$ 이면,

$$0 < \frac{\Gamma(n+2/\beta)}{(n-1)\Gamma(n+1/\beta)} \le \frac{\Gamma(n+1)}{(n-1)\Gamma(n)} \longrightarrow 1,\ n \to \infty,$$

이므로 이 경우 역시 첫 번째 항은 0 으로 수렴한다. □

3. 추정량의 점근분포

이 절에서는 일반화 감마분포의 성질로부터 얻어진 Lawless(1982)의 결과와 로그함수의 성질을 이용하여 (2.5)에서 구한 $MTBF_n$의 불편추정량 $\widehat{MTBF}_n$의 점근분포에 대한 정규성을 보이고자 한다. 이를 위하여 먼저 $\log\widehat{MTBF}_n$의 근사적 정규성을 증명하고 Lehmann(1983, p. 337)의 결과를 이용하면 $\widehat{MTBF}_n$의 정규성을 증명할 수 있다.

정리 3.1 강도함수 (1.1)을 갖는 와이블과정에 대하여, 다음의 분포수렴이 성립한다.

$$\sqrt{n}\beta(\log\widehat{MTBF}_n - \log MTBF_n) \xrightarrow{d} N(0,2).$$

증명: (2.5)식과 (2.6)식을 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\beta(\log \widehat{MTBF}_n - \log MTBF_n)\\
&\quad = \sqrt{n}\left[\log\left(\frac{T_n}{\theta}\right)^{\beta} - \log(n-1)\right] + \sqrt{n}\beta\left[\log\beta - \log\hat{\beta}\right]\\
&\qquad +\sqrt{n}\beta\left[\left(\frac{1}{\beta-1}\right)\log(n-1) - \log\left(\frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)}\right)\right]
\end{aligned}$$

이 되고, 여기서 다시 $\alpha = 1/\beta$ 로 두고 $\Gamma(n+1/\beta)/\Gamma(n+1)$ 대신 (2.8)식의 결과를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\beta(\log \widehat{MTBF}_n - \log MTBF_n)\\
&\quad = \sqrt{n}\left[\log\left(\frac{T_n}{\theta}\right)^{\beta} - \log(n-1)\right] + \sqrt{n}\beta\left[\log\beta - \log\hat{\beta}\right]\\
&\qquad +\sqrt{n}\beta\left[(\alpha-1)\log\left(\frac{n-1}{n+\alpha-1}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{n+\alpha-1}{n}\right)\right]\\
&\qquad +\sqrt{n}\beta\left[(\alpha-1) - \log\left(\frac{n+\alpha-1}{n}\right)^{n}\right]\\
&\qquad +\sqrt{n}\beta[\log(1+O(1/n)] \ . \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

위 (3.1)식에서, 첫 번째 항은 Lawless(1982)의 결과(pp. 21 ~ 23)에 의해 N(0,1)로 분포수렴하며, 두 번째 항을 제외한 나머지 항들은 로그함수의 맥클로린 급수전개에 의해 모두 0 으로 수렴함을 보일 수 있다. 이제 두 번째 항을 로그함수의 급수전개를 이용하여 다시 표현하면

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\beta\left(\log\beta - \log\hat{\beta}\right) &= \sqrt{n}\beta\left(\log\frac{1}{\hat{\beta}} - \log\frac{1}{\beta}\right)\\
&= \sqrt{n}\beta\left(\frac{1}{\hat{\beta}} - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{\sqrt{n}\beta}{2}\left[\left(\frac{1}{\hat{\beta}}-1\right)^2 - \left(\frac{1}{\beta}-1\right)^2\right]\\
&\quad + \frac{\sqrt{n}\beta}{3}\left[\left(\frac{1}{\hat{\beta}}-1\right)^3 - \left(\frac{1}{\beta}-1\right)^3\right] - \cdots \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

이 된다. $2n\beta/\hat{\beta}$가 자유도 $2(n-1)$인 카이제곱 분포를 따르므로

$$E\left[\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right)^k\right] = \frac{(n+k-2)!}{(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^k}\cdot\frac{1}{\beta^k}\ ,\ \ k \geq 3\ ,$$

이 성립하며, 이를 이용하여 다음과 같은 관계식들을 얻을 수 있다.

$$E\left[\left(\frac{1}{\hat{\beta}}-1\right)\right] = \left(\frac{1}{\beta}-1\right) - \frac{1}{n\beta}\ ,$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{1}{\hat{\beta}}-1\right)^2\right] &= \left(\frac{1}{\beta}-1\right)^2-\frac{1}{n\beta}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{2}{n}\right) \ , \\
E\left[\left(\frac{1}{\hat{\beta}}-1\right)^k\right] &= \sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}E\left[\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right)^x\right](-1)^{k-x} \\
&= \sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\frac{(n+x-2)!}{(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^x}\cdot\frac{1}{\beta^x}(-1)^{k-x} \\
&= (-1)^k+k\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\beta}(-1)^{k-1}+\binom{k}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\beta^2}(-1)^{k-2} \\
&\qquad +\sum_{x=3}^{k}\binom{k}{x}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{(n+2)(n+3)\cdots(n+x-2)}{n^{x-3}}\cdot\frac{1}{\beta^x}(-1)^{k-x} \\
&= (-1)^k+k\cdot\frac{1}{\beta}(-1)^{k-1}+\binom{k}{2}\frac{1}{\beta^2}(-1)^{k-2}+\sum_{x=3}^{k}\binom{k}{x}\frac{1}{\beta^x}(-1)^{k-x}+o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\beta}-1\right)^k+o\left(\frac{1}{n}\right) \ , \quad k\geq 3. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

이제, (3.3)식의 결과를 (3.2)식에 적용하면, 두 번째 항은 다음과 같이 표현되어 진다.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n}\beta\left(\log\beta-\log\widehat{\beta}\right) &= \sqrt{n}\beta\left(\log\frac{1}{\widehat{\beta}}-\log\frac{1}{\beta}\right) \\
&= \sqrt{n}\beta\left(\frac{1}{\widehat{\beta}}-\frac{1}{\beta}\right)+o_p(1) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\frac{2\beta}{\widehat{\beta}}-2\right)+o_p(1) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\frac{2n\beta}{\widehat{\beta}}\cdot\frac{1}{n-1}\times\frac{n-1}{n}-2\right)+o_p(1) \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

한편, $X_1,\cdots,X_{n-1}$ 을 서로 독립이고 평균이 2인 동일한 지수분포를 따르는 확률변수라 하고, $S_{n-1}=X_1+\cdots+X_{n-1}$ 이라 두면, S_{n-1}은 자유도 가 $2(n-1)$인 카이제곱 분포를 따르는 확률변수로서 $2n\beta/\hat{\beta}$과 동일한 분포를 따른다. 따라서 중심극한정리에 의해 식 (3.4)는 $N(0,1)$로 분포수렴 한다. □

참고문헌

[1] 이현우, 김재주, 박성현 (1998). 와이블 과정을 응용한 신뢰성 성장모형에서의 MTBF 추정. 〈 품질경영학회지 〉, 제 26권 3호. 71 ~ 81.

[2] Bain, L. J. and Engelhardt, M. (1986). On the Asymptotic Behavior of the Mean Time Between Failures for Repairable Systems, *Reliability and Quality Control*, 1~ 7.

[3] Crow, L. H. (1974). Reliability Analysis of Complex, Repairable Systems, In *Reliability and Biometry*,(Eds., F. Proschan and R. J. Serfling), 379 ~ 410, SIAM, Philadelpia.

[4] Crow, L. H. (1982). Confidence Interval Procedures for the Weibull Process with Applications to Reliability Growth, *Technometrics*, Vol. 24, 67 ~72.

[5] Duane, J. T. (1964). Learning Curve Approach to Reliability, *IEEE Transactions on Aerospace*, Vol. 2, 563 ~566.

[6] Engelhardt, M. and Bain, L. J. (1986). On the MTBF for Repairable Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 35, 419 ~ 422.

[7] Lawless, J. F. (1982), *Statistical Models and Method for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, New York.

[8] Lee, L and Lee, S. K. (1978). Some Results on Inference for the Weibull Process, *Technometrics*, Vol. 20, 41 ~ 45.

[9] Lehmann, E. L. (1983). *Theory of Point Estimation*, John Wiley & Sons, New York.

[10] Møller, S. K. (1976). The Rasch-Weibull Process, *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 3, 107 ~ 115.

[11] Tsokos, C. P. (1995). Reliability Growth : Nonhomogeneous Poisson Process, In *Recent Advances in Life-Testing and Reliability*, 319 ~ 334.

[1998년 7월 접수, 1998년 10월 최종수정]

Estimation for Mean Time Between Failures of a Repairable System

Hyunwoo Lee [1] Chi Yong Kim [2]

ABSTRACT

Much of the recent work on modeling and analyzing of repairable systems is based on the assumption of a special type of Non-homogeneous Poisson process known as a Weibull process. These studies have been concerned with the MTBF at the n-th failure time, that is, the mean time to the next failure at t_n. In this paper, we proposed an estimator of $MTBF_n \equiv E(T_{n+1} - T_n)$ and discuss its propoties; unbiasedness, consistency and asymptotic normality.

1) The Research Institute for Basic Science, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
2) Assistant Professor, Dept. of Applied Statistics, Seokyeoung University, Seoul 136-704, Korea