응용통계연구 제 **12**권 1호, *1999*년, *pp. 109-124*

오차항이 이동평균과정을 따르는 회귀모형에서 회귀계수의 효율적 추정에 관한 연구

송석헌[1)] 이종협[2)] 김기환[3)]

요 약

일반적으로 오차항이 자기상관되어 있는 선형회귀 모형에서는 회귀계수에 대한 보통최소제곱추정량이 효율적이지 못 하다고 알려져 있다. 그러나 이러한 일반화선형회귀모형에서 독립변수의 형태에 따라서는 OLSE의 사용 가능성을 제시하는 모형이 있다. 본 연구에서는 오차항이 일차 이동평균 과정을 따르는 선형회귀모형에서 여러 추정량들(GLSE, APX, MAPX)에 대한 OLSE의 상대효율함수를 유도하고 비교 분석하고자 한다. 특히 소표본에서 정확한 상대효율값을 구하여 OLSE의 효율성이 크게 떨어지지 않거나 효율성이 나은 회귀모형들을 제시한다.

1. 서론

오차항의 공분산행렬이 단위행렬의 상수배 형태인 구형성(spherical)을 만족하지 못하는 일반화선형회귀모형에서 회귀계수에 대한 일반화최소제곱추정량(generalized least squares estimator, GLSE)이 최량선형불편추정량(best linear unbiased estimator)임은 잘 알려진 사실이다. 그러나 현실적으로 오차항의 공분산행렬값이 알려져 있지 않은 경우가 대부분이며, 이 경우 GLSE는 단지 이론적인 추정량에 불과할 뿐이다. 만일 위의 모형에서 보통최소제곱법을 이용하여 회귀계수를 추정한다면, 보통최소제곱추정량(ordinary least squares estimator, OLSE)은 일반적으로 불편추정량 이지만 최량(best)이 아니다. 그러나 어떤 경우들에 있어서는 GLSE가 같는 최량의 성질들을 OLSE가 가질 수 있다는 것 또한 잘 알려져 있지 않은 사실이다. 연구자들이 이러한 사실을 중요하게 다루지 않은 이유는 이러한 연구가 이론적인 면에 편중되어 실제 응용에 적용될 수 있는 경우가 많지 않음이었다. OLSE와 GLSE가 같아지는 조건들에 대한 연구는, Anderson(1948)이 처음으로 조건을 제시한 이후 Zyskind(1967, 1969), Kruskal(1968), McEloy(1969), Anderson(1971, 1972) 등에 의하여 독립변수의 형태와 오차항의 공분산형태에 따라 두 추정방법이 같아지는 조건들이 활발히 연구되어 왔다. 최근 Milliken과 Albohali(1984), Baksalary와 Eijnsbergen(1988), Baltagi(1989), Puntanen과 Styan(1989), Lee(1993)에 의하여 여러 가지의 조건들이 정리, 요약되어 졌다. 그러나 비록 OLSE가 최량의 성질을 갖지 못 하더라도 GLSE와 비교하여 OLSE의 효율성이 크게 떨어지지 않는 경우는 실제 응용에 중요한 역할을 하게 된다. 이러한 관점에서, 최근 직접적으로 두 추정량에 대한 상대적 효율성을 비교하여 OLSE의 효율

1) (136-742) 서울시 도봉구 쌍문동, 덕성여자대학교 통계학과, 조교수
2) (132-714) 서울시 성북구 동선동, 성신여자대학교 통계학과, 부교수
3) (136-701) 서울시 성북구 안암동, 고려대학교 통계학과, 박사과정 수료

성이 크게 떨어지지 않는 경우에 대한 연구들이 진행되어 졌다.

Zyskind(1967), Bloomfield와 Watson(1975), Knott(1975), Rao(1985) 등은 오차항의 형태가 주어지고 독립변수들의 형태에 따라 OLSE의 GLSE에 대한 상대효율성 연구를 했으며, Chipman(1979), Jeske(1993), Jeske, Busse와 Krämer(1994)는 오차항이 일차자기회귀(first order autoregressive, AR(1)) 과정을 따르고 독립변수의 형태가 절편항과 선형추세 회귀모형을 취할 때 두 추정량에 대한 상대적 효율성을 비교 연구하였고 Jeske, Song과 Bütefisch(1996) 는 오차항이 일차이동평균(first order moving average, MA(1)) 과정을 따르고 독립변수의 형태가 절편항만 포함하고 있는 회귀모형에서 OLSE의 GLSE에 대한 상대효율성을 다루었다.

오차항이 AR(1) 과정을 따르는 경우 회귀계수 추정을 위해 모형에서 첫 번째 관측치를 제거하는 Cochrane-Orcutt-Transformation(COT)는 응용분야에서는 계산상의 편리함과 모형의 단순화라는 측면에서 많이 사용되고 있다(Judge et. al(1985), Greene(1997)). 그러나 최근 AR(1)과정의 오차항을 가지는 선형회귀모형에서 COT추정량(COTE)이 OLSE에 비해 비효율적인 경우가 존재하는 것이 밝혀졌으며 COTE의 이용에 대한 문제점들이 지적되고 보완되어 왔다(Maeschiro(1976, 1980), Porier(1978), Doran(1981), Thornton(1987), Puterman(1988), Song과 Park(1997)). 오차항들이 MA(1) 과정을 따르는 경우에도 계산상의 편의를 위해 Balestra(1980)는 AR(1) 과정에서 첫 번째 관측치를 제거하는 COT와 유사한 방법의 변환방법을 제안하고 이를 이용하여 회귀계수에 대한 추정방법을 제시하였다. 그 이후 Park과 Heikes(1983), Choudhury와 Louis(1990), Choudhury(1994) 등은 Balestra가 제안한 변환 방법을 수정 보완하여 더욱 효율적인 추정방법을 제안하였다. 그러나 그들 모두가 제안한 변환등을 실제 사용하려면 오차항에 있어서 일차이동평균모수에 대한 정보를 알거나, 일차이동평균모수에 대한 좋은 일치 추정량들을 계산해야 하는 번거로움이 있다.

본 연구에서는 오차항이 MA(1) 과정을 따를때 독립변수의 형태에 따른 GLSE에 대한 OLSE의 효율성 비교를 통하여 OLSE의 효율성이 크게 떨어지지 않는 회귀모형들을 제안하려 한다. 더불어 Balestra의 변환을 통하여 얻어진 추정량과 Park과 Heikes, Choudhury 등이 제안한 변환을 통하여 얻어진 추정량과 OLSE의 효율성 비교를 통하여 이들이 제안한 추정방법에 대한 문제점을 지적할 수 있는, 즉 OLSE의 사용이 더욱 효율적인 회귀모형을 탐색하고 제안하려 한다.

2절에서는 오차항이 MA(1) 과정을 따르는 일반화선형회귀모형을 다루고, 본 연구에서 고려하고 있는 OLSE, GLSE, Balestra의 변환에 따른 추정량과 Park과 Heikes, Choudhury 등이 제안한 추정량을 소개하고 각 추정량들의 공분산행렬을 다룬다. 3절에서는 각각의 독립변수의 형태에 따른 여러 추정량들에 대한 OLSE의 상대효율함수를 유도하고, 소표본에서 정확한 상대효율값을 구하여 OLSE의 상대효율에 대하여 토의하고 4절에서는 결론을 맺는다.

2. 모형과 회귀계수 추정량

2.1. 모형과 가정

다음과 같은 선형회귀모형을 고려하자.

$$\mathbf{y} = X\beta + \mathbf{u} \tag{2.1}$$

여기에서 $\mathbf{y}$는 $(T \times 1)$인 종속변수 벡터이고, T는 관측 시간을 의미하며, X는 $(T \times k)$인 독립변수 행렬이고 $Rank(X) = k \leq T$이며, β는 $(k \times 1)$인 회귀계수 벡터이며 $\mathbf{u}$는 $(T \times 1)$인 오차항 벡터이며 다음과 같은 가정을 갖는다.

$$E(\mathbf{u}) = \mathbf{0},\ \ Cov(\mathbf{u}) = \sigma^2 V,\ \ V \neq I,\ \ V\text{는 양정치행렬이다.}$$

만일 오차항들이 MA(1)과정을 따른다면 (2.1)의 모형은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} y_t =&\ \ \mathbf{x}_t'\beta + u_t, \quad\ t = 1, \ldots, T, \\ u_t =&\ \ \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}, \quad -1 < \theta < 1,\ \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

위의 모형에서 회귀계수에 대한 OLSE와 GLSE는 각각 다음과 같다.

$$\widehat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'\mathbf{y} \tag{2.3}$$

$$\widetilde{\beta}_{GLS} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\mathbf{y} \tag{2.4}$$

그리고 이들 추정량의 분산-공분산행렬들은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$Cov(\widehat{\beta}_{OLS}) = \sigma_\epsilon^2(X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} \tag{2.5}$$

$$Cov(\widetilde{\beta}_{GLS}) = \sigma_\epsilon^2(X'V^{-1}X)^{-1} \tag{2.6}$$

여기서

$$V = \begin{pmatrix} 1+\theta^2 & -\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta & 1+\theta^2 & -\theta & \cdots & 0 \\ 0 & -\theta & 1+\theta^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

또한 역행렬 V^{-1}는 다음과 같다(Balestra(1980), Jeske et. al(1996)).

$$\begin{aligned} V^{-1} \ =&\ \ A - \frac{\theta^2}{(1-\theta^{2T+2})(1-\theta^2)}(\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1' + \mathbf{z}_2\mathbf{z}_2') \\ +&\ \ \frac{\theta^{T+3}}{(1-\theta^{2T+2})(1-\theta^2)}(\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1' + \mathbf{z}_2\mathbf{z}_2') \end{aligned} \tag{2.8}$$

여기서

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \theta & \theta^2 & \cdots & \theta^{T-1} \\ \theta & 1 & \theta & \cdots & \theta^{T-2} \\ \theta^2 & \theta & 1 & \cdots & \theta^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^{T-1} & \theta^{T-2} & \theta^{T-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z_1} = (1\ \theta\ \cdots\ \theta^{T-1})',\ \ \mathbf{z_2} = (\theta^{T-1}\ \theta^{T-2}\ \cdots\ 1)'.$$

식 (2.8)에서 V와 V^{-1}가 양정치행렬이므로, V^{-1}는 다음과 같이 분해될 수 있다.

$$V^{-1} = R'R \tag{2.9}$$

여기서

$$R = D^{-1/2}P,\ \ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta^2 & a_1\theta & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^{T-1} & a_1\theta^{T-2} & a_2\theta^{T-3} & \cdots & a_{T-1} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$D = diag(a_0a_1, a_1a_2, a_2a_3, \cdots, a_{T-1}a_T),\ \ a_s = 1+\theta^2+\cdots+\theta^{2s},\ a_0 = 1$$ 이다.

2.2. Balestra-Transformation 추정량 (APX)

Balestra(1980)는 회귀계수 추정시 계산상의 용이함을 위해, 마치 AR(1)과정에서 COT와 같이, 식 (2.10)의 R행렬에서 첫 번째 행을 제거한 후에 다음과 같은 변환모형을 제안하였다.

$$\mathbf{y}^* = X^*\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}^* \tag{2.11}$$

이때 $\mathbf{y}^* = R_2\mathbf{y},\ X^* = R_2X,\ \mathbf{u}^* = R_2\mathbf{u}$이며 R_2는 $(T-1)\times T$인 행렬로 다음같이 표현된다.

$$R_2 = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta^2 & \theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta^3 & \theta^2 & \theta & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^{T-1} & \theta^{T-2} & \theta^{T-3} & \theta^{T-4} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

식 (2.11)의 변환모형에 보통최소제곱법을 적용하면 다음과 같은 추정량이 구해지며,

$$\widehat{\beta}_{APX} = (X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}\mathbf{y}^* = (X'R_2'R_2X)^{-1}X'R_2'R_2\mathbf{y} \tag{2.13}$$

이를 APX(approximation) 추정량이라 하자. 이때 $\widehat{\beta}_{APX}$의 공분산행렬은 아래와 같다.

$$Cov(\widehat{\beta}_{APX}) = \sigma_\epsilon^2 (X'R_2'R_2X)^{-1}(X'R_2'R_2R'RR_2'R_2X)(X'R_2'R_2X)^{-1} \tag{2.14}$$

2.3. Park and Heikes-Transformation 추정량(MAPX)

Park과 Heikes (1983), Choudhury와 Louis(1990), Choudhury(1994)는 Balestra의 변환을 보완하여 식 (2.10)의 R 행렬에서 첫 번째 행의 첫 번째 열만을 1로 놓은 다음과 같은 변환모형을 제안하였다.

$$\mathbf{y}^+ = X^+\beta + \mathbf{u}^+ \tag{2.15}$$

이때 $\mathbf{y}^+ = R_3\mathbf{y}$, $X^+ = R_3X$, $\mathbf{u}^+ = R_3\mathbf{u}$이며 R_3는 $T\times T$인 행렬로 다음과 같다.

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta^2 & \theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta^3 & \theta^2 & \theta & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^{T-1} & \theta^{T-2} & \theta^{T-3} & \theta^{T-4} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

식 (2.15)의 변환모형에 보통최소제곱법을 적용하면 다음과 같은 추정량이 구해지며,

$$\widehat{\beta}_{MAPX} = (X^{+'}X^+)^{-1}X^{+'}\mathbf{y}^+ = (X'R_3'R_3X)^{-1}X'R_3'R_3\mathbf{y} \tag{2.17}$$

이를 MAPX(modified approximation) 추정량이라 하자. 이때 $\widehat{\beta}_{MAPX}$의 공분산행렬은 다음과 같다.

$$Cov(\widehat{\beta}_{MAPX}) = \sigma_\epsilon^2 (X'R_3'R_3X)^{-1}(X'R_3'R_3R'RR_3'R_3X)(X'R_3'R_3X)^{-1} \tag{2.18}$$

3. 상대효율

본 절에서는 모형(2.1)에서 독립변수 X의 여러가지 형태에 따른, OLSE에 대한 다른 추정량들(GLSE, APX, MAPX)과의 효율성을 비교하려 한다. 추정량들의 상대효율을 평가하기 위해서는 여러 비교방법이(Iwasaki (1987)) 있으나, 여기서는 평균제곱오차(mean square error, MSE)를 이용한 상대효율함수(Krämer(1980))를 사용하여 OLSE에 대한 상대효율함수를 각각 유도하고, 특히 소표본하에서 각 추정방법에 대한 OLSE의 상대효율의 정확한 값을 $-1 < \theta < 1$의 범위에서 구하고자 한다. 다음과 같은 상대효율함수를 고려하자.

$$E(\theta) = \frac{tr(Cov(\widehat{\beta}_{OLS}))}{tr(Cov(\widehat{\beta}_m))} \tag{3.1}$$

여기서 $Cov(\widehat{\beta}_m)$는 각각 $Cov(\widehat{\beta}_{GLS})$, $Cov(\widehat{\beta}_{APX})$, $Cov(\widehat{\beta}_{MAPX})$ 이다.

3.1. 절편항만 있는 회귀모형

모형(2.1)에서 X가 단지 절편항을 만을 포함하는 경우, 즉 $X = (1, 1, \cdots, 1) := \imath$인 모형을 고려해보자. 이 경우에 있어서 각각의 추정량들의 분산을 유도하면 다음과 같다.

$$Var(\widehat{\beta}_{1OLS}) = \sigma_\epsilon^2 \frac{T(1-\theta)^2 + 2\theta}{T^2} \tag{3.2}$$

$$Var(\widetilde{\beta}_{1GLS}) = \sigma_\epsilon^2 \frac{(1-\theta)^2}{T} \left(1 - \frac{2\theta(1-\theta^T)}{T(1-\theta)(1+\theta^{T+1})}\right)^{-1} \tag{3.3}$$

$$Var(\widehat{\beta}_{1APX}) = \sigma_\epsilon^2 \frac{(1-\theta)^2}{T - 1 - 2\theta^2 r_1 + \theta^4 r_2} \left\{1 + \frac{\theta^4(r_1 - \theta^2 r_2)^2}{(T - 1 - 2\theta^2 r_1 + \theta^4 r_2)}\right\} \tag{3.4}$$

$$r_1 = \frac{1-\theta^{T-1}}{1-\theta}, \quad r_2 = \frac{1-\theta^{2(T-1)}}{1-\theta^2}$$

$$Var(\widehat{\beta}_{1MAPX}) = \sigma_\epsilon^2 \left\{ \frac{(1-\theta)^2(1-\theta^2)}{T(1-\theta^2) - \theta(1-\theta^T)(2+\theta-\theta^{T+1})} + \left(\frac{\theta(1-\theta)(1-\theta^T)(1-\theta^{T+1})}{T(1-\theta^2) - \theta(1-\theta^T)(2+\theta-\theta^{T+1})}\right)^2 \right\} \tag{3.5}$$

식 (3.2) - (3.5)는 각각의 추정량들의 공분산식에 $X = (1, 1, \cdots, 1)$을 대입하여 얻어진다. 각 추정방법들(GLS, APX, MAPX)에 대한 OLSE의 각각의 상대효율값을 식 (3.1)을 이용하여 $-1 < \theta < 1$의 범위에서 각각의 소표본 ($T = 5, 10, \cdots, 50$)에 대하여 구하여 다음 표 3.1에 정리 하였다.

표 3.1에서 알 수 있는 바와 같이 위의 모형에서는 θ값이 음의 값을 갖는 경우(양의 상관관계)에 있어서 OLSE가 GLSE와 비교하여 상대적 효율성이 크게 떨어지지 않는 경우임을 알 수 있으며, 특히 OLSE의 상대효율값이 기존의 APXE보다 효율성이 좋은 것을 보여주고있다. MAPX와의 비교에서는 $-1 < \theta < -0.5$의 범위에서 OLSE가 효율성이 좋으며 $-0.5 < \theta \leq 0$범위에서는 별차이가 없음을 보여준다. 이러한 결과는 오차항이 AR(1)과정을 따르고 절편항만을 포함하고 있는 회귀모형에서 오차항이 양의상관 관계를 보일때 COTE의 효율성이 OLSE 보다 떨어짐을 보인 Puterman(1988)의 결과와 일치함을 보여준다. 표본의 수가 증가함에 따라 OLSE의 상대효율도 증가함을 보여준다.

표 3.1: GLS, APX, MAPX에 대한 OLS의 상대효율값, $X = (1, 1, \cdots, 1) := \iota$ 모형

T	상대 효율	θ -0.99	-0.95	-0.90	-0.80	-0.50	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.50	0.80	0.90	0.95	0.99
5	GLS	0.925	0.926	0.928	0.934	0.966	0.992	0.997	1.000	0.997	0.987	0.898	0.752	0.723	0.716	0.714
	APX	2.015	1.772	1.550	1.372	1.457	1.345	1.298	1.250	1.197	1.139	0.924	0.836	0.921	0.988	1.054
	MAPX	2.797	1.599	1.401	1.150	0.980	0.992	0.997	1.000	0.997	0.987	0.915	0.922	1.012	1.078	1.140
10	GLS	0.964	0.965	0.965	0.934	0.981	0.995	0.998	1.000	0.998	0.990	0.892	0.584	0.488	0.463	0.454
	APX	2.987	2.069	1.478	1.372	1.197	1.151	1.132	1.111	1.087	1.057	0.902	0.698	0.796	0.926	1.075
	MAPX	2.906	2.129	1.571	1.150	0.989	0.995	0.998	1.000	0.998	0.990	0.902	0.741	0.837	0.963	1.107
20	GLS	0.979	0.979	0.979	0.981	0.989	0.997	0.999	1.000	0.998	0.994	0.925	0.548	0.347	0.282	0.260
	APX	4.665	2.234	1.334	1.088	1.091	1.071	1.062	1.052	1.041	1.026	0.930	0.623	0.611	0.765	1.036
	MAPX	4.703	2.464	1.516	1.101	0.994	0.997	0.999	1.000	0.998	0.994	0.931	0.644	0.628	0.779	1.047
30	GLS	0.985	0.985	0.985	0.987	0.992	0.998	0.999	1.000	0.999	0.996	0.945	0.583	0.319	0.218	0.115
	APX	6.035	2.142	1.242	1.058	1.059	1.046	1.040	1.034	1.026	1.016	0.948	0.637	0.522	0.642	0.900
	MAPX	6.137	2.422	1.414	1.074	0.996	0.998	0.999	1.000	0.999	0.996	0.948	0.652	0.533	0.650	0.902
50	GLS	0.990	0.990	0.991	0.992	0.995	0.998	0.999	1.000	0.999	0.997	0.964	0.661	0.337	0.178	0.115
	APX	7.913	1.866	1.152	1.034	1.034	1.027	1.024	1.020	1.015	1.009	0.966	0.696	0.473	0.492	0.900
	MAPX	8.103	2.142	1.286	1.048	0.997	0.998	0.999	1.000	0.999	0.997	0.966	0.706	0.479	0.496	0.902

3.2. 원점을 지나는 선형추세회귀모형

회귀모형(2.1)에서 X가 원점을 지나는 선형추세, 즉 $X = (1, 2, \cdots, T) := \tau$ 인 모형을 고려해보자. 이 경우에 있어서 각각의 추정량들의 분산을 계산하면 다음과 같다.

$$Var(\widehat{\beta}_{2OLS}) = \sigma_\epsilon^2 \frac{6(2T+1)(1-\theta)^2 + 36\theta}{T(T+1)(2T+1)^2} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} Var(\widetilde{\beta}_{2GLS}) = \; & \sigma_\epsilon^2 \frac{1-\theta^2}{6(1-\theta^2)(1-\theta)^4(1-\theta^{2(T+1)})} \left\{ \frac{T(T+1)(2T+1)(1+\theta)}{6(1-\theta)} \right. \\ & - \frac{T(T+1)\theta}{(1-\theta)^2} - \frac{2T\theta^{T+2}}{(1-\theta)^3} + \frac{2\theta^2(1-\theta^T)}{(1-\theta)^4} - \frac{\theta^2(T+1)^2(1-\theta^T)^2}{(1-\theta^{2(T+1)})(1-\theta)^2} \\ & \left. + \frac{2\theta[\theta^{T+1} - (T+1)\theta + T][T\theta^{T+1} - (T+1)\theta^T + 1]}{(1-\theta^{T+1})(1-\theta)^4} \right\}^{-1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$
\begin{aligned}
Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2APX}) &= \sigma_\epsilon^2 \frac{1}{A}\left(1+\frac{K}{A}\right), \qquad (3.8)\\
A &= \frac{1}{(1-\theta)^4}\left\{\frac{(1-\theta)^2(T-1)(2T^2+5T+6)}{6} - 2\theta(1-\theta)\right.\\
&\left.\left[\frac{(T+2)(T-1)}{2} - \theta^2\left(\frac{r_1}{1-\theta}+r_3\right)\right] + \theta^2\left[(T-1) - 2\theta^2 r_1 + \theta^4 r_2\right]\right\}\\
K &= \frac{1}{(1-\theta)^4}\left[\theta^2(1-\theta)(r_1+r_3) - \theta^3(r_1-\theta^2 r_3)\right]^2, \quad r_3 = \frac{1-T\theta^{T-1}}{1-\theta}\\
Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2MAPX}) &= \sigma_\epsilon^2 \frac{1}{B}\left(1+\frac{L}{B}\right), \qquad (3.9)\\
B &= \frac{1}{(1-\theta)^4}\left\{\frac{T(T+1)(2T+1)(1-\theta)}{6} - 2\theta(1-\theta)\right.\\
&\left.\left[\frac{T(T+1)}{2} - \frac{\theta}{1-\theta}p_1 + p_2\right] + \theta^2\left[T - 2\theta^2 p_1 + \theta^2 p_2\right]\right\}\\
&p_1 = \frac{1-\theta^T}{1-\theta}, \quad p_2 = \frac{T\theta^{T+1}}{1-\theta}\\
L &= \frac{1}{(1-\theta)^4}\left[2\theta p_1 - (1-\theta)p_2 + \theta^3 p_3\right]^2, \quad p_3 = \frac{1-\theta^{2T}}{1-\theta^2}
\end{aligned}
$$

식 (3.6) - (3.9)의 유도 또한 각각의 추정량들의 공분산식에 $X = (1, 2, \cdots, T)$을 대입하여 지루한 연산을 통하여 얻어짐으로 증명을 생략한다. 각 추정량에 대한 OLSE의 상대효율값을 식 (3.6) - (3.10)을 이용하여 식 (3.1)에 대입하여 $-1 < \theta < 1$의 범위에서 각각의 표본에 따라($T = 5, 10, \cdots, 50$) 구하여 다음 표 3.2에 정리하였다.

표 3.2에서도 θ값이 음의 값을 갖는 경우(양의 상관관계)에 있어서 OLSE가 GLSE와 비교하여 효율성이 크게 떨어지지 않는 경우임을 알 수 있으며, APX와 MAPX에 대한 OLSE의 상대효율값의 결과가 표 3.1의 결과와 별차이가 없음을 나타내고 있다. 오차항이 AR(1)과정을 따르는 원점을 지나는 선형추세회귀모형 경우에 대한 기존의 연구 결과에 의하면 OLSE가 GLSE나 COTE와 비교하여 상대효율이 크게 떨어진다 (Krämer(1982), Puterman(1988)). 그러나 오차항이 MA(1)과정을 따르는 위의 모형에서는 이에 상반되는 결과를 보여주고 있다.

3.3. 절편항이 있는 추세선형회귀모형

회귀모형(2.1)에서 X가 절편항과 선형추세를 독립변수로 하는, 즉 $X = (i, \tau)$인 모형을 고려해보자. 이 경우에 있어서 각각의 추정량들에 대한 OLSE의 상대효율함수는 다음과 같

표 3.2: GLS, APX, MAPX에 대한 OLS의 상대효율값, $(X = 1, 2, \cdots, T) := \tau$ 모형

T	상대 효율	θ														
		-0.99	-0.95	-0.90	-0.80	-0.50	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.50	0.80	0.90	0.95	0.99
5	GLS	0.909	0.910	0.911	0.918	0.953	0.989	0.996	1.000	0.995	0.981	0.849	0.651	0.615	0.607	0.604
	APX	1.324	1.165	1.053	0.973	0.985	1.013	1.018	1.018	1.011	0.994	0.831	0.085	0.002	0.000	0.000
	MAPX	2.201	1.929	1.711	1.500	1.327	1.168	1.091	1.000	0.891	0.766	0.359	0.082	0.025	0.007	0.000
10	GLS	0.942	0.942	0.944	0.950	0.972	0.993	0.998	1.000	0.997	0.986	0.856	0.507	0.413	0.388	0.380
	APX	1.007	0.982	0.965	0.959	0.977	0.996	1.001	1.002	0.999	0.988	0.855	0.372	0.032	0.001	0.000
	MAPX	1.668	1.644	1.617	1.566	1.396	1.181	1.095	1.000	0.894	0.778	0.374	0.064	0.020	0.006	0.000
20	GLS	0.967	0.967	0.969	0.972	0.984	0.996	0.998	1.000	0.998	0.992	0.898	0.479	0.293	0.236	0.217
	APX	0.993	0.974	0.970	0.973	0.985	0.996	0.999	1.000	0.998	0.992	0.898	0.467	0.251	0.017	0.000
	MAPX	1.803	1.773	1.739	1.668	1.443	1.189	1.097	1.000	0.897	0.787	0.417	0.065	0.016	0.005	0.000
30	GLS	0.977	0.977	0.978	0.981	0.989	0.997	0.999	1.000	0.998	0.994	0.923	0.511	0.268	0.182	0.152
	APX	0.991	0.978	0.979	0.981	0.989	0.997	0.999	1.000	0.998	0.994	0.923	0.508	0.283	0.101	0.000
	MAPX	1.858	1.826	1.788	1.708	1.460	1.193	1.098	1.000	0.898	0.791	0.439	0.075	0.015	0.004	0.000
50	GLS	0.985	0.986	0.987	0.988	0.993	0.998	0.999	1.000	0.999	0.996	0.949	0.584	0.280	0.147	0.096
	APX	0.991	0.986	0.987	0.988	0.993	0.998	0.999	1.000	0.999	0.996	0.949	0.584	0.284	0.233	0.000
	MAPX	1.907	1.873	1.830	1.743	1.475	1.195	1.098	1.000	0.898	0.794	0.460	0.096	0.018	0.000	0.000

이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
\frac{tr[Cov(\widetilde{\beta}_{GLS})]}{tr[Cov(\widehat{\beta}_{OLS})]} &= \frac{T^2}{q(\theta,T)p(\theta,T)}\left\{1 + \frac{(T^2-1)p(\theta,T)}{12l(\theta,T) - 3(T+1)^2 p(\theta,T)}\right\} \\
\frac{tr[Cov(\widehat{\beta}_{APX})]}{tr[Cov(\widehat{\beta}_{OLS})]} &= \frac{[6T^2 + 3T^2(T+1)^2]s(\theta,T) + T^2(T+1)(2T+1)t(\theta,T)}{6q(\theta,T)} \\
\frac{tr[Cov(\widehat{\beta}_{MAPX})]}{tr[Cov(\widehat{\beta}_{OLS})]} &= \frac{[6T^2 + 3T^2(T+1)^2]v(\theta,T) + T^2(T+1)(2T+1)u(\theta,T)}{6q(\theta,T)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l(\theta,T) &= \frac{\lambda(\theta,T)}{6(1+\theta)(1-\theta)^5(1-\theta^{2T+2})} \\
\lambda(\theta,T) &= (1-\theta^{2(T+1)})\big[T(T+1)(2T+1)(1+\theta)(1-\theta)^3 - 6T(T+1)(T+1)\theta(1-\theta)^2 \\
&\quad -12T\theta^{T+2}(1-\theta) + 12\theta^2(1-\theta^T)\big] - 6(T+1)^2\theta^2(1-\theta^T)^2(1-\theta)^2 \\
&\quad +12\theta\big[\theta^{T+1} - (T+1)\theta + T\big]\big[T\theta^{T+1} - (T+1)\theta^T + 1\big](1+\theta^{T+1}) \\
p(\theta,T) &= \frac{T(1-\theta)(1+\theta^{T+1}) - 2\theta(1-\theta^T))}{(1-\theta)^3(1+\theta^{T+1}} \\
q(\theta,T) &= 2T(1-\theta)^2 + 8\theta \quad s(\theta,T) = Var(\widehat{\beta}_{1APX}) \quad t(\theta,T) = Var(\widehat{\beta}_{2APX}) \\
v(\theta,T) &= Var(\widehat{\beta}_{1MAPX}) \quad u(\theta,T) = Var(\widehat{\beta}_{2MAPX})
\end{aligned}
$$

상대효율함수가 제시되어 있으므로, 각 추정방법에 대한 OLSE의 상대효율값을 $-1 < \theta < 1$의 범위에서 주어진 표본($T = 5, 10, \cdots, 50$)하에서 구하면 다음 표 3.3과 같다.

표 3.3: GLS, APX, MAPX에 대한 OLS의 상대효율값, $X = (\iota, \tau)$ 인 모형

T	상대	θ														
	효율	-0.99	-0.95	-0.90	-0.80	-0.50	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.50	0.80	0.90	0.95	0.99
5	GLS	0.924	0.925	0.926	0.933	0.965	0.992	0.997	1.000	0.997	0.987	0.893	0.741	0.711	0.704	.7020
	APX	1.959	1.724	1.510	1.340	1.319	1.318	1.275	1.230	1.182	1.172	0.915	0.756	0.820	0.879	0.937
	MAPX	1.829	1.626	1.572	1.178	1.008	1.007	1.005	1.000	0.988	0.968	0.862	0.832	0.904	0.960	1.014
10	GLS	0.962	0.944	0.965	0.967	0.980	0.995	0.998	1.000	0.998	0.990	0.891	0.581	0.486	0.460	0.452
	APX	2.938	1.724	1.466	1.191	1.185	1.147	1.128	1.108	1.084	1.055	0.900	0.687	0.769	0.893	1.036
	MAPX	2.875	1.628	1.572	1.158	0.999	1.000	1.001	1.000	0.995	0.985	0.887	0.719	0.809	0.929	1.068
20	GLS	0.978	0.979	0.979	0.981	0.989	0.997	0.999	1.000	0.998	0.994	0.925	0.547	0.347	0.282	0.260
	APX	4.639	2.226	1.332	1.090	1.088	1.070	1.061	1.052	1.040	1.025	0.930	0.622	0.607	0.757	1.062
	MAPX	4.684	2.459	1.518	1.105	0.997	0.998	0.999	1.000	0.998	0.993	0.927	0.639	0.622	0.771	1.036
30	GLS	0.985	0.985	0.986	0.987	0.992	0.998	0.999	1.000	0.999	0.996	0.945	0.583	0.319	0.218	0.182
	APX	6,019	2.138	1.241	1.059	1.057	1.046	1.040	1.034	1.026	1.016	0.948	0.637	0.521	0.640	0.984
	MAPX	6.123	2.420	1.415	1.076	0.997	0.998	0.999	1.000	0.998	0.995	0.947	0.649	0.531	0.647	0.989
50	GLS	0.990	0.990	0.991	0.992	0.995	0.998	0.999	1.000	0.999	0.997	0.964	0.661	0.337	0.178	0.115
	APX	7.905	1.865	1.152	1.034	0.034	1.027	1.024	1.000	1.015	1.009	0.966	0.696	0.472	0.491	0.898
	MAPX	8.096	2.142	1.286	1.049	0.998	0.999	0.999	1.000	0.999	0.997	0.996	0.705	0.479	0.495	0.900

표 3.3에서 알 수 있는 바와 같이 위의 모형에서는 θ값이 음의 값을 같는 경우(양의 상관관계)에 있어서 OLSE의 상대효율값이 기존의 APXE 보다 효율성이 좋은 경우를 알 수있으며, MAPX와의 비교에 있어서는 대표본의 경우 θ값에 관계없이 T값이 커짐에따라 OLSE가 GLSE에 대하여 점근적으로 효율이 같은 추정량임을 보여주고 있다. 이는 l'Hospital정리를 이용하여 간단히 유도할 수 있어서 증명은 생략한다. 일반적으로 OLSE의 GLSE에 대한 상대효율이 크게 떨어지리라는 기대에 대한 반대의 경우이다.

4. 결론

본 연구에서는 다양한 회귀모형하에서 잘 알려진 OLSE와 GLSE, APX, MAPX들과의 상대효율을 비교하여 OLSE를 사용해도 효율성이 좋은 회귀모형들을 제안하였다 이러한 모형들은 실질적으로 계량경제학 등에서 유용한모형 들로서 (Shiller (1981)), 재정학등에서 많이 응용되고있다. 특히 OLSE가 GLSE와 비교하여 상대적 효율성이 크게 떨어지지 않는 경우의 회귀모형들을 제안할 수 있다면 기존의 FGLSE(feasible generalized least squares estimation) 를 사용하여 모수를 추정하는 번거러움을 피하며 간단히 계산할 수 있다.

본 연구를 통하여 Balestra와 Park과 Heikes, Choudhury 등이 제안한 APX와 MAPX의 이용에 있어서 그들이 제안한 추정량들의 이용에 문제점이 있음을 지적하는 모형들을 제

시하였고, 더불어 실제 시계열회귀자료의 분석시 OLSE의 이용이 가능한 영역을 제시하였으며, 제안된 모형들에 대해서는 회귀계수 추정을 위한 계산상의 어려움을 해소할 수 있을 것이다. 즉 실험자가 흔히 실험이나 관찰을 통해서 얻어진 자료의 형태에 따라서 비록 오차항이 단위행렬의 상수배 형태가 아닌 경우라도 보통최소제곱법을 이용할 수 있어 추정량 유도에 단순화를 가져올 수 있어, 여러 분야에서 통계적 분석을 하는 경우에 적절히 활용될 수 있다.

5. 부록

본 절에서는 각각의 모형에서 상대효율함수가 유도되는 과정을 간단히 설명하려한다.

만일 $C \in \mathcal{R}^{T\times T}$가 대칭인 Toeplitz행렬이고 $D = (I_{T+1-i,j})_{ij}$는 회전단위 (rotated identity) 행렬이면 다음이 성립된다.

$$\iota DC\tau = \iota C\tau = \frac{T+1}{2}\iota' C\iota.$$

만일 $A, B \in \mathcal{R}^{2\times 2}$들이 대칭행렬이고

$$a_{12} = \frac{T+1}{2}a_{11},\ \ b_{12} = \frac{T+1}{2}b_{11}$$

이면 아래식이 성립된다.

$$tr(A^{-1}B) = \frac{b_{11}\Big\{a_{22} - \frac{1}{4}(T+1)^2 a_{11}\Big\} + a_{11}\Big\{b_{22} - \frac{1}{4}(T+1)^2 b_{11}\Big\}}{a_{11}\{a_{22} - \frac{1}{4}(T+1)^2 a_{11}\}}$$

$$tr(AB) = a_{11}b_{11}\Big\{1 + \frac{(T+1)^2}{2}\Big\} + a_{22}b_{22}$$

식 (3.1)과 Lemma 1을 이용하면 다음과 같은 상대효율 함수들을 유도할 수 있다.

$$\frac{tr[Cov(\widetilde{\beta}_{GLS})]}{tr[Cov(\widehat{\beta}_{OLS})]} = \frac{tr(\widetilde{V}_1)}{tr(\widehat{V}_1)} = \frac{tr[(X'V^{-1}X)^{-1}X'X]}{tr[(X'VX)(X'X)^{-1}]}$$

$$\frac{tr[Cov(\widehat{\beta}_{APX})]}{tr[Cov(\widehat{\beta}_{OLS})]} = \frac{tr(\widetilde{V}_2)}{tr(\widehat{V}_1)} = \frac{tr[(X'R_2'R_2X)^{-1}(X'R_2'R_2R'RR_2'R_2X)(X'R_2'R_2X)^{-1}(X'X)]}{tr[(X'VX)(X'X)^{-1}]}$$

$$\frac{tr[Cov(\widehat{\beta}_{MAPX})]}{tr[Cov(\widehat{\beta}_{OLS})]} = \frac{tr(\widetilde{V}_3)}{tr(\widehat{V}_1)} = \frac{tr[(X'R_3'R_3X)^{-1}(X'R_3'R_3R'RR_3'R_3X)(X'R_3'R_3X)^{-1}X'X]}{tr[(X'VX)(X'X)^{-1}]}$$

$$X'X = \begin{pmatrix} \iota'\iota & \frac{T+1}{2}\iota'\iota \\ \frac{T+1}{2}\iota'\iota & \tau'\tau \end{pmatrix},\ X'VX = \begin{pmatrix} \iota'V\iota & \frac{T+1}{2}\iota'V\iota \\ \frac{T+1}{2}\iota'V\iota & \tau'V\tau \end{pmatrix},$$

$$X'V^{-1}X = \begin{pmatrix} \iota'V^{-1}\iota & \frac{T+1}{2}\iota'V^{-1}\iota \\ \frac{T+1}{2}\iota'V^{-1}\iota & \tau'V^{-1}\tau \end{pmatrix}.$$

위 행렬의 원소들은

$$\begin{aligned} \iota'\iota &= T, \quad \tau'\tau = T(T+1)(2T+1)/6, \quad \iota'V\iota = T(1-\theta)^2 + 2\theta \\ \tau'V\tau &= T(T+1)\{(2T+1)(1-\theta)^2 + 6\theta\}/6, \quad \iota'V^{-1}\iota = p(\theta,T), \quad \tau'V^{-1}\tau = l(\theta,T). \end{aligned}$$

여기서 Lemma 2를 이용하면 다음이 성립된다.

$$\begin{aligned} tr(\widehat{V}_1) &= \frac{\iota'\iota\Big\{\tau'V\tau - \frac{1}{4}(T+1)^2\iota'V\iota\Big\} + \iota'V\iota\Big\{\tau'\tau - \frac{1}{4}(T+1)^2\iota'\iota\Big\}}{\iota'\iota\Big\{\tau'\tau - \frac{1}{4}(T+1)^2\iota'\iota\Big\}} = \frac{q(\theta,T)}{T} \\ tr(\widetilde{V}_1) &= \frac{\iota'\iota\Big\{\tau'V^{-1}\tau - \frac{1}{4}(T+1)^2\iota'V^{-1}\iota\Big\} + \iota'V^{-1}\iota\Big\{\tau'\tau - \frac{1}{4}(T+1)^2\iota'\iota\Big\}}{\iota'V^{-1}\iota\Big\{\tau'\tau - \frac{1}{4}(T+1)^2\iota'\iota\Big\}} \\ &= \frac{T}{p(\theta,T)}\left\{1 + \frac{(T^2-1)p(\theta,T)}{12l(\theta,T) - 3(T+1)^2p(\theta,T)}\right\} \\ tr(\widetilde{V}_2) &= T\Big\{1 + \frac{(T+1)^2}{2}\Big\}s(\theta,T) + \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}t(\theta,T) \\ tr(\widetilde{V}_3) &= T\Big\{1 + \frac{(T+1)^2}{2}\Big\}v(\theta,T) + \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}u(\theta,T) \end{aligned}$$

참고문헌

[1] Anderson, T.W. (1948). On the theory of testing serial correlation. *Skandinavisk Aktuarietidskrift.* Vol. 31, 88-116.

[2] Anderson, T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series.* John Wiley, New York.

[3] Anderson, T.W. (1972). Efficient estimation of regression coefficients in time series. *Proceedings of the Sixth Berkley Symposium on Mathmatical Statistics and Probability.* (Vol. 1). eds. L.M. Lecam. J. Neyman and E. Scott, University of Califonia Press, Berkley, 471-481.

[4] Baksalary, J.K. and Eijnsbergen, V. (1988). A comparison of two criteria for ordinary least-squares estimator to be best linear unbiased estimators. *The American Statistician.* Vol. 42, 205-208.

[5] Balestra, P. (1980). A note on the exact transfomation associated with the first order moving average process. *Journal of Econometrics.* Vol 14, 381-394.

[6] Baltagi, B.H.(1989). Applications of a necessary and sufficient condition for OLS to be BLUE. *Statistics and Probability Letters.* Vol. 8, 457-461.

[7] Bloomfield, P. and Watson, G.S. (1975). The inefficiency of least squares. *Biometrika*. Vol. 62, 121-128.

[8] Chipman, J.S. (1979). Efficiency of least squares estimation of linear trend when residuals are autocorrelated. *Econometrica*. Vol. 47, 115-128.

[9] Choudhury, A.H. and R.D. St. Louis (1990). A note on Park and Heikes'(1983) modified approximate estimator for the first order moving average process. *Journal of Econometrics*. Vol 46, 399-406.

[10] Choudhury, A.H. (1994). Untransformed first observation problem in regression model with moving average process. *Communications in Statistics, Theory and Method*. Vol 23, 2927-2937.

[11] Doran, H.E. (1981). Omission of an observation from a regression analysis. *Journal of Econometrics*. Vol. 16, 367-374.

[12] Greene, W.H. (1997). *Econometric Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey.

[13] Iwasaki, M. (1987). Efficiency of least squares in a linear model with autocorrelated disturbances. *Statistical Theory and Data Analysis II*. K. Matusita, North Hollad 511-523.

[14] Jeske, R., (1993). Relative Effizienz von OLS bei linearem Trend und autokorrelierten Störgrößen. *Technical Report* # 93-1. University of Konstanz, Konstanz.

[15] Jeske, R., Busse, G. and Krämer, W. (1994). Efficiency of least squares estimation of linear trend when residuals are autocorrelated. *Economices Letters*. Vol. 47,115-128.

[16] Jeske, R., Song, S.H., Bütefisch, T. (1996). The efficiency of sample mean in the linear regression models when errors follow a first-order moving average processes. *Economics Letters*. Vol. 52, 235-240.

[17] Judge, G.G., Griffiths, W.E., Hill, R.C., Lütkepohl, H. and Lee, T.C. 1985). *The Theory and Practice of Econometrics*. John Wiley, New York.

[18] Knott, M. (1975). On the minimum efficiency of least squares. *Biometrika*. Vol. 62, 129-132.

[19] Krämer, W. (1980). Finite sample efficiency of ordinary least squares in the linear regression model with autocorrelated errors. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 75, 1005-1009.

[20] Krämer, W. (1982). Note on estimating linear trend when residuals are autocorrelated. *Econometrica*. Vol. 50, 1065-1067.

[21] Kruskal, W. (1968). When are Gauss-Markov and least squares estimators identical? A coordinate-free approach. *The Annals of Mathematical Statistics.* Vol. 39, 70-75.

[22] Lee S.H. (1993). Necessary and sufficienct conditions for the equality between the two best linear unbiased estimator and their applications. *The Korean Journal of Applied Statistics.* Vol. 6, 95-103.

[23] Maeshiro, A. (1976). Autoregressive transformation, trended independent variables and autocorrelated disturbance terms. *Review of Economics and Statistics.* Vol. 58, 497-500.

[24] Maeshiro, A. (1980). Autocorrelation and trended explanatory variables: A reply. *Review of Economic and Statistics.* Vol. 62, 487-489.

[25] McEloy, F.W. (1967). A necessary and sufficient condition that ordinary least squares estimators be best linear unbiased. *Journal of the American Statistical Association.* Vol. 62, 1302-1304.

[26] Milliken, G.A. and Albohali, M.(1984) On necessary and sufficient conditions for ordinary least squares estimators to be best linear unbiased estimators. *The American Statistician.* Vol. 38, 298-299.

[27] Park, C.Y. and R.G. Heikes (1983). A note on Balestra's(1980) approximate estimator for the first order moving average process. *Journal of Econometrics.* Vol. 21, 387-388.

[28] Porier, D.J. (1978). The effect of first observation in regression models with first order autoregressive disturbances. *Applied Statistics.* Vol. 27, 67-68.

[29] Puntanen, S. and Styan, G.P.H. (1989). The equality of the ordinary least squares esimator and the best linear unbiased estimator. *The American Statistician.* Vol. 43, 153-163.

[30] Puterman, M.L. (1988). Leverage and influence in autocorrelated regressionmodels. *Applied Statistics.* Vol. 37, 76-86.

[31] Rao, C.R. (1985). The inefficiency of least squares: extentions of the Kantorovich inequality. *Linear Algebla and its Application.* Vol. 70, 253-272.

[32] Shiller, R.J. (1981). Do stock prices more too much to be justified by subsequent changes in individuals ? *American Economic Review.* Vol. 71, 421-436.

[33] Song, S.H. and Park, Y.S. (1997). Pitfalls in the application of the COTE in a linear regression model with seasonal data. *The Korean Communications in Statistics.* Vol. 4/1, 353-358.

[34] Thornton, D.L. (1987). A note on the efficiency of the cochrane orcutt estimator of the

[7] Bloomfield, P. and Watson, G.S. (1975). The inefficiency of least squares. *Biometrika.* Vol. 62, 121-128.

[8] Chipman, J.S. (1979). Efficiency of least squares estimation of linear trend when residuals are autocorrelated. *Econometrica.* Vol. 47, 115-128.

[9] Choudhury, A.H. and R.D. St. Louis (1990). A note on Park and Heikes'(1983) modified approximate estimator for the first order moving average process. *Journal of Econometrics.* Vol 46, 399-406.

[10] Choudhury, A.H. (1994). Untransformed first observation problem in regression model with moving average process. *Communications in Statistics, Theory and Method.* Vol 23, 2927-2937.

[11] Doran, H.E. (1981). Omission of an observation from a regression analysis. *Journal of Econometrics.* Vol. 16, 367-374.

[12] Greene, W.H. (1997). *Econometric Analysis.* Prentice-Hall, New Jersey.

[13] Iwasaki, M. (1987). Efficiency of least squares in a linear model with autocorrelated disturbances. *Statistical Theory and Data Analysis II.* K, Matusita, North Hollad 511-523.

[14] Jeske, R., (1993). Relative Effizienz von OLS bei linearem Trend und autokorrelierten Störgrößen. *Technical Report # 93-1.* University of Konstanz, Konstanz.

[15] Jeske, R., Busse, G. and Krämer, W. (1994). Efficiency of least squares estimation of linear trend when residuals are autocorrelated. *Economices Letters.* Vol. 47,115-128.

[16] Jeske, R., Song, S.H., Bütefisch, T. (1996). The efficiency of sample mean in the linear regression models when errors follow a first-order moving average processes. *Economics Letters.* Vol. 52, 235-240.

[17] Judge, G.G., Griffiths, W.E., Hill, R.C., Lütkepohl, H. and Lee, T.C. 1985). *The Theory and Practice of Econometrics.* John Wiley, New York.

[18] Knott, M. (1975). On the minimum efficiency of least squares. *Biometrika.* Vol. 62, 129-132.

[19] Krämer, W. (1980). Finite sample efficiency of ordinary least squares in the linear regression model with autocorrelated errors. *Journal of the American Statistical Association.* Vol. 75, 1005-1009.

[20] Krämer, W. (1982). Note on estimating linear trend when residuals are autocorrelated. *Econometrica.* Vol. 50, 1065-1067.

[21] Kruskal, W. (1968). When are Gauss-Markov and least squares estimators identical? A coordinate-free approach. *The Annals of Mathematical Statistics.* Vol. 39, 70-75.

[22] Lee S.H. (1993). Necessary and sufficienct conditions for the equality between the two best linear unbiased estimator and their applications. *The Korean Journal of Applied Statistics.* Vol. 6, 95-103.

[23] Maeshiro, A. (1976). Autoregressive transformation, trended independent variables and autocorrelated disturbance terms. *Review of Economics and Statistics.* Vol. 58, 497-500.

[24] Maeshiro, A. (1980). Autocorrelation and trended explanatory variables: A reply. *Review of Economic and Statistics.* Vol. 62, 487-489.

[25] McEloy, F.W. (1967). A necessary and sufficient condition that ordinary least squares estimators be best linear unbiased. *Journal of the American Statistical Association.* Vol. 62, 1302-1304.

[26] Milliken, G.A. and Albohali, M.(1984) On necessary and sufficient conditions for ordinary least squares estimators to be best linear unbiased estimators. *The American Statistician.* Vol. 38, 298-299.

[27] Park, C.Y. and R.G. Heikes (1983). A note on Balestra's(1980) approximate estimator for the first order moving average process. *Journal of Econometrics.* Vol. 21, 387-388.

[28] Porier, D.J. (1978). The effect of first observation in regression models with first order autoregressive disturbances. *Applied Statistics.* Vol. 27, 67-68.

[29] Puntanen, S. and Styan, G.P.H. (1989). The equality of the ordinary least squares esimator and the best linear unbiased estimator. *The American Statistician.* Vol. 43, 153-163.

[30] Puterman, M.L. (1988). Leverage and influence in autocorrelated regressionmodels. *Applied Statistics.* Vol. 37, 76-86.

[31] Rao, C.R. (1985). The inefficiency of least squares: extentions of the Kantorovich inequality. *Linear Algebla and its Application.* Vol. 70, 253-272.

[32] Shiller, R.J. (1981). Do stock prices more too much to be justified by subsequent changes in individuals ? *American Economic Review.* Vol. 71, 421-436.

[33] Song, S.H. and Park, Y.S. (1997). Pitfalls in the application of the COTE in a linear regression model with seasonal data. *The Korean Communications in Statistics.* Vol. 4/1, 353-358.

[34] Thornton, D.L. (1987). A note on the efficiency of the cochrane orcutt estimator of the

AR(1) regression model. *Journal of Econometrics.* Vol. 36, 369-376.

[35] Zyskind, G. (1967). On canonical forms, non-negative covariance matrices and best and simple least squares linear estimators in linear models. *The Annals of Mathematical Statistics.* Vol. 38, 1092-1109.

[36] Zyskind, G. (1969). Parametric augmentations and error structures under which certain simple least squares and analysis of variance procedures are also best. *Journal of the American Statistical Association.* Vol. 64, 1353-1368.

[1998년 5월 접수, 1998년 10월 최종수정]

Efficient Estimation of Regression Coefficients in Regression Model with Moving Average Process

Seuck-Heun Song [1], Jong-Hyup Lee [2] Kee-Whan Kim [3]

ABSTRACT

In this paper it is shown that, when the disturbances in a linear regtression model follow a MA(1)-process, there exist cases where the OLSE has superior performance to the approximate procedures developed by Balestra(1980), Park and Heikes(1983), Choudhury and Louis(1990), Choudhury(1994) for small sample size when the value of moving average parameter, θ, is negative. Given a fixed design matrix X, we derive efficiency functions for the OLSE relative to the various estimator of the regression coefficients.

1) Dept of Statistics, Duksung Women's University, Seoul 136-742, Korea
2) Dept of Statistics, Sungshin Women's University, Seoul 132-714, Korea
3) Dept of Statistics, Korea University, Seoul 136-701, Korea