응용통계연구 제 12권 1호, 1999년, pp. 45-65

공정능력지수 C_{pk}에 대한 보다 나은 비모수적 붓스트랩 신뢰구간에 관한 연구 *

조중재[1), 김주성[2), 박병선[3)

요 약

공정능력지수 C_{pk}는 제조공정이 제품을 제대로 생산하고 있는지를 평가하기 위하여 널리 사용되고 있는 측도이다. 최근까지 공정능력지수 C_{pk}에 관한 추정문제들이 많이 연구되었는 바, 대부분의 이러한 연구들은 공정분포가 정규분포임을 가정하였다. 하지만 실제 품질관리 현장의 공정으로부터 얻어지는 특성치들이 정규분포를 따르지 않는 경우가 많이 발생하며, 이를 감지하기가 어려울 수 있다. 따라서 본 논문에서는 공정능력지수 C_{pk}에 대한 바람직한 구간추정 방법을 제안하기 위하여 6가지 형태의 비모수적인 붓스트랩 신뢰구간을 설정하고, 세 가지 공정분포에 대하여 다양하고 포괄적인 모의실험을 통하여 그 효율성에 관하여 비교연구를 하였다.

1. 서론

공정능력지수 C_{pk}는 품질과 생산성의 지속적인 향상을 위해 공정평가 등의 공업통계학 분야에서 지수 C_p와 함께 꾸준히 이용되고 있는 관심모수이다. 또한 붓스트랩은 고성능 컴퓨터의 등장으로 많은 관심을 갖는 중요한 비모수 통계적 고급기법이다. 붓스트랩 방법은 고성능 컴퓨터가 사용되면서 각광을 받기 시작하였는 바, Efron(1979)과 Beran(1984)등이 여러 통계학 분야에 전반적으로 사용하기 시작하였 다. Diciccio와 Tibshirani(1987)는 붓스트랩 신뢰구간과 붓스트랩 근사를 그리고 Hall(1988)은 여러 가지 붓스트랩 신뢰구간들을 이론적으로 폭넓게 비교·연구하였다. 공정능력지수들과 관련된 연구결과로는 Kane(1986), Boyles(1991), Rodriguez(1992), Kotz와 Johnson(1993)를 들 수 있다. 특히, Kotz와 Johnson(1993)은 기존 연구결과들을 로버스트 문제, 다변량 공정능력지수까지 체계적으로 정리하였다. 또한 Rodriguez(1992)는 공정능력분석에 대하여 붓스트랩을 포함한 체계적인 연구결과를 제시하고 붓스트랩 극한분포 이론들이 아직 연구되지 않았음을 지적하였다. 이에 최근들어 Cho, Han과 Jo(1997)은 여러가지 공정능력지수들에 대한 붓스트랩 구간 추정시 요구되는 이론적인 정당성을 위한 붓스트랩 방법의 일치성 을 확립하였다. 마지막으로 붓스트랩 관련 공정능력지수들에 대한 구간추정 연구결과들로서 Franklin와 Wasserman(1991,1992)는 공정능력지수 C_{pk}에 대한 신뢰구간과 공정능력지수들 C_p, C_{pk}, C_{pm}에 대한 하한 신뢰한계에 대해서 3가지 붓스트랩 방법 즉, SB, PB, BCPB를 기초로 포괄적으로

* 이 논문은 1997년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.
1) (361-763) 청주시 흥덕구 개신동 산 48, 충북대학교 자연과학대학 통계학과, 교수
2) (361-763) 청주시 흥덕구 개신동 산 48, 충북대학교 자연과학대학 통계학과, 교수
3) (361-763) 청주시 흥덕구 개신동 산 48, 충북대학교 대학원, 박사과정

비교·연구하였다 (본 논문에서 언급될 6가지 방법들은 2절 붓스트랩 방법편에 설명되어 있음). 그리고 Nam과 Park(1995) 는 공정능력지수들 $C_p, C_{pk}, C_{pm}, C_{pmk}$에 대한 신뢰구간에 대해 3가지 붓스트랩 방법, 즉 SB, PB, STUD를 바탕으로 비교·연구하였다.

위와 같은 국내외 다양한 연구배경을 바탕으로 대표본인 경우 공정능력지수C_{pk}에 대한 보다 나은 구간추정을 위하여 6가지 붓스트랩 방법 SB, STUD, HYB, BACK, BC, ABC들을 컴퓨터 모의실험을 통해 포괄적으로 비교 · 분석하여 보다 효율적인 붓스트랩 신뢰구간 추정방법을 제안하고자 한다.

2. 여러가지 붓스트랩 신뢰구간 설정 방법

공정평균 μ와 공정분산 σ^2인 분포로 부터의 특성치 $X_1, X_2, \cdots, X_n$에 대하여 공정능력지수 C_{pk}와 플러그 인(plug-in) 추정량 $\hat{C}_{pk}$는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} C_{pk} &= min\left(\frac{USL-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-LSL}{3\sigma}\right) \\ &= \frac{d-|\mu-M|}{3\sigma} \\ \hat{C}_{pk} &= \frac{d-|\bar{X}-M|}{3S} \end{aligned}$$

단, USL과 LSL은 각각 규격상한과 규격하한을 뜻한다. 또한 $d=(USL-LSL)/2$로 그리고 $M=(USL+LSL)/2$로 정의한다. 물론 표본평균 $\bar{X}$는 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$이고 표본분산 S^2은 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$로 정의한다.

한편 공정으로부터 취해질 n개의 확률표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$에 대하여 복원추출 방법에 의해 얻어지는 크기가 n인 붓스트랩 표본을 $X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$라 하자. 이 때 추출가능한 붓스트랩 표본의 총 수는 n^n개이다. 이러한 붓스트랩 표본들로부터 다음과 같은 공정능력지수 C_{pk}의 붓스트랩 추정량 $\hat{C}_{pk}^*$을 얻을 수 있다.

$$\hat{C}_{pk}^* = \frac{d-|\bar{X}^*-M|}{3S^*}, \qquad \text{LSL} < \bar{X}^* < \text{USL}$$

여기서 $\bar{X}^*$와 S^*는 각각 붓스트랩 표본평균과 표본 표준편차로 다음과 같이 계산된다.

$$\bar{X}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^*, \qquad S^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^*-\bar{X}^*)^2}$$

이 때 n^n개의 붓스트랩 추정량들이 계산 가능하며, 이들은 추정량 $\hat{C}_{pk}$의 붓스트랩 분포의 구성요소가 될 것이다. 실제로 $\hat{C}_{pk}$의 붓스트랩 분포는 $n=10$인 소표본의 경우일 지라도 $n^n=10,000,000,000$개의 C_{pk}^* 값들을 고려할 수 있을 것이다. 하지만 Efron과 Tibshirani (1986)은 합리적으로 정확한 신뢰구간 추정량들을 계산하기 위해서는 최소한 1000개의 붓스트랩 표본이면 대개 충분하다고 논하였다.

한편, 여러가지 붓스트랩 신뢰구간들을 설정시 필요한 이론적 배경인 붓스트랩 방법의 일치성이 확립되었다 (Cho, Han과 Jo(1997)의 Theorem1과 Theorem2 혹은 Corollary1과 Corollary3).

본 절에서는 이러한 붓스트랩 통계량을 기초로 붓스트랩 방법의 일치성에 근거하여 공정능력지수 C_{pk}에 대한 6가지 형태의 붓스트랩 신뢰구간을 설정하고, $B = 1000$개의 붓스트랩 표본으로부터 $B = 1000$개의 붓스트랩 추정치 $\hat{C}^*_{pk}$들을 계산할 것이다. 또한 $(1-2\alpha)$ 양측 신뢰구간을 설정할 것이지만, $(1-\alpha)$ 단측 신뢰구간은 단지 양측 신뢰구간의 하한만을 이용하여 설정할 것이다.

2.1. 표준 붓스트랩 방법(SB; Standard Bootstrap Method)

먼저 B개의 붓스트랩 추정치 $\hat{C}^*_{pk}(i)$들의 표본평균 $\hat{C}^*_{pk}(\cdot)$과 표본 표준편차 S^*_{pk}를 각각 다음과 같이 계산한다.

$$\hat{C}^*_{pk}(\cdot) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{C}^*_i, \qquad S^*_{pk} = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}\{\hat{C}^*_{pk}(i) - \hat{C}^*_{pk}(\cdot)\}^2}$$

그러면 공정능력지수 C_{pk}에 대한 붓스트랩 방법의 일치성을 고려하여, C_{pk}에 대한 $(1-2\alpha)100\%$ 표준 붓스트랩 신뢰구간을 다음과 같이 설정할 수 있을 것이다.

$$(\hat{C}_{pk} - z_{1-\alpha}S^*_{pk},\ \hat{C}_{pk} + z_{1-\alpha}S^*_{pk})$$

단, $z_{1-\alpha}$는 표준정규분포의 하위 $100(1-\alpha)\%$ 백분위수를 나타낸다.

2.2. 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD; Studentized Bootstrap Method)

스튜던트화 붓스트랩 방법은 $\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk} - \hat{C}_{pk})/\hat{\sigma}^*_{pk}$의 분포로부터 백분위 지점을 찾아 신뢰구간을 설정 하는 것이다. 공정능력지수 C_{pk}에 대한 $(1-2\alpha)100\%$ 스튜던트화 붓스트랩 신뢰구간은 공정평균 μ의 위치에 따라 세 가지 경우로 설정할 수 있으며, 역시 붓스트랩 방법의 일치성을 고려하여 다음과 같이 설정할 수 있다(Cho, Han과 Jo(1997) 참조).

$$\text{(i) LSL} < \mu < M, \qquad \left(\hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}'_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{y}'_{pk,1-\alpha},\ \hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}'_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{y}'_{pk,\alpha}\right)$$

$$\text{(ii) } \mu = M, \qquad \left(\hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{y}_{pk,1-\alpha},\ \hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{y}_{pk,\alpha}\right)$$

$$\text{(iii) } M < \mu < \text{USL}, \qquad \left(\hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}''_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{y}''_{pk,1-\alpha},\ \hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}''_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{y}''_{pk,\alpha}\right)$$

여기서

$$\hat{\sigma}'_{pk} = \left[\frac{1}{9} - \frac{\hat{\mu}_3\{d-(M-\bar{X})\}}{9S^4} - \frac{(\hat{\mu}_4 - S^4)\{d-(M-\bar{X})\}^2}{36S^6}\right]^{1/2} \tag{2.1}$$

$$\hat{\sigma}_{pk} = \left[\frac{(\hat{\mu}_4 - S^4)d^2}{36S^6}\right]^{1/2} \tag{2.2}$$

$$\hat{\sigma}''_{pk} = \left[\frac{1}{9} + \frac{\hat{\mu}_3\{d-(\bar{X}-M)\}}{9S^4} + \frac{(\hat{\mu}_4 - S^4)\{d-(\bar{X}-M)\}^2}{36S^6}\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

이고, $\hat{y}'_{pk,\alpha}$, $\hat{y}_{pk,\alpha}$과 $\hat{y}''_{pk,\alpha}$는 각각 다음을 만족하는 값이다. 또한 3차 중심적률 $\mu_3 = E(X-\mu)^3$와 4차 중심적률 $\mu_4 = E(X-\mu)^4$의 플러그 인(plug-in) 추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^3$$

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^4$$

그리고 $\hat{y}'_{pk,\alpha}$, $\hat{y}_{pk,\alpha}$과 $\hat{y}''_{pk,\alpha}$는 각각 다음을 만족하는 값이다.

$$Pr\left\{\frac{\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk} - \hat{C}_{pk})}{\hat{\sigma}^{*\prime}_{pk}} \le \hat{y}'_{pk,\alpha}\right\} = \alpha$$

$$Pr\left\{\frac{\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk} - \hat{C}_{pk})}{\hat{\sigma}^{*}_{pk}} \le \hat{y}_{pk,\alpha}\right\} = \alpha$$

$$Pr\left\{\frac{\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk} - \hat{C}_{pk})}{\hat{\sigma}^{*\prime\prime}_{pk}} \le \hat{y}''_{pk,\alpha}\right\} = \alpha$$

이 때 $\hat{\sigma}^{*\prime}_{pk}$, $\hat{\sigma}^{*}_{pk}$과 $\hat{\sigma}^{*\prime\prime}_{pk}$는 각각 $\hat{\sigma}'_{pk}$; $\hat{\sigma}_{pk}$과 $\hat{\sigma}''_{pk}$에 대응하는 붓스트랩 버전이다.

2.3. 하이브리드 붓스트랩 방법(HYB; Hybrid Bootstrap Method)

하이브리드 붓스트랩 방법은 $\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk} - \hat{C}_{pk})/\hat{\sigma}_{pk}$의 분포로부터 백분위 지점을 찾아 신뢰 구간을 설정하는 것이다. 스튜던트화 붓스트랩 방법에서와 마찬가지로, C_{pk}에 대한 $(1-2\alpha)100\%$ 하이브리드 붓스트랩 신뢰구간도 역시 공정평균 μ의 위치에 따라 다음과 같은 세 가지 경우로 설정할 수 있을 것이다.

$$\text{(i) LSL} < \mu < M, \qquad \left(\hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}'_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}'_{pk,1-\alpha},\ \hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}'_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}'_{pk,\alpha}\right)$$

$$\text{(ii) } \mu = M, \qquad \left(\hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}_{pk,1-\alpha},\ \hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}_{pk,\alpha}\right)$$

$$\text{(iii) } M < \mu < \text{USL}, \qquad \left(\hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}''_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}''_{pk,1-\alpha},\ \hat{C}_{pk} - \frac{\hat{\sigma}''_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}''_{pk,\alpha}\right)$$

여기서 $\hat{\sigma}'_{pk}, \hat{\sigma}_{pk}$과 $\hat{\sigma}''_{pk}$은 각각 식 (2.1), (2.2), (2.3)에 주어져 있으며, $\hat{x}'_{pk,\alpha}, \hat{x}_{pk,\alpha}$과 $\hat{x}''_{pk,\alpha}$은 각각 다음을 만족하는 값이다.

$$Pr\left\{\frac{\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk}-\hat{C}_{pk})}{\hat{\sigma}'_{pk}} \le \hat{x}'_{pk,\alpha}\right\} = \alpha \tag{2.4}$$

$$Pr\left\{\frac{\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk}-\hat{C}_{pk})}{\hat{\sigma}_{pk}} \le \hat{x}_{pk,\alpha}\right\} = \alpha \tag{2.5}$$

$$Pr\left\{\frac{\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk}-\hat{C}_{pk})}{\hat{\sigma}''_{pk}} \le \hat{x}''_{pk,\alpha}\right\} = \alpha \tag{2.6}$$

2.4. 후향 붓스트랩 방법(BACK; Backward Bootstrap Method)

후향 붓스트랩 방법은 스튜던트화 붓스트랩 방법에서 $\hat{y}_{1-\alpha}$를 $-\hat{x}_{\alpha}$로 대체하여 사용하는 방법이다. C_{pk}에 대한 $(1-2\alpha)100\%$ 후향 붓스트랩 신뢰구간은 공정평균 μ의 위치에 따라 다음과 같이 세가지 경우로 설정할 수 있을 것이다.

(i) $\mathrm{LSL} < \mu < M$, $\quad \left(\hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}'_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}'_{pk,\alpha},\ \hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}'_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}'_{pk,1-\alpha}\right)$

(ii) $\mu = M$, $\quad \left(\hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}_{pk,\alpha},\ \hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}_{pk,1-\alpha}\right)$

(iii) $M < \mu < \mathrm{USL}$, $\quad \left(\hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}''_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}''_{pk,\alpha},\ \hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}''_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}''_{pk,1-\alpha}\right)$

여기서 $\hat{x}'_{pk,\alpha}, \hat{x}_{pk,\alpha}$과 $\hat{x}''_{pk,\alpha}$은 각각 식 (2.4), (2.5), (2.6)을 만족하는 값이고, $\hat{\sigma}'_{pk}, \hat{\sigma}_{pk}$과 $\hat{\sigma}''_{pk}$은 각각 식 (2.1), (2.2), (2.3)에 주어져 있다.

2.5. 편의가 수정된 붓스트랩 방법(BC;Bias-Corrected Bootstrap Method)

이 방법은 후향 붓스트랩 방법에서의 $\hat{x}_{\alpha}$와 $\hat{x}_{1-\alpha}$ 대신에 각각 $\hat{x}_{\hat{\beta}_L}$과 $\hat{x}_{\hat{\beta}_U}$를 사용하여 붓스트랩 분포 $\sqrt{n}(\hat{C}^*_{pk}-\hat{C}_{pk})/\hat{\sigma}_{pk}$의 편의를 수정한 방법이다. 공정평균 μ의 위치에 따라 공정능력지수 C_{pk}에 대한 $(1-2\alpha)100\%$ 편의가 수정된 붓스트랩 신뢰구간은 다음과 같이 설정할 수 있을 것이다.

(i) $\mathrm{LSL} < \mu < M$, $\quad \left(\hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}'_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}'_{\hat{\beta}_L},\ \hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}'_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}'_{\hat{\beta}_U}\right)$

(ii) $\mu = M$, $\quad \left(\hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}_{\hat{\beta}_L},\ \hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}_{\hat{\beta}_U}\right)$

(iii) $M < \mu < \mathrm{USL}$, $\quad \left(\hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}''_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}''_{\hat{\beta}_L},\ \hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}''_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}''_{\hat{\beta}_U}\right)$

여기서 $\hat{\beta}_L = \Phi(z_{\alpha}+2z_0), \hat{\beta}_U = \Phi(z_{1-\alpha}+2z_0), z_0 = \Phi^{-1}(p_0)$이고 $p_0 = Pr\{\hat{C}^*_{pk} \le \hat{c}_{pk}|\mathcal{X}_n\}$이다. 또한 χ_n은 $\chi_n = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$을 의미한다.

2.6. 편의가 촉진 수정된 붓스트랩 방법(ABC; Accelerated Bias-Corrected)

이 방법은 후향 붓스트랩 방법에서의 $\hat{x}_\alpha$와 $\hat{x}_{1-\alpha}$ 대신에 각각 $\hat{x}_{\hat{\beta}_{aL}}$과 $\hat{x}_{\hat{\beta}_{aU}}$를 사용하는 것으로, 공정평균 μ의 위치에 따라 공정능력지수 C_{pk}에 대한 $(1-2\alpha)100\%$ 편의가 촉진 수정된 붓스트랩 신뢰구간은 다음과 같이 설정할 수 있을 것이다.

$$\text{(i) LSL} < \mu < M, \qquad \left(\hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}'_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}'_{\hat{\beta}_{aL}},\ \hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}'_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}'_{\hat{\beta}_{aU}}\right)$$

$$\text{(ii) } \mu = M, \qquad \left(\hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}_{\hat{\beta}_{aL}},\ \hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}_{\hat{\beta}_{aU}}\right)$$

$$\text{(iii) } M < \mu < \text{USL}, \qquad \left(\hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}''_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}''_{\hat{\beta}_{aL}},\ \hat{C}_{pk} + \frac{\hat{\sigma}''_{pk}}{\sqrt{n}}\hat{x}''_{\hat{\beta}_{aU}}\right)$$

여기서 $\hat{\beta}_{aL}$과 $\hat{\beta}_{aU}$는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{aL} &= \Phi(z_\alpha + 2z_0 + \hat{a}z_\alpha^2)\\ \hat{\beta}_{aU} &= \Phi(z_{1-\alpha} + 2z_0 + \hat{a}z_{1-\alpha}^2)\end{aligned}$$

이 때 $\hat{a}$는

$$\hat{a} = \frac{1}{6\sqrt{n}\hat{\sigma}_{pk}^3}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\hat{a}_i\hat{a}_j\hat{a}_k\hat{\mu}_{ijk}$$

단,

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \frac{(\text{USL}-\text{LSL})\bar{X}}{6S^3}, \qquad \hat{a}_2 = -\frac{\text{USL}-\text{LSL}}{12S^3},\\ \hat{\mu}_{111} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^3, \qquad \hat{\mu}_{112} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2(Y_i-\bar{Y})\\ \hat{\mu}_{122} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})^2\\ \hat{\mu}_{222} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^3, \qquad Y_i = X_i^2,\ \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\\ \hat{\mu}_{121} &= \hat{\mu}_{211} = \hat{\mu}_{112}, \qquad \hat{\mu}_{212} = \hat{\mu}_{221} = \hat{\mu}_{122}\end{aligned}$$

3. 모의실험 연구

앞 절에서 제시한 공정능력지수 C_{pk}에 대한 6가지 형태의 붓스트랩 신뢰구간의 수행결과를 비교하기 위하여 FORTRAN 프로그램 언어와 IMSL 서브 루틴을 사용, 포괄적이고 다양한 모의실험을 수행하였다.

우선 모의실험을 수행함에 있어, Franklin & Wasserman(1992)의 연구결과와의 비교를 효율적으로 하기 위하여 규격상한 USL과 규격하한 LSL은 각각 60과 40을 사용하였다. 그

리고 공정 평균 μ와 공정 표준편차 σ는 다양한 공정의 상태를 고려하기 위하여 네 쌍의 (μ,σ), 즉 (50,2), (52,2), (50,3), (52,3)으로 선택하였다. 실제로 각 쌍의 (μ,σ)에 대한 지수 C_{pk}의 참값은 1.667, 1.333, 1.111, 0.889로 매우 양호한 상태의 공정($C_{pk} > 1.5$)으로부터 불량한 상태의 공정($C_{pk} < 1.0$)을 나타낸다. 각 쌍의 (μ,σ)에 대하여, 표본의 크기 n은 10, 20, 40, 60를 사용하였으며, 붓스트랩 표본크기 m은 모의실험의 편리성을 위하여 n과 동일한 값을 사용하였다. 공정의 분포는 공정능력지수에 관한 통계적인 추론에서 기본적으로 가정하고 있는 정규분포, 치우침이 심한 분포로 자유도가 5인 카이제곱 분포와 꼬리가 두터운 분포로 자유도가 5인 스튜던트 t분포를 사용하였다. 공정의 분포로 이러한 치우침이 심한 분포와 두터운 꼬리를 갖는 분포를 고려한 이유는, Gunter(1989)가 지적했듯이 이러한 분포들이 실제로 품질관리 현장에서 빈번하게 발생하기 때문이다. 특히 공정의 분포가 카이제곱 분포와 스튜던트 t분포인 경우에 대하여, 설정된 공정평균 μ와 공정 표준편차 σ를 갖도록 하기 위하여 다음과 같은 변환을 하였다.

$$
\begin{aligned}
X &\sim \chi^2(5) \Longrightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{10}}X + \mu - \frac{5\sigma}{\sqrt{10}} \\
X &\sim t(5) \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{5}}X + \mu
\end{aligned}
$$

3.1. 모의실험 절차

각각의 공정분포에 대하여, 표본크기 n, 공정 평균 μ, 그리고 공정 표준편차 σ로 이루어지는 한 번의 모의실험 절차는 다음과 같다.

- 1단계 : 평균이 μ이고 표준편차가 σ인 공정분포로부터 크기가 $n(=20,40,60)$인 원래의 표본을 추출한 후, 이 원래의 표본으로부터 각각 붓스트랩 표본의 크기가 $m(=n)$인 $B(=1000)$개의 붓스트랩 표본들을 생성한다.
- 2단계 : 1단계에서 생성된 표본들을 이용하여, 공정능력지수 C_{pk}에 대한 6가지 형태의 95% 붓스트랩 하한 신뢰구간과 90% 양측 붓스트랩 신뢰구간을 설정한다.
- 3단계 : 2단계에서 설정된 신뢰구간 안에 C_{pk}의 참값이 포함되는지를 결정한다.

위의 3단계로 이루어진 한 번의 모의실험 절차를 $N(=1000)$번 반복한다. 이로부터 95% 붓스트랩 하한 신뢰구간과 90% 양측 붓스트랩 신뢰구간 안에 실제 C_{pk}의 참값이 포함되는 횟수의 비율을 계산하였다. 특히 90% 양측 붓스트랩 신뢰구간에 대해서는 평균 구간길이와 구간길이의 표준편차도 함께 구하였다.

3.2. 모의실험 결과분석

앞에서 소개한 모의실험 절차에 의하여 공정능력지수 C_{pk}에 대한 95% 붓스트랩 하한 신뢰구간의 포함비율, 90% 양측 붓스트랩 신뢰구간의 포함비율과 90% 양측 신뢰구간의 평균길이 및 구간길이의 표준편차를 구한 결과가 표 3.1 ~ 표 3.6에 제시되어 있다. 각각의 공정분포에 대한 모의실험 수행결과를 살펴보자.

3.2.1. 공정의 분포가 정규분포인 경우

공정의 분포가 정규분포일 때, 공정능력지수 C_{pk}에 대한 6가지 형태의 붓스트랩 방법에 대한 모의실험 수행결과가 각각 표 3.1 ~ 표 3.2에 있다.

표 3.1의 95% 붓스트랩 하한 신뢰구간의 포함비율의 결과를 살펴보면, 모든 표본크기 n에 대하여 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)이 일관성있게 기대값 0.95에 가까운 값을 갖는 것으로 나타났다. 이 구간에 대한 포함빈도는 $p = 0.95$이고 $N = 1000$인 이항확률변수이므로 포함비율에 대한 99% 신뢰구간을 설정하면 다음과 같다.

$$0.95 \pm 2.576\sqrt{\frac{(0.95)(0.05)}{1000}} \implies (0.933, 0.967)$$

실제로 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)에 대한 16개의 포함비율 중 단지 1개만이 이 범위를 벗어나고 있을 뿐 이 방법에 대한 수행결과가 매우 좋음을 알 수 있다. 다음으로 기대값 0.95에 가까운 포함비율을 갖는 표준 붓스트랩 방법(SB)에 대해서는 16개 중 12개가 이 범위 안에 있다. 두 방법에 대한 포함비율이 모두 이 범위 안에 있음을 알 수 있다. 하이브리드 붓스트랩 방법(HYB)에 대한 결과를 살펴보면, 16개의 포함비율 모두가 0.969 이상으로 기대값 0.95보다 큰 값을 갖으며, 표본크기 n이 증가할 수록 기대값 0.95로 감소하는 경향이 있는 것으로 나타났다. 이와는 대조적으로, 나머지 붓스트랩 방법에 대해서는 모두 기대값 0.95보다 유의하게 낮은 포함비율을 갖는다. 후향 붓스트랩 방법(BACK)에 대하여 16개 중 16개 모두, 편의가 수정된 붓스트랩 방법(BC) 각각에 대하여 16개 중 15개가, 그리고 편의가 촉진 수정된 붓스트랩 방법(ABC)에 대해서는 16개 중 13개가 0.933 보다도 낮은 포함비율을 갖는다. 그 중 편의가 촉진 수정된 붓스트랩 방법(ABC)이 나머지 붓스트랩 방법보다는 높은 포함비율을 갖음을 알 수 있다. 이러한 붓스트랩 방법들은 하이브리드 붓스트랩 방법(HYB)에 대한 결과와는 달리, 모두 표본크기 n이 증가할 수록 기대값 0.95로 증가하는 경향이 있음을 보여준다. 표 3.1의 결과에서, $n \geq 20$일 때 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)은 좋은 수행결과를 보여주었다.

표 3.1의 90% 붓스트랩 신뢰구간의 포함비율에 대한 결과를 살펴보면, 하이브리드 붓스트랩 (HYB) 방법을 제외한 나머지 5가지 붓스트랩 방법들에 대해서는 유사한 결과를 보여준다. $n \geq 20$에 대하여, 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)은 일관성있게 기대값 0.90에 가까운 값으로 수행결과가 좋음을 알 수 있다. 95% 하한 신뢰구간에서와 유사하게 실제 90% 신뢰구간에 대한 99% 신뢰구간은 $(0, 876, 0.924)$이다. 실제로 $n \geq 20$일 때, 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD) 각각에 대한 16개의 모든 포함비율이 이 범위 안에 있는 것으로 나타났다. 하이브리드 붓스트랩 방법(HYB)에 대한 결과는 나머지 3가지 붓스트랩 방법보다는 높은 포함비율을 보여주고 있지만, 표 3.1의 결과와는 달리 그 값들이 모두 0.933보다는 낮은 값으로 대조적인 결과를 보여주고 있다. 그리고 이 방법에 대한 포함비율은 표본크기 n이 증가할 수록 기대값 0.95로 증가하는 경향이 있음을 알 수 있다. 나머지 3가지 붓스트랩 방법들에 대한 포함비율은 모두 기대값 0.90보다 유의하게 낮은 값을 갖는다. 특히 95% 하한 신뢰구간에서 나머지 두 붓스트랩 방법에 비해 높은 포함비율을 갖았던 편의가 촉진 수정된 붓스트랩 방법(ABC)이 90% 붓스트랩 신뢰구간에 대해서는 그리 좋은 결과를 보여주진 못하는 것으로 나타났다.

이러한 붓스트랩 방법들에 대하여, 표본의 크기 n이 증가할 수록 기대값 0.90으로 증가하는 경향이 있음을 알 수 있다.

한편 표 3.2는 90% 붓스트랩 신뢰구간에 대한 평균길이와 신뢰구간 길이의 표준편차에 대한 결과이다. 모든 붓스트랩 신뢰구간에 대하여 평균 구간길이와 구간길이의 표준편차는 표본크기 n이 증가할 수록 감소하며, 이러한 감소폭은 n이 증가할 수록 작았다. 평균 구간길이 측면에서 보면, 기대값에 가까운 포함비율을 가졌던 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)이 가장 길고 편의가 축진 수정된 붓스트랩 방법(ABC)이 가장 짧은 구간길이를 가지며, 이러한 경향은 구간길이의 표준편차 에서도 역시 나타나고 있다. 하지만 $n = 60$에 대하여, 평균 구간길이는 대략 $0.29 \sim 0.52$이고 구간길이의 표준편차는 대략 $0.05 \sim 0.09$으로 모든 붓스트랩 방법에 대하여 큰 차이를 보여주지 않는다.

표 3.1: 95% 하한 신뢰구간과 90% 양측 신뢰구간의 포함비율 : 정규분포

	표본크기(n)					
붓스트랩 방법	20	40	60	20	40	60
($\mu = 50, \sigma = 2$)			C_{pk}=1.667			
SB	0.949	0.949	0.951	0.920	0.909	0.905
STUD	0.940	0.951	0.951	0.890	0.894	0.896
HYB	0.982*	0.974*	0.980*	0.869*	0.869*	0.889
BACK	0.831*	0.877*	0.881*	0.818*	0.855*	0.862*
BC	0.888*	0.919*	0.914*	0.844*	0.863*	0.868*
ABC	0.906*	0.933	0.930*	0.843*	0.862*	0.864*
($\mu = 52, \sigma = 2$)			C_{pk}=1.333			
SB	0.957	0.946	0.950	0.904	0.892	0.896
STUD	0.942	0.944	0.950	0.899	0.889	0.896
HYB	0.988*	0.979*	0.972*	0.842*	0.849*	0.875*
BACK	0.857*	0.871*	0.885*	0.832*	0.846*	0.856*
BC	0.905*	0.918*	0.923*	0.844*	0.856*	0.875*
ABC	0.922*	0.933	0.933	0.824*	0.842*	0.868*
($\mu = 50, \sigma = 3$)			C_{pk}=1.111			
SB	0.946	0.944	0.955	0.905	0.898	0.903
STUD	0.933	0.948	0.960	0.878	0.883	0.886
HYB	0.984*	0.975*	0.974*	0.856*	0.860*	0.857*
BACK	0.813*	0.867*	0.903*	0.805*	0.838*	0.870*
BC	0.875*	0.909*	0.933	0.824*	0.853*	0.870*
ABC	0.890*	0.922*	0.942	0.817*	0.849*	0.860*
($\mu = 52, \sigma = 3$)			C_{pk}=0.889			
SB	0.957	0.949	0.954	0.921	0.896	0.901
STUD	0.941	0.943	0.948	0.910	0.903	0.896
HYB	0.981*	0.973*	0.969*	0.834*	0.862*	0.871*
BACK	0.824*	0.871*	0.907*	0.814*	0.838*	0.871*
BC	0.891*	0.916*	0.921*	0.837*	0.847*	0.868*
ABC	0.912*	0.935	0.939	0.786*	0.830*	0.859*

* 표시는 하한 신뢰구간과 양측신뢰구간의 포함확률이 각각 95%와 90%와는 유의수준 1%로 같다고 할 수 없음을 의미한다.

표 3.2: 90% 붓스트랩 신뢰구간의 평균길이(표준편차) : 정규분포

	표본크기(n)		
붓스트랩 방법	20	40	60
($\mu = 50, \sigma = 2$)		C_{pk}=1.667	
SB	1.035(0.308)	0.651(0.140)	0.523(0.095)
STUD	0.986(0.377)	0.649(0.169)	0.524(0.114)
HYB	0.981(0.286)	0.637(0.136)	0.515(0.093)
BACK	0.981(0.286)	0.637(0.136)	0.515(0.093)
BC	0.844(0.244)	0.593(0.123)	0.499(0.094)
ABC	0.786(0.206)	0.573(0.112)	0.488(0.089)
($\mu = 52, \sigma = 2$)		C_{pk}=1.333	
SB	0.871(0.286)	0.549(0.119)	0.441(0.079)
STUD	0.884(0.338)	0.562(0.147)	0.448(0.097)
HYB	0.828(0.265)	0.538(0.117)	0.435(0.077)
BACK	0.828(0.265)	0.538(0.117)	0.435(0.077)
BC	0.718(0.230)	0.507(0.111)	0.421(0.077)
ABC	0.657(0.191)	0.487(0.101)	0.412(0.073)
($\mu = 50, \sigma = 3$)		C_{pk}=1.111	
SB	0.693(0.198)	0.433(0.096)	0.345(0.065)
STUD	0.665(0.234)	0.429(0.115)	0.347(0.079)
HYB	0.657(0.184)	0.423(0.093)	0.340(0.065)
BACK	0.657(0.184)	0.423(0.093)	0.340(0.065)
BC	0.565(0.156)	0.394(0.084)	0.328(0.063)
ABC	0.526(0.132)	0.382(0.078)	0.321(0.060)
($\mu = 52, \sigma = 3$)		C_{pk}=0.889	
SB	0.596(0.175)	0.386(0.079)	0.311(0.053)
STUD	0.631(0.232)	0.411(0.099)	0.325(0.067)
HYB	0.567(0.163)	0.379(0.077)	0.307(0.053)
BACK	0.567(0.163)	0.379(0.077)	0.307(0.053)
BC	0.493(0.152)	0.360(0.076)	0.300(0.052)
ABC	0.446(0.132)	0.344(0.070)	0.292(0.050)

3.2.2. 공정의 분포가 카이제곱 분포인 경우

공정의 분포가 카이제곱 분포일 때, 공정능력지수 C_{pk}에 대한 6가지 형태의 붓스트랩 방법에 대한 모의실험 수행결과가 각각 표 3.3 ~ 표 3.4에 있다.

표 3.3은 95% 붓스트랩 하한 신뢰구간과 90% 양측신뢰구간의 포함비율에 대한 결과이다. $n \geq 20$인 경우에 대하여, 공정분포가 정규분포일 때와는 달리 하이브리드 붓스트랩 방법이 일관성있게 기대값 0.95에 가까운 값을 갖는 것으로 나타났다. 모든 표본크기 n에 대하여, 16개의 포함비율 중 12개가 0.933 ~ 0.967의 값을 가지며, 특히 $n \geq 20$일 때의 포함비율은 모두 이 범위 안의 값으로 좋은 수행결과를 보여준다. 나머지 붓스트랩 방법들에 대한 포함비율들은 모두 기대값 0.95보다 낮은 값을 갖는 것으로 나타났다. 그 중 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)이 나머지 방법보다 높은 포함비율을 갖으며, 다음으로는 편의가 촉진 수정된 붓스트랩 방법(ABC), 편의가 수정된 붓스트랩 방법(BC), 그리고 후향 붓스트랩 방법(BACK) 순으로 나타났다. 이러한 붓스트랩 방법들에 대하여, 표 3.1의 결과에서 보여주었던과 같은 양상, 즉 n이 증가할 수록 기대값 0.95로 증가하는 경향을 보이고 있다.

또한 95% 하한 신뢰구간에서 좋은 수행결과를 보여 주었던 하이브리드 붓스트랩 방법(HYB)이 90% 신뢰구간에 대해선 수행결과가 좋지 않은 것으로 나타났다. 이 구간에 대한 포함비율들은 모두 기대값 0.90보다 낮은 포함비율을 갖음을 보여준다. $n \geq 20$인 경우에 대하여, 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)은 나머지 붓스트랩 방법에 비해 높은 포함비율을 갖으며, n이 증가할 수록 기대값 0.90으로 증가하는 경향이 있음을 보이고 있다. 나머지 붓스트랩 방법들에 대하여 살펴보면, 표 3.2의 결과와 유사하게 표 3.4의 95% 하한 신뢰구간에서 다소 높은 포함비율을 갖았던 편의가 촉진 수정된 붓스트랩 방법(ABC)에 대한 결과가 역시 90% 신뢰구간에 대해서는 좋지 않은 수행결과를 보여주고 있다. 이러한 붓스트랩 방법들에 대하여, 공정분포가 정규분포일 때 나타났던 양상, 즉 표본크기 n이 증가할 수록 포함비율들이 기대값 0.90으로 증가하는 경향을 보여주고 있다.

표본크기 n이 증가할 수록 평균 구간길이와 구간길이의 표준편차가 감소하지만, 공정분포가 정규분포 일 때의 결과보다는 큰 값을 갖는 것으로 나타났다. 평균 구간길이 측면에서 보면, 표 3.3에서 비교적 다른 붓스트랩 방법에 비해 좋은 수행결과를 보여주었던 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)이 가장 긴 구간 길이 를 갖고 편의가 촉진 수정된 붓스트랩 방법(ABC)이 가장 짧은 구간길이를 갖는 것으로 나타났다. 이러한 양상은 구간길이의 표준편차에 대해서도 역시 같은 양상을 보여주고 있다.

표 3.3: 95% 하한 신뢰구간과 90% 양측신뢰구간의 포함비율 : 카이제곱분포

	표본크기(n)					
붓스트랩 방법	20	40	60	20	40	60
($\mu = 50, \sigma = 2$)			C_{pk}=1.667			
SB	0.890*	0.896*	0.908*	0.858*	0.866*	0.865*
STUD	0.875*	0.907*	0.920*	0.847*	0.860*	0.864*
HYB	0.947	0.937	0.940	0.788*	0.827*	0.815*
BACK	0.728*	0.789*	0.832*	0.718*	0.775*	0.814*
BC	0.785*	0.842*	0.868*	0.754*	0.809*	0.828*
ABC	0.810*	0.859*	0.890*	0.737*	0.799*	0.824*
($\mu = 52, \sigma = 2$)			C_{pk}=1.333			
SB	0.889*	0.901*	0.919*	0.845*	0.860*	0.870*
STUD	0.886*	0.904*	0.919*	0.843*	0.860*	0.866*
HYB	0.937	0.939	0.939	0.788*	0.832*	0.827*
BACK	0.752*	0.816*	0.846*	0.738*	0.794*	0.816*
BC	0.799*	0.854*	0.867*	0.762*	0.817*	0.827*
ABC	0.829*	0.876*	0.891*	0.749*	0.811*	0.823*
($\mu = 50, \sigma = 3$)			C_{pk}=1.111			
SB	0.885*	0.902*	0.909*	0.854*	0.863*	0.862*
STUD	0.874*	0.900*	0.919*	0.843*	0.859*	0.857*
HYB	0.947	0.935	0.945	0.791*	0.802*	0.824*
BACK	0.720*	0.808*	0.826*	0.706*	0.787*	0.795*
BC	0.785*	0.853*	0.867*	0.750*	0.804*	0.827*
ABC	0.811*	0.874*	0.885*	0.740*	0.788*	0.818*
($\mu = 52, \sigma = 3$)			C_{pk}=0.889			
SB	0.896*	0.904*	0.904*	0.852*	0.855*	0.868*
STUD	0.883*	0.911*	0.923*	0.855*	0.865*	0.873*
HYB	0.952	0.935	0.939	0.814*	0.817*	0.834*
BACK	0.775*	0.820*	0.838*	0.755*	0.802*	0.817*
BC	0.806*	0.852*	0.857*	0.765*	0.808*	0.818*
ABC	0.839*	0.879*	0.877*	0.758*	0.797*	0.801*

* 표시는 하한 신뢰구간과 양측신뢰구간의 포함확률이 각각 95%와 90%와는 유의수준 1%로 같다고 할 수 없음을 의미한다.

표 3.4: 90% 붓스트랩 신뢰구간의 평균길이(표준편차) : 카이제곱분포

	표본크기(n)		
붓스트랩 방법	20	40	60
($\mu = 50, \sigma = 2$)		C_{pk}=1.667	
SB	1.327(0.499)	0.875(0.264)	0.695(0.186)
STUD	1.355(0.676)	0.974(0.432)	0.786(0.333)
HYB	1.239(0.454)	0.847(0.247)	0.681(0.180)
BACK	1.239(0.454)	0.847(0.247)	0.681(0.180)
BC	1.061(0.390)	0.785(0.232)	0.655(0.178)
ABC	0.939(0.312)	0.731(0.199)	0.626(0.161)
($\mu = 52, \sigma = 2$)		C_{pk}=1.333	
SB	1.240(0.463)	0.818(0.229)	0.665(0.163)
STUD	1.335(0.685)	0.912(0.360)	0.745(0.276)
HYB	1.158(0.421)	0.793(0.217)	0.651(0.159)
BACK	1.158(0.421)	0.793(0.217)	0.651(0.159)
BC	1.020(0.365)	0.745(0.204)	0.632(0.157)
ABC	0.896(0.299)	0.694(0.177)	0.603(0.142)
($\mu = 52, \sigma = 2$)		C_{pk}=1.333	
SB	0.873(0.345)	0.581(0.178)	0.471(0.122)
STUD	0.894(0.479)	0.649(0.302)	0.534(0.209)
HYB	0.814(0.311)	0.562(0.168)	0.462(0.119)
BACK	0.814(0.311)	0.562(0.168)	0.462(0.119)
BC	0.701(0.273)	0.520(0.155)	0.446(0.115)
ABC	0.621(0.221)	0.485(0.135)	0.426(0.103)
($\mu = 52, \sigma = 3$)		C_{pk}=0.889	
SB	0.909(0.346)	0.595(0.154)	0.481(0.111)
STUD	1.007(0.506)	0.674(0.259)	0.534(0.178)
HYB	0.853(0.316)	0.578(0.148)	0.471(0.108)
BACK	0.853(0.316)	0.578(0.148)	0.471(0.108)
BC	0.760(0.275)	0.548(0.142)	0.461(0.110)
ABC	0.659(0.219)	0.509(0.121)	0.440(0.099)

3.2.3. 공정의 분포가 스튜던트 t분포인 경우

공정의 분포가 스튜던트 t분포일 때, 공정능력지수 C_{pk}에 대한 6가지 형태의 붓스트랩 방법에 대한 모의실험 수행결과가 각각 표 3.5 ~ 표 3.6에 있다.

표 3.5의 95% 붓스트랩 하한 신뢰구간의 포함비율에 대한 결과를 살펴보면, 하이브리드 붓스트랩 방법(HYB)에 대한 포함비율이 기대값 0.95에 가까운 값을 갖지만 공정의 분포가 카이제곱 분포일 때의 표 3의 결과에 대응하는 값보다는 낮은 값임을 알 수 있다. 실제로 표 3.3에서는 이 방법에 대한 16개의 포함비율 중 12개가 0.933 ~ 0.967의 값을 갖았지만, 표 3.5의 결과에서는 16개 중 6개만이 이 범위 안의 값으로 그 수행결과가 카이제곱을 따르는 공정분포에서보다 좋지 않음을 보여준다. 나머지 붓스트랩 방법들에 대한 결과를 살펴보면, 최소한의 포함비율 0.933보다도 훨씬 낮은 값을 갖는 것으로 나타났다. 특히 이러한 값들은 하이브리드 붓스트랩 방법(HYB)의 경우와 마찬가지로 카이제곱을 따르는 공정에서보다 모두 낮은 값을 갖는 것으로 스튜던트 t분포를 따르는 공정에서의 수행결과가 카이제곱 분포를 따르는 공정에서 더 좋지 않은 것으로 나타났다. 하지만 그 중에서 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)에 대한 포함비율은 대략 0.873 ~ 0.889로 나머지 붓스트랩 방법에 비해 높고, 다음은 편의가 촉진 수정된 붓스트랩 방법(ABC), 편의가 수정된 붓스트랩 방법(BC), 후향 붓스트랩 방법 (BACK)순으로 나타났다. 이러한 붓스트랩 방법들에 대하여, 표본크기 n이 증가할 수록 증가하는 경향이 있지만 그 증가폭은 공정분포가 카이제곱 분포일 때에 비하여 작았다.

또한 표 3.5의 뒷부분은 90% 붓스트랩 신뢰구간의 포함비율에 대한 결과이다. 특히 카이제곱을 따르는 공정분포의 표 3.3의 결과에 비하여 포함비율이 낮은 값으로 역시 스튜던트 t분포에서의 수행결과가 좋지 않음을 알 수 있다. 하지만 $n \geq 20$일 때, 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)에 대한 포함비율은 나머지 붓스트랩 방법에 비하여 높은 것으로 나타났다. 이러한 붓스트랩 방법들에 대하여 표 3.5에서 보여주었던 것과 마찬가지로 n이 증가할 수록 증가하는 경향을 보여주고 있지만, 역시 카이제곱을 따르는 공정에서보다 그 증가폭은 작음을 알 수 있다.

표 3.6은 90% 붓스트랩 신뢰구간에 대한 평균 구간길이와 구간길이의 표준편차에 대한 결과이다. 앞의 표 3.2과 표 3.3의 결과에서 보여주었던 것처럼, 모든 붓스트랩 방법에 대한 평균 구간길이와 표준편차는 표본크기 n이 증가할 수록 감소하는 경향이 있지만, 표 3.2와 표 3.3의 결과보다는 감소하는 속도가 더 느리다. 특히 $n = 60$일 때 조차도 평균 구간길이는 대략 0.37 ~ 0.80이고 표준편차는 대략 0.08 ~ 0.19의 값으로 극적인 변동을 보여준다. 이러한 평균 구간길이와 표준편차는 카이제곱 분포를 따르는 공정에서의 결과보다 더 큰 값과 변동을 갖는 것으로 나타났다. 평균 구간길이와 표준편차의 측면에서 보면, 앞의 결과들과 마찬가지로 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)이 가장 크고 편의가 촉진 수정된 붓스트랩 방법이 가장 작았다.

표 3.5: 95% 하한 신뢰구간과 90% 양측 신뢰구간의 포함비율 : 스튜던트 t분포

	표본크기(n)					
붓스트랩 방법	20	40	60	20	40	60
$(\mu = 50, \sigma = 2)$			C_{pk}=1.667			
SB	0.880*	0.875*	0.886*	0.841*	0.838*	0.846*
STUD	0.882*	0.880*	0.898*	0.836*	0.830*	0.844*
HYB	0.934	0.941	0.923*	0.820*	0.836*	0.802*
BACK	0.690*	0.736*	0.798*	0.680*	0.718*	0.776*
BC	0.763*	0.807*	0.844*	0.731*	0.771*	0.814*
ABC	0.801*	0.843*	0.863*	0.747*	0.788*	0.804*
$(\mu = 52, \sigma = 2)$			C_{pk}=1.333			
SB	0.885*	0.880*	0.883*	0.845*	0.850*	0.844*
STUD	0.882*	0.886*	0.893*	0.847*	0.845	0.846*
HYB	0.939	0.933	0.927*	0.836*	0.826*	0.829*
BACK	0.709*	0.760*	0.816*	0.702*	0.752*	0.798*
BC	0.771*	0.827*	0.849*	0.745*	0.790*	0.812*
ABC	0.805*	0.857*	0.868*	0.747*	0.795*	0.805*
$(\mu = 50, \sigma = 3)$			C_{pk}=1.111			
SB	0.883*	0.875*	0.885*	0.849*	0.842*	0.845*
STUD	0.879*	0.883*	0.890*	0.837*	0.842*	0.841*
HYB	0.941	0.925*	0.923*	0.802*	0.810*	0.818*
BACK	0.704*	0.766*	0.797*	0.694*	0.751*	0.776*
BC	0.781*	0.830*	0.837*	0.748*	0.791*	0.798*
ABC	0.806*	0.847*	0.861*	0.749*	0.784*	0.805*
$(\mu = 52, \sigma = 3)$			C_{pk}=0.889			
SB	0.889*	0.873*	0.889*	0.852*	0.838*	0.847*
STUD	0.881*	0.874*	0.893*	0.851*	0.841*	0.847*
HYB	0.939	0.920*	0.921*	0.824*	0.801*	0.823*
BACK	0.728*	0.789*	0.809*	0.716*	0.775*	0.786*
BC	0.799*	0.837*	0.843*	0.757*	0.797*	0.800*
ABC	0.835*	0.859	0.875*	0.759*	0.773*	0.807*

* 표시는 하한 신뢰구간과 양측신뢰구간의 포함확률이 각각 95%와 90%와는 유의수준 1%로 같다고 할 수 없음을 의미한다.

표 3.6: 90% 붓스트랩 신뢰구간의 평균길이(표준편차) : 스튜던트 t분포

	표본크기(n)		
붓스트랩 방법	20	40	60
($\mu = 50, \sigma = 2$)		C_{pk}=1.667	
SB	1.338(0.456)	0.898(0.255)	0.720(0.190)
STUD	1.342(0.595)	0.983(0.410)	0.803(0.349)
HYB	1.257(0.412)	0.871(0.235)	0.705(0.180)
BACK	1.257(0.412)	0.871(0.235)	0.705(0.180)
BC	1.075(0.350)	0.806(0.216)	0.680(0.179)
ABC	0.974(0.286)	0.760(0.187)	0.655(0.163)
($\mu = 52, \sigma = 2$)		C_{pk}=1.333	
SB	1.097(0.390)	0.728(0.199)	0.589(0.153)
STUD	1.158(0.542)	0.805(0.327)	0.665(0.281)
HYB	1.034(0.353)	0.709(0.188)	0.578(0.142)
BACK	1.034(0.353)	0.709(0.188)	0.578(0.142)
BC	0.891(0.308)	0.657(0.175)	0.559(0.140)
ABC	0.801(0.256)	0.621(0.154)	0.538(0.128)
($\mu = 50, \sigma = 3$)		C_{pk}=1.111	
SB	0.891(0.309)	0.584(0.162)	0.487(0.133)
STUD	0.901(0.402)	0.631(0.261)	0.544(0.236)
HYB	0.836(0.275)	0.567(0.150)	0.476(0.123)
BACK	0.836(0.275)	0.567(0.150)	0.476(0.123)
BC	0.719(0.239)	0.528(0.144)	0.459(0.122)
ABC	0.650(0.195)	0.499(0.126)	0.442(0.111)
($\mu = 52, \sigma = 3$)		C_{pk}=0.889	
SB	0.749(0.263)	0.505(0.135)	0.405(0.098)
STUD	0.826(0.399)	0.578(0.239)	0.464(0.187)
HYB	0.707(0.240)	0.492(0.126)	0.398(0.094)
BACK	0.707(0.240)	0.492(0.126)	0.398(0.094)
BC	0.610(0.216)	0.459(0.119)	0.386(0.094)
ABC	0.543(0.182)	0.431(0.105)	0.371(0.087)

4. 결론

모의실험 결과, 공정능력지수 C_{pk}에 대한 95% 붓스트랩 하한 신뢰구간의 수행결과는 공정의 분포에 따라 상이한 결과를 도출하였다. 먼저 공정분포가 정규분포인 경우에 대하여, 6가지 붓스트랩 방법 중에서 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)에 대한 포함비율이 일관성있게 명목확률 0.95에 가까운 값으로 매우 좋은 수행결과를 보여 주었다. 하지만 공정분포가 비정규분포인 카이제곱 분포이거나 스튜던트 t분포일 때에는 하이브리드 붓스트랩 방법(HYB)이 명목확률 0.95에 가까운 값으로 다른 붓스트랩 방법에 비하여 수행결과가 좋았다. 이러한 결과는 공정능력지수에 대한 구간추정시 상한과 하한을 모두 관리하는 것보다는 하한만을 관리하는 것이 더 관심이 있을 수 있는 실제 품질관리 현장의 제조공정에 대하여 중요한 결과를 준다. 만일 제조공정으로부터 얻어지는 특성치들이 정규분포를 따른다면, 지수 C_{pk}에 대한 하한 구간추정으로 표준 붓스트랩 방법(SB)이나 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)이 바람직하다 하겠다. 하지만 실제 품질관리 현장의 제조공정에서 얻어지는 특성치들이 반드시 정규분포 형태인 것은 아니며, 실제로 비정규분포인 경우가 많이 발생하게 된다. 이러한 경우에 모의실험 결과로부터, 표준 붓스트랩 방법(SB)이나 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)을 이용하여 지수 C_{pk}에 대한 하한 구간추정을 하는 것보다는 하이브리드 붓스트랩 방법(HYB)을 이용한 구간추정이 바람직하다는 결론을 얻었다.

다음으로 90% 붓스트랩 신뢰구간에 대한 모의실험 수행결과는, 우선 공정분포가 정규분포일 때에 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)이 일관성있게 명목확률 0.90에 가까운 포함비율을 갖음으로써 좋은 수행결과를 보여 주었다. 하지만 공정분포가 비정규분포, 즉 카이제곱 분포나 스튜던트 t분포일 때는 모두 명목확률 0.90보다 낮은 포함비율을 갖았지만, 다른 붓스트랩 방법에 비하여 표준 붓스트랩 방법(SB)과 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)이 일관성있게 높은 포함비율을 갖았다. n이 작을 때 이러한 붓스트랩 방법에 대응하는 평균 구간길이와 구간길이의 표준편차는 비록 다른 붓스트랩 방법에 비하여 컸지만, n이 증가할 수록 감소하며, 특히 $n = 60$일 때는 그 차이가 크지 않은 것으로 나타났다. 따라서 지수 C_{pk}에 대하여 상한과 하한을 모두 관리하는 양측 구간추정을 한다면, 공정분포에 관계없이 표준 붓스트랩 방법(SB)이나 스튜던트화 붓스트랩 방법(STUD)을 이용하는 것이 바람직하다는 결론을 얻었다. 이상의 결과로부터, Hall(1988)의 이론적인 비교연구에서 이론적으로 우수 하다고 논의한 스튜던트화 붓스트랩(STUD) 방법이 공정능력지수 C_{pk}에 대한 구간추정에 있어 우수하며, 특히 95% 단측 구간추정에 있어서 더 우수한 것으로 나타났다. 하지만 편의가 축진 수정된 붓스트랩 방법(ABC)을 이용한 지수 C_{pk}에 대한 구간추정은 95% 단측 구간추정에 있어 비교적 다른 붓스트랩 방법에 비하여 우수하였지만, 90% 양측 구간추정에 있어서는 수행결과가 좋지 않은 것으로 나타났다. 또한 모의실험 결과에서 $n = 10$일 때의 소표본인 경우에, 표준 붓스트랩(SB)이나 스튜던트화 붓스트랩 (STUD) 방법을 제외한 모든 붓스트랩 방법에 대한 결과들은 기대값 보다 훨씬 낮은 포함비율을 갖는 것으로 매우 좋지 않은 수행결과를 보여주었다. 비록 표준 붓스트랩(SB)이나 스튜던트화 붓스트랩 (STUD) 방법이 몇몇 결과에서 명목확률에 가까운 포함비율을 갖았지만, 평균 구간길이와 구간길이의 표준편차에 대한 결과가 매우 큰 값들로

소표본에서의 수행결과가 좋지 않았다. 이러한 결과는 공정 능력지수 C_{pk}에 대한 연구결과가 대표본 연구이며, 추정량 $\hat{C}_{pk}$의 분산이 공정 평균 μ와 공정 분산 σ^2으로 이루어져 분산의 추정량이 안정적이지 못하기 때문에 발생된 것으로 사료된다. 이에 대한 방안으로 상관계수 ρ에 대한 연구에서의 Z-변환과 같은 분산을 안정화 시키는 변환이나 포함비율을 수정함으로써 기대값에 가까운 포함비율을 갖도록 하는 붓스트랩 방법 등을 생각할 수 있다. 실제로 Hall과 Martin(1989)은 상관계수에 대한 더 나은 비모수적 붓스트랩 신뢰구간의 연구에서 포함비율을 수정한 붓스 트랩 방법을 제시하고 $n = 8, 10, 12$인 소표본의 경우에 모의실험을 통하여 좋은 결과를 얻었다. 이러한 형태의 연구결과는 공정능력지수에 대한 연구에서도 좋은 결과를 줄 것으로 사료되며, 이에대한 지속적인 연구도 매우 의미있는 연구과제라 사료된다.

참고문헌

[1] Beran,R.J.(1984). "Bootstrap Methods in Statistics", *Jahresberichtr der Deutschen Mathematiker Vereiningung*, 86, 14-30.

[2] Boyles,R.A.(1991). "The Taguchi Capability Index", *Journal of Quality Technology*, 23(1), 17-23.

[3] Cho,J.J., Han, J.H., and Jo,S.H.(1997). "Bootstrapping Unified Process Capability Index", *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. 26, No.4, 543-554.

[4] Diciccio, T.J. and Tibshirani, R.(1987). "Bootstrap Confidence Intervals and Bootstrap Approximations", *Journal of the American Statistical Association*, 82, 163-170.

[5] Efron,B.(1979). "Bootstrap methods: Another look at the jackknife", *Annals of Statistics*, 9, 139-172.

[6] Efron,B. and Tibshirani,R.(1986) "Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy.", *Statistical Science*, 1, 54-77.

[7] Franklin,L.A. and Wasserman,G.(1991). "Bootstrap Confidence Interval Estimate of C_{pk}: An Introduction", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 20(1), 231-242.

[8] Franklin,L.A. and Wasserman,G.(1992). "Bootstrap Lower Confidence Interval Limits for Capability Indices", *Journal of Quality Thechnology*, 24, 196-210.

[9] Gunter,B.H.(1989). "The Use and Abuse of C_{pk}, Part 2", *Quality Progress*, 22(3), 108-109.

[10] Hall,P.(1988). "Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals", *Annals of Statistics*, 16, 927-953.

[11] Hall,P. and Martin,M.A.(1989). "Better Nonparametric Bootstrap Confidence Intervals for the Correlation Coefficient", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 33, 161-172.

[12] Kane,V.E.(1986). "Process Capability Indices", *Journal of Quality Technology*, 18, 41-52.

[13] Kotz, S. and Johnson, N.L.(1993). *Process Capability Indices.* Chapman & Hall, London

[14] Nam, K.H. and Park, D.H.(1995). "Estimation of Capability Index Based on Bootstrap Method", *The 9th Asia Quality Management Symposium*, Seoul.

[15] Rodriguez,R.N.(1992). "Recent Developments in Process Capability Analysis", *Journal of Quality Technology*, 24, 176-187.

[1997년 6월 접수, 1999년 1월 최종수정]

Better Nonparametric Bootstrap Confidence Intervals for Capability Index C_{pk} *

Joong-Jae Cho[1)] Ju-Sung Kim [2)] Byoung-Sun Park[3)]

ABSTRACT

Process capability index C_{pk} is used to determine whether a production process is capable of producing items within a specified tolerance. If a process is clearly nonnormal, there is some questions as to whether any process index is valid or should even be calculated. Unfortunately, nonnormal processess do exist and may frequently go undetected. However, bootstrap method could be studied for statistical inference.

In this paper, we study bootstrap inference for our process capability index C_{pk}. Having studied boostrapping process capability index C_{pk}, we construct six bootstrap confidence intervals and compare their performances for our index C_{pk}. That is, we examine better nonparametric bootstrap confidence intervals for process capability index C_{pk} under some nonnormal distributions.

* The authors wish to acknowledge the financial support of the Korea Research Foundation made in the program year of 1997.

1) Department of Statistics, Chungbuk National University, Cheongju, 361-763, KOREA
2) Department of Computer Science, Chungbuk National University, Cheongju, 361-763, KOREA
3) Department of Computer Science, Chungbuk National University, Cheongju, 361-763, KOREA