韓國軍事運營分析學會誌
第 25 卷, 第 2 號, 1999. 12. 31.

비가능 내부점 방법에 있어서 안정적 수렴에 대하여*
(On Stable Convergence in Infeasible Interior-Point Methods)

설동렬**, 성명기***, 박순달***

Abstract

When infeasible interior-point methods are applied to large-scale linear programming problems, they become unstable and cannot solve the problems if convergence rates of primal feasibility, dual feasibility and duality gap are not well-balanced. We can balance convergence rates of primal feasibility, dual feasibility and duality gap by introducing control parameters. As a result, the stability and the efficiency of infeasible interior-point methods can be improved.

* 본 연구는 한국과학재단 특정기초연구 (98-0200-07-01-2)의 지원으로 수행되었음.
** LG-EDS
*** 서울대학교 산업공학과

1. 개　요

비가능 내부점 방법은 임의의 양의 해로부터 시작하여 최적가능해를 얻을 수 있기 때문에 여러 가지 내부점 방법 가운데에 가장 널리 사용되는 방법이다. 비가능 내부점 방법을 효율화하기 위하여 효과적인 초기해 선정 방법 또는 해법에 의해서 생성되는 해들이 중심경로에 근접하도록 하는 방법에 관한 연구가 수행되어 왔다[1,2,5,6]. 또한, 실용적인 해법으로서 여러 내부점 방법의 구현에 관한 연구에서 사용되는 해법이다[3,9,10].

실제로 대형 선형계획법 문제를 풀 때에 비가능 내부점 방법을 구현하여 사용하게 되면 원가능성, 쌍대가능성 그리고 쌍대간격이 균형있게 개선되지 않고 어느 하나가 지나치게 빠르게 수렴하여 전반적인 해법의 수치적 안정성을 떨어뜨리거나 심지어 최적해에 수렴하지 못하게 되는 경우가 발생한다[7]. 컴퓨터에서는 실수를 정확하게 표현하지 못하기 때문에 0에 가까운 값과 큰 값 사이에 연산을 수행하게 되면 큰 수치적 오차를 일으킨다. 수렴의 불균형은 바로 이와같은 현상을 초래하게 된다.

본 연구에서는 이러한 경우에 대한 해법의 안정성을 높이기 위한 기법으로 수렴 속도 조절에 대하여 다룬다. 원가능성 또는 쌍대가능성에 대해 모수를 곱하여 수렴 속도를 제어할 수 있게 하는 기법이다. 2장에서는 수렴 속도 조절에 대한 이론적 배경을 다루고, 3장에서는 실제 컴퓨터에서 구현하여 실험 결과를 보였다.

2. 비가능 내부점 방법

널리 사용되고 있는 내부점 방법의 기본적인 계산법인 Kojima 등의 비가능 내부점 방법[8,11]을 살펴보자. 다음과 같은 선형계획법 문제 (P)와 쌍대문제 (D)를 고려하자.

$$
\text{(P)}\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{array}
$$

$$
\text{(D)}\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ s.t. & A^T y + z = c \\ & z \ge 0 \end{array}
$$

단, $c, x, z \in R^n$, $b, y \in R^m$ 그리고 $A \in R^{m \times n}$ 이다. 모든 $\mu > 0,\ 0 \le \gamma \le 1$에 대해서 다음의 연립방정식 (1)을 만족하고 $x > 0,\ z > 0$인 (x, y, z)의 집합을 중심경로라고 한다.

$$
\begin{aligned} Ax - b &= 0 \\ A^T y + z - c &= 0 \\ Xz - \gamma\mu e &= 0 \end{aligned} \tag{1}
$$

이제 $0 < \beta < 1$, $\beta_P > 0$, $\beta_D > 0$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_P > 0$ 그리고 $\varepsilon_D > 0$이라고 가정하자. Kojima 등의 비가능 내부점 방법은 주어진 쌍대간격 허용오차 ε, 원가능성 허용오차 ε_P, 쌍대가능성 허용오차 ε_D와 큰 값 ω에 대해서 k회 만에

$$
\begin{aligned} (x^k)^T z^k &\le \varepsilon, \\ \|Ax^k - b\| &\le \varepsilon_P, \\ \|A^T y^k + z^k - c\| &\le \varepsilon_D \end{aligned} \tag{2}
$$

를 만족하는 최적해 (x^k, y^k, z^k)를 생성하거나 또는 다음을 만족한다.

$$
\|(x^k, z^k)\|_1 > \omega \tag{3}
$$

이 때에 식 (3)을 만족하게 되면 비가능이다. 비가능 내부점 방법에서 생성하는 수열 $\{(x^k, y^k, z^k)\}$는 다음과 같은 중심경로의 이웃 N에 포함되도록 한다.

계산법 1. 비가능 내부점 방법

단계 1. $k=1$

단계 2. 다음을 만족하면 해법을 종료한다. 단, $\varepsilon, \varepsilon_P, \varepsilon_D, \omega \geq 0$이다.

(최적가능해) $\quad (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \leq \varepsilon,\ \|A\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}\| \leq \varepsilon_P,\ \|A^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}\| \leq \varepsilon_D$

(비가능 문제) $\quad \|(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k)\|_1 > \omega$

단계 3. $\mu = (\boldsymbol{x}^k)^T(\boldsymbol{z}^k)/n$라고 두고 식 (5)을 풀어서 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$를 구한다.

단계 4. 다음을 만족하는 최대값 $\overline{\alpha}^k$를 구한다. 단, $0 \leq \overline{\alpha}^k \leq 1$이고 $0 \leq \alpha \leq \overline{\alpha}^k$이다.

$$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) + \alpha(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z}) \in N$$
$$(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) \leq \{1 - \alpha(1-\gamma)\}(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$$

단계 5. 다음과 같이 해를 개선한다.

$$(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1}) = (\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) + \overline{\alpha}^k(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$$

단계 6. k를 1 증가시키고 단계 2로 간다.

$$\begin{aligned} N = \ \{ & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \mid \boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{z} > 0, \\ & x_i z_i \geq \beta \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}/n \ (i = 1, 2, \cdots, n), \\ & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} \geq \beta_P \|\boldsymbol{r}_P\| \text{ 또는 } \|\boldsymbol{r}_P\| \leq \varepsilon_P, \\ & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} \geq \beta_D \|\boldsymbol{r}_D\| \text{ 또는 } \|\boldsymbol{r}_D\| \leq \varepsilon_D \} \end{aligned} \tag{4}$$

단, $\boldsymbol{r}_P^k = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^k$, $\boldsymbol{r}_D^k = \boldsymbol{c} - A^T\boldsymbol{y}^k - \boldsymbol{z}^k$이다. 해를 개선하기 위해서 비가능 원쌍대 내부점 방법은 다음의 식 (5)와 같은 개선방향을 사용한다.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z^k & 0 & X^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_P^k \\ \boldsymbol{r}_D^k \\ \gamma\mu\boldsymbol{e} - X^k\boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} \tag{5}$$

단, $\mu = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$이고 $\gamma \in R$이다. X^k와 Z^k는 각각 $\boldsymbol{x}^k$와 $\boldsymbol{z}^k$을 대각요소 값으로 가지는 대각행렬이다. 비가능 내부점 방법은 가능해에서 시작하여 최적해를 찾아가는 방법이 아니라 임의의 양의 해로부터 시작하여 가능해를 찾는 일과 최적해를 찾는 일을 동시에 수행하는 방법이다. 따라서, 식 (5)의 개선방향은 원가능성 $\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^k$, 쌍대가능성 $\boldsymbol{c} - A^T\boldsymbol{y}^k - \boldsymbol{z}^k$ 그리고 쌍대간격 $(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$가 모두 0이 되도록 한다.

비가능 내부점 방법이 계산법 1에서 단계 4와 같이 개선폭 $\overline{\alpha}^k$를 결정하는 것은 계산법에 의해서 생성되는 해들이 중심경로의 이웃 N에 포함되도록 하여 식 (2') 또는 식 (3')을 만족하는 해로 수렴하도록 하는 데에 그 목적이 있다.

3. 수렴 속도 조절

본 연구에서는 식 (5)에서 우변에 수렴 속도 조절을 위한 모수를 곱하는 방법으로 비가능 내부점 방법의 원가능성, 쌍대가능성 그리고 쌍대간격의 수렴 비율을 맞추어 주고자 한다. 먼저 원가능성과 쌍대가능성이 비가능 내부점 방법에 의하여 매 회마다 개선되는 양을 고려하도록 하자.

정리 1.

계산법 1에서 $k+1$회의 원가능성 및 쌍대가능성과 k회의 원가능성 및 쌍대가능성에 각각 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$r_P^{k+1}=(1-\alpha)\,r_P^k \tag{6}$$

$$r_D^{k+1}=(1-\alpha)\,r_D^k \tag{7}$$

(증명)

식 (5)에서 개선폭을 α로 하여 r_P^{k+1}을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} r_P^{k+1} &= b-A(x^k+\alpha\Delta x) \\ &=(b-Ax^k)-\alpha A\Delta x \\ &= r_P^k-\alpha r_P^k \\ &=(1-\alpha)\,r_P^k \end{aligned}$$

한편, 같은 방법으로 r_D^{k+1}를 구하면 다음이 만족된다.

$$\begin{aligned} r_D^{k+1} &= c-A^T(y^k+\alpha\Delta y)-(z^k+\alpha\Delta z) \\ &=(c-A^Ty^k-z^k)-\alpha(A^T\Delta y+\Delta z) \\ &= r_D^k-\alpha r_D^k \\ &=(1-\alpha)\,r_D^k \end{aligned}$$

따라서, 정리가 성립한다.

■

원가능성과 쌍대가능성의 수렴속도 조절을 위하여 식 (5)에 다음과 같이 η_P와 η_D를 도입하자. 단, $0\leq\eta_P,\eta_D\leq 1$이다.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z^k & 0 & X^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\Delta x} \\ \underline{\Delta y} \\ \Delta z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta_P r_P^k \\ \eta_D r_D^k \\ \gamma\mu e-X^kz^k \end{pmatrix} \tag{8}$$

정리 2.

계산법 2에서 $k+1$회의 원가능성 및 쌍대가능성과 k회의 원가능성 및 쌍대가능성에 각각 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$r_P^{k+1}=(1-\eta_P\alpha)\,r_P^k \tag{9}$$

$$r_D^{k+1}=(1-\eta_D\alpha)\,r_D^k \tag{10}$$

(증명)

식 (8)에서 개선폭을 α로 하여 r_P^{k+1}을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} r_P^{k+1} &= b-A(x^k+\alpha\overline{\Delta x}) \\ &=(b-Ax^k)-\alpha A\overline{\Delta x} \\ &= r_P^k-\eta_P\alpha r_P^k \\ &=(1-\eta_P\alpha)\,r_P^k \end{aligned}$$

한편, 개선폭을 α로 하여 r_D^{k+1}를 구하면 다음이 만족된다.

$$\begin{aligned} r_D^{k+1} &= c-A^T(y^k+\alpha\overline{\Delta y})-(z^k+\alpha\overline{\Delta z}) \\ &=(c-A^Ty^k-z^k)-\alpha(A^T\overline{\Delta y}+\overline{\Delta z}) \\ &= r_D^k-\eta_D\alpha r_D^k \\ &=(1-\eta_D\alpha)\,r_D^k \end{aligned}$$

따라서, 정리가 성립한다.

■

정리 2에 의하여 식 (8)을 푸는 것은 식 (5)에서 개선폭 α를 $\eta_P\alpha$와 $\eta_D\alpha$로 하는 효과를 얻는다는 것을 알 수 있다. 즉, 수렴속도 조절을 위해서 η_P, η_D를 사용하는 것은 개선폭을 η_P, η_D의 비율로 조절해 주는 역할을 하는 것이다. 예를 들어, $\|r_D^k\|\leq\varepsilon_D$인데 $\|r_P^k\|$의 값이 클 경우에 η_D의 값을 η_P보다 작게 하면 쌍대변수 y, z의 값의 개선폭이 x에 비해서 더 큰 비율로 줄어들게 된다. 즉, η_D의 값으로 쌍대가능성의 수렴속도를 늦추는 효과를 가져온다.

이제 계산법 2를 적용했을 때에 η_P, η_D과 쌍대

계산법 2. 수렴속도 조절 비가능 내부점 방법

계산법 1에서 단계 3을 다음과 같이 수행한다.
단계 3. $\eta_P,\eta_D>0$에 대해 $\mu=(x^k)^T(z^k)/n$라고 두고 식 (8)을 풀어서 $(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$를 구한다.

간격 x^Tz의 관계를 고찰하자. r_P^k와 r_D^k를 대신하여 $\eta_P r_P^k$와 $\eta_D r_D^k$를 사용하면 비가능 내부점 방법에서 해의 수열이 생성되는 중심경로의 이웃 N이 다음과 같은 N'으로 바뀐다.

$$\begin{aligned} N' = \{ & (x, y, z) \mid x>0, z>0, \\ & x_i z_i \ge \beta x^T z/n \ (i=1,2,\cdots,n), \\ & x^T z \ge \beta_P \eta_P \| r_P \| \text{ 또는 } \| r_P \| \le \epsilon_P/\eta_P, \\ & x^T z \ge \beta_D \eta_D \| r_D \| \text{ 또는 } \| r_D \| \le \epsilon_D/\eta_D \} \end{aligned} \tag{11}$$

이제 N'과 N의 관계를 고려하자.

정리 3.

모든 $0 \le \eta_P, \eta_D \le 1$에 대해서 $N' \supset N$이다.

(증명)

$0 \le \eta_P, \eta_D \le 1$이므로 $\beta_P \| r_P \| \ge \beta_P \eta_P \| r_P \|$이고, $\beta_D \| r_D \| \ge \beta_D \eta_D \| r_D \|$이다. 또한, $\epsilon_P/\eta_P \ge \epsilon_P$이고, $\epsilon_D/\eta_D \ge \epsilon_D$이다. 따라서, 정리가 성립된다.

■

정리 3에 의하여 η_P, η_D을 적용하면, N'이 N을 포함하도록 확장된 집합이 되므로 계산법 1에서 개선폭을 결정할 때에 보다 계산법 2에서 더 긴 개선폭을 얻는 것이 가능해짐을 알 수 있다. 정리 1과 정리 2에 의해서 η_P, η_D을 적용하면 해의 개선폭이 줄어드는 효과를 가진다. 따라서, 해법의 초기에 적용하는 것보다는 원가능성 혹은 쌍대가능성이 빠르게 수렴하여 작은 값을 가지게 될 때에 적용하면 넓은 이웃을 가지게 되어 안정적으로 수렴할 수 있다. 실제로 비가능 내부점 방법을 구현할 때에는 계산법 1이나 계산법 2의 단계 4와 같이 개선폭을 정하지 않고 다음의 조건을 만족하는 α의 최대값 $\tilde{\alpha}^k$를 사용한다.

$$(x^k, z^k) + \alpha(\Delta x, \Delta z) > 0 \tag{12}$$

식 (12)을 사용하여 개선폭을 결정하는 경우에 이론적으로는 수렴이 보장되지 않는다. 그러나, 실용적인 면에서는 간단하게 개선폭을 정할 수 있기 때문에 주로 사용된다. 이와 같은 경우에 생성되는 해들이 중심경로를 많이 벗어나게 될 수 있는데, 이 때에 η_P, η_D를 적용하면 생성되는 해들이 수렴이 가능한 중심경로의 이웃 N'에 포함될 가능성이 높아진다. 따라서, 보다 안정적으로 비가능 내부점 방법이 수행될 수 있다.

보조정리 1.

$$(x^k)^T \overline{\Delta z} + (z^k)^T \overline{\Delta x} = -(1-\gamma)(x^k)^T z^k \tag{13}$$

(증명)

식 (8)의 마지막 식에 의하여 다음이 만족된다.

$$(x^k)^T \overline{\Delta z} + (z^k)^T \overline{\Delta x} = n\gamma\mu - (x^k)^T z^k \tag{14}$$

그런데, $\mu = (x^k)^T z^k / n$이므로 식 (13)이 성립한다.

■

보조정리 2.

만일 $r_P^k = 0$, $r_D^k = 0$이면 $(\overline{\Delta x})^T \overline{\Delta z} = 0$이다.

(증명)

$(\overline{\Delta x})^T \overline{\Delta z}$은 다음과 같이 r_P^k와 r_D^k로 표현된다.

$$\begin{aligned} (\overline{\Delta x})^T \overline{\Delta z} &= (\overline{\Delta x})^T (\eta_D r_D^k - A^T \overline{\Delta y}) \\ &= \eta_D (\overline{\Delta x})^T r_D^k - (\overline{\Delta x})^T A^T \overline{\Delta y} \\ &= \eta_D (r_D^k)^T \overline{\Delta x} - \eta_P (r_P^k)^T \overline{\Delta y} \end{aligned}$$

따라서, $r_P^k = 0$, $r_D^k = 0$이면 $(\overline{\Delta x})^T \overline{\Delta z} = 0$이다.

■

보조정리 2에 의해서 원가능해와 쌍대가능해가 주어졌을 경우에는 $(\overline{\Delta x})^T \overline{\Delta z} = 0$임을 알 수 있다.

정리 4.

계산법 2에서 원가능성 및 쌍대가능성이 만족될 때에 쌍대간격에 대해 다음이 성립한다.

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})^T \boldsymbol{z}^{k+1} = \{1-\alpha(1-\gamma)\}(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k \quad (15)$$

(증명)

보조정리 1에 의하여 $k+1$ 회의 쌍대간격은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x}^{k+1})^T \boldsymbol{z}^{k+1} \\
=\ & (\boldsymbol{x}^k+\alpha\overline{\Delta \boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{z}^k+\alpha\overline{\Delta \boldsymbol{z}}) \\
=\ & (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k+\alpha\{(\boldsymbol{z}^k)^T\overline{\Delta \boldsymbol{x}}+(\boldsymbol{x}^k)^T\overline{\Delta \boldsymbol{z}}\} \\
& +\alpha^2(\overline{\Delta \boldsymbol{x}})^T\overline{\Delta \boldsymbol{z}} \\
=\ & \{1-\alpha(1-\gamma)\}(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k+\alpha^2(\overline{\Delta \boldsymbol{x}})^T\overline{\Delta \boldsymbol{z}}
\end{aligned}$$

그런데, 보조정리 2에 의하여 원가능이고 쌍대가능인 해를 가지게 되는 경우에는 마지막 항이 제거되므로 $(\boldsymbol{x}^{k+1})^T \boldsymbol{z}^{k+1} = \{1-\alpha(1-\gamma)\}(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k$ 이다.

■

정리 1에 의해서 원가능성과 쌍대가능성은 각각 $1-\eta_P\alpha$, $1-\eta_D\alpha$의 비율로 감소한다. 즉,

$$\|\boldsymbol{r}_P^{k+1}\| = (1-\eta_P\alpha)\|\boldsymbol{r}_P^k\| \quad (16)$$

$$\|\boldsymbol{r}_D^{k+1}\| = (1-\eta_D\alpha)\|\boldsymbol{r}_D^k\| \quad (17)$$

그런데, 보조정리 2와 정리 4에 의해서 $\bar{\varepsilon}>0$ 에 대해서 $\alpha^2(\overline{\Delta \boldsymbol{x}})^T\overline{\Delta \boldsymbol{z}} \le \bar{\varepsilon}$인 경우에 $(\boldsymbol{x}^{k+1})^T \boldsymbol{z}^{k+1} \approx \{1-\alpha(1-\gamma)\}(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k$로 표현할 수 있다. 이 때에 $\eta_P=\eta_D=1-\gamma$로 두면 매 회마다 원가능성 $\|\boldsymbol{r}_P^k\|$과 쌍대가능성 $\|\boldsymbol{r}_D^k\|$, 쌍대간격 $(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$이 같은 비율로 감소하게 된다. 따라서, 원가능성과 쌍대가능성이 빠르게 0으로 수렴했지만 쌍대간격의 수렴속도가 느릴 경우에는 $\eta_P, \eta_D \le 1-\gamma$로 두어 원가능성과 쌍대가능성의 수렴속도를 늦추어 준다.

4. 구현 및 실험 결과

이제 실제 컴퓨터에서 구현된 내부점 방법 프로그램에서 수렴속도 조절 방법을 고려하자. 수렴속도에 의한 문제가 발생하는 경우는 다음과 같다. 각각의 경우에 대해서 서로 다른 값으로 η_P, η_D를 설정한다.

(1) 쌍대가능성은 빠르게 수렴하지만, 원가능성과 쌍대간격의 수렴속도가 느린 경우

쌍대해는 가능해에 빨리 도달하지만, 원해가 원가능성에 이르는 데에 많은 회수가 소요된다. 수치적으로 불안정해져서 쌍대해도 가능성을 잃고 결과적으로 최적해에 수렴하지 못하게 될 수 있다. η_D의 값을 낮추어 수렴속도를 늦추어 준다. η_P와 η_D의 값은 각각 $\eta_P=0.9$, $\eta_D=0.7$로 설정하였다. 원가능성과 쌍대가능성의 차이가 $\|\boldsymbol{r}_P^k\| > 10^5 \times \|\boldsymbol{r}_D^k\|$가 될 때에 적용하였다.

(2) 원가능성은 빠르게 수렴하지만, 쌍대가능성과 쌍대간격의 수렴속도가 느린 경우

경우 (1)의 반대되는 경우이다. η_P와 η_D의 값은 각각 $\eta_P=0.7$, $\eta_D=0.9$로 설정하였다. 원가능성과 쌍대가능성의 차이가 $\|\boldsymbol{r}_D^k\| > 10^5 \times \|\boldsymbol{r}_P^k\|$가 될 때에 적용하였다.

(3) 원가능성과 쌍대가능성은 빠르게 수렴하지만, 쌍대간격의 수렴속도가 느린 경우

원가능성과 쌍대가능성은 만족되었으나 쌍대간격이 0으로 빠르게 수렴하지 못해서 가능성이 깨어지는 경우이다. 경우 (1)과 경우 (2)의 과정을 거친 다음에 해법 말기에 이르면 경우 (3)과 같은 현상이

[표 1] NETLIB 문제에 대한 실험

문제	크기			LPABO 5.4f		LPABO 5.5f	
	행	열	비영요소	반복수	시간	반복수	시간
25fv47	822	1571	11127	23	2.33	21	2.07
80bau3b	2263	9799	29063	37	8.25	39	7.64
bnl2	2325	3489	16124	25	6.88	27	7.31
cycle	1904	2857	21322	29	3.64	33	3.88
czprob	930	3523	14173	36	0.75	32	0.72
d2q06c	2172	5167	35674	27	19.44	25	17.48
d6cube	416	6184	43888	23	8.67	21	7.82
degen3	1504	1818	26230	19	13.14	29	18.59
dfl001	6072	12230	41873	46	1315.55	62	1728.22
fit1d	25	1026	14430	21	0.62	26	0.79
fit1p	628	1677	10894	14	0.72	18	0.83
fit2d	26	10500	138018	28	9.80	28	9.62
fit2p	3001	13525	60784	19	7.74	21	8.65
greenbea	2393	5405	31499	42	12.88	37	9.06
greenbeb	2393	5405	31499	31	9.19	36	7.98
maros	847	1443	10006	21	1.28	20	1.12
nesm	663	2923	13988	27	2.31	27	2.30
pilot	1442	3652	43220	31	44.60	33	46.45
pilot87	2031	4883	73804	32	156.46	32	153.39
pilotja	941	1988	14706	27	4.49	30	5.12
pilotnov	976	2172	13129	16	2.55	16	2.51
scsd8	398	2750	11334	12	0.30	13	0.33
sctap3	1481	2480	10734	19	1.00	21	0.91
ship08l	779	4283	17085	20	0.86	20	0.87
ship12l	1152	5427	21597	18	1.17	21	1.11
ship12s	1152	2763	10941	17	0.41	19	0.37
stocfor3	16676	15695	74004	27	22.70	28	18.28
truss	1001	8806	36642	17	4.35	17	4.23
wood1p	245	2594	70216	25	7.26	26	7.31
woodw	1099	8405	37478	29	6.12	34	6.40

나타나는 경우도 많다. η_P와 η_D의 값은 $\eta_P = \eta_D = 0.75$로 설정하였다.

Sun Ultra 170 워크스테이션에서 비가능 내부점 방법을 구현하여 수렴 속도 조절을 위해 η_P, η_D를 적용한 경우와 그렇지 않은 경우를 비교 실험하였다. LPABO 5.4f는 기존의 비가능 원쌍대 내부점방법을 사용한 프로그램이다. LPABO 5.5f에서는 수렴 속도 조절을 하도록 하였다. 실험 문제는 Netlib 선형계획법 실험 문제[4], Kennington 선형계획법 실험 문제, Gondzio의 선형계획법 실험 문제를 사용하였다.

[표 1]에서 보는 바와 같이 비교적 작은 문제인 Netlib 문제에 대해서는 두 가지 방법 가운데 어

[표 2] KENNINGTON 문제에 대한 실험

문제	크기			LPABO 5.4f		LPABO 5.5f	
	행	열	비영요소	반복수	시간	반복수	시간
cre-a	3517	4067	19054	28	4.43	34	3.48
cre-b	9649	72447	328542	X	X	34	370.93
cre-c	3069	3678	16922	27	3.76	32	3.07
cre-d	8927	69980	312626	X	X	35	295.91
ken-07	2427	3602	11981	18	0.44	24	0.58
ken-11	14695	21349	70354	20	7.19	20	4.78
ken-13	28633	42659	139834	X	X	25	24.45
ken-18	105128	154699	512719	X	X	27	228.02
osa-07	1119	23949	167643	34	14.19	40	17.62
osa-14	2338	52460	367220	29	29.88	41	42.50
osa-30	4351	100024	700160	30	62.76	45	94.70
pds-02	2954	7535	21252	21	1.68	24	1.51
pds-06	9882	28655	82269	28	101.96	28	100.82
pds-10	16559	48763	140063	36	726.74	32	632.75

[표 3] GONDZIO 문제에 대한 실험

문제	크기			LPABO 5.4f		LPABO 5.5f	
	행	열	비영요소	반복수	시간	반복수	시간
ch	3700	5062	20873	30	14.81	26	11.82
co5	5774	7993	53661	39	31.24	43	27.64
co9	10789	14851	101578	43	120.28	49	109.16
cq5	5048	7530	47353	36	26.06	46	26.49
cq9	9278	13778	88897	37	88.58	X	X
ge	10099	11098	39554	38	41.41	35	26.48
mod2	34774	31728	165129	X	X	57	334.72
nl	7039	9718	41428	34	50.71	36	52.00
world	34506	32734	164470	X	X	50	309.65

느 쪽이 더 낫다고 하기 어렵다. 수치적으로 불안정한 문제로 알려져 있는 greenbea, greenbeb와 같은 문제가 적은 회수만에 풀어낼 수 있었지만, dfl001과 같이 오히려 반복수가 많이 증가하는 경우도 발생한다. η_P와 η_D에 의한 수렴 속도 조절은 수렴비율이 불균형을 이룰 때에 빠르게 수렴하는 값들의 수렴속도를 늦추는 방법을 사용하기 때문에 수치적인 문제를 일으키지 않는 경우에는 오히려 계산속도를 느리게 할 수도 있기 때문이다.

[표 2]와 [표 3]에서 보는 바와 같이 Kennington 문제나 Gondzio 문제와 같은 대형 선형계획법 문제에 대해서는 수렴 속도 조절에 의한 방법이 전반적으로 우수한 것으로 나타났다. 다만, Gondzio 문제 가운데에 cq9은 풀지 못하였다. 그러나, 나머지 문제에 대해서는 더 적은 반복수에 문제를 풀어내거나 이전에 풀지 못하던 문제들 - cre-b, cre-d, ken-13, ken-18, mod2, world - 을 풀 수 있었다. 이와같은 문제들은 LPABO 5.4f로 풀 경우에 원가능성 또는 쌍대가능성은 빠른 속도로 수렴하는 반면에 쌍대간격의 수렴 속도가 느린 문제들과 원가능성과 쌍대가능성의 수렴 속도 차이가 큰 경향을 보여 주었던 문제들이다. 이러한 문제들에 대해서 수렴 속도 조절이 효과가 있음을 보여준다.

참고문헌

[1] 성명기, 박순달, "원쌍대 내부점방법 선형계획법에서 반복수를 줄이는 방법들", 대한산업공학회 '97추계학술대회 논문집(CD-ROM), 1997.

[2] 성명기, 박순달, "원쌍대 내부점기법에서 초기해 선정과 중심화 힘을 이용한 개선방향의 수정", 대한산업공학회 /한국경영과학회 '96 춘계 공동 학술대회 논문집, pp. 550-533, 1996.

[3] Andersen, Erling D., Jacek Gondzio, Csaba Mészáros and Xiaojie Xu, "Implementation of interior point methods for large scale linear programming", Interior Point Methods in Mathematical Programming, T. Terlaky (ed.), Kluwer Academic Pub., 1996.

[4] Gay, D. M., "Electronic mail distribution of linear programming test problems", Mathematical Programming Society Committee on Algorithms Newsletter, No. 13, pp.10-12, 1985.

[5] Gondzio, Jacek, "Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming", Technical Report, 1995. 5.

[6] Gonzaga, Clovis C., "Path-following methods for linear programming", SIAM Review, Vol.34, No.2, pp.167-224, 1992

[7] Kojima, Masakazu., Shinji Mizuno and A. Yoshise, "A primal-dual interior point algorithm for linear programming", Progress in Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods, N. Megiddo (ed.), Springer-Verlag, New York, pp.29-48, 1989.

[8] Kojima, Masakazu, Nimrod Megiddo and Shinji Mizuno,"A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear programming", Mathematical Programming, No.61, pp.263-280, 1993.

[9] Lustig, I. J., R. E. Marsten, and D. F. Shanno, "Interior point methods for linear programming: Computational state of the art", ORSA Journal on Computing, Vol. 6, No.1, pp.1-15, 1994.

[10] Mehrotra, S., "On the implementation of a primal-dual interior point method", SIAM Journal on Optimization, Vol.2, No.4, pp.575-601, 1992.

[11] Mizuno, Shinji, "Polynomiality of infeasible-interior-point algorithms for linear programming", Mathematical Programming, No.67, pp.109-119, 1994.

[99년 4월 13일 접수, 99년 11월 18일 최종수정]