□研究論文□
韓國軍事運營分析學會誌
第 25 卷, 第 2 號, 1999. 12. 31.

경비정 수가 N인 경우의 세관원-밀수자 게임
(Customs and Smuggler Game where Customs Have N Patrol Boats)

오 형 재*

Abstract

This paper deals with the problem of Customs trying to stop a Smuggler attempting to ship a cargo of perishable contraband(or information) across a strait within the limited period. The papers concerning these fields referred by Thomas, Baston et al, and Garnaev, have treated games dealing with one, two, and three patrol boats against one smuggler ship respectively.

In this paper the author proposed a game model dealing with N patrol ships against one smuggler ship with the N boats being identical. The strategies for the gamers where games are conducted between them are shown in tables 3.3-1 and the game values thereof are in table 3.2-3.

The author has exhaustively filled up the assumptions and conditions in the paper to justify the above-mentioned results so that they may not loose the generality.

* 서울시립대학교

1. 서 론

세관원(customs)과 밀수자(smuggler)와의 게임은 일정기간이 지나면 무효가 되는 밀수품(혹은 정보)을 소지한 밀수자와, 이를 검색(detect)하려는 세관원간의 마분게임이다. 즉, 밀수자는 좁고 긴 해협을 $M(M>0)$ 기간 이내에 검색됨이 없이 渡江하여야 하고, 세관원은 그 기간 내에 최선을 다하여 밀수정을 검색하여야 한다.

최근까지 이 분야의 연구는 '폭격기-전함(Bomber-Battleship)게임'[6], '공주-괴물(Princess-Monster)게임' [7], '사격수-도주자(Gunner-Evader)게임' [9], '침투자 게임' [5] 등 다양한 이름으로 연구가 수행되어 왔다.

우선, 1983년 Lee의 논문[9]을 보면, Lee는 그의 논문에서 다음과 같은 게임을 제안하였다. 즉, 직선상의 한 점(i)에 위치한 도주자가 단위시간 경과 후 $i-1$, i, $i+1$로 이동할 때, 유한개의 탄환을 가진 사격수는 위의 세 가지 위치 중 하나를 겨냥하여 탄환 한 발을 발사한다. 이 때 도주자는 단위시간 경과시 마다 사격수 보유탄환의 개수를 알고 있으나, 그가 어느 위치를 겨냥하였는지는 모른다고 가정한다. 도주자에게는 한 곳의 안전지대가 있어 그가 여기에 들어오면 사격수의 사격은 무의미해진다. Lee는 본 게임에서 도망자 위치(i)와 탄환의 수(j)의 함수로 표현된 게임값 $v(i,j)$를 계산하였다. 그 후 Garnaev[3]는 Lee의 논문의 도주자의 범위를 직선에서 평면으로 확장하여 게임값 $v(i,j,k)$를 산출하였다. 여기서 (i,j)는 도주자 위치이고 k는 잔존 탄환의 수이다.

Lalley[8]는 전술한 게임을 약간 다른 각도에서 보았다. 즉, 그는 일정한 간격으로 놓인 n개의 매듭(vertex)을 갖는 밧줄이 있다 할 때, 만일 도주자가 안전지대인 첫 번째 매듭에서 출발하여 주어진 시간 내에 비검색 상태에서 안전지대인 n번째 매듭까지 도달하면 성공하는 게임을 제안하였다. 이 때 사격수는 자기자신도 밧줄의 어느 한 매듭에서 출발하여 도주자를 검색하게 되는데, 이 과정에서 도주자와 사격수가 특정매듭을 동시에 점령하면 도주자는 검색되도록 규칙을 정하고, 이 때의 게임전략과 게임값을 도출하였다. 그 후 Auger[1]는 Lalley의 논문을 진일보시켜 도망자나 추격자가 특정 매듭에서 한 개의 인접 매듭으로 $(k=1)$ 진행하는 제한을 완화하여 인접한 매듭이 k개 $(k>1)$ 인 경우로 확장하였다.

본 연구는 Thomas[10]의 논문인 '시간 의존적 payoff을 갖는 침투게임' 에서 출발하였다. 그 이유는 Thomas는 1척의 밀수정과 1척의 경비정간의 게임을 다루었고, Baston과 Bostock[2]은 경비정 두척의 경우를, 그리고 Garnaev[4]은 3척의 경우를 다루고 있어, 이들 세 편의 논문간에 연계성이 많기 때문이다. 그러나 Garnaev은 경비정이 증가하면 계산량이 NP-complete이 된다고 보고 그 이상 발전시키지 않았다. 따라서, 경비정이 N 인 경우를 다룬 논문이 아직까지 없으므로 본 논문에서는 경비정의 성능이 동일하다는 전제하에 이 문제의 해를 유도하였다.

상기한 세 편의 논문에도 Lalley가 설정한 바와 같이 밀수정에는 두 군데의 안전지대가 있음은 흥미롭다. 즉, 도강이 끝난 쪽의 강변은 물론 안전지대이고, 도강하려는 쪽의 강변도 도주자 레이더의 에코(echo)현상으로 검색자 측의 강변에 쉐도우(shadow)현상이 일어나 역시 안전지대가 되기 때문이다.

2. 이론적 배경

2.1 한 척의 밀수정, 한 척의 경비정인 경우의 게임 (1 - 1 게임)

2.1.1 게임상황

M 기간이 지나면 유효기간이 만료되는 밀수품을 소지한 밀수자 B(이하 게임자 B, 혹은 B)는 길고 좁은 해협(long and narrow strait)을 모터보트로 M 기간 내에 도강하려 하고, 스피드 보트를 가진 세관원(이하 게임자 A, 혹은 A)은 그 기간 내에 게임자 B를 검색하려 한다. 여기서 해협은 B가 A에게 검색되지 않고 성공적으로 도강할 수 있을 정도로 충분히 긴 해협이고, B가 충분히 해안을 이탈하기 전까지, A측에 장착한 레이더는 자신의 에코현상 때문에 B의 검색이 불가능하다.

2.1.2 게임의 가정

본 게임에서는 다음사항을 가정한다.

- A측의 검색정보에 오류는 없다. 그러므로 일단 B가 검색되면 B는 반드시 붙잡힌다.
- A측의 경비정 수는 밀수품 유효기간 M 보다 적다.
- B측의 성공이란 M기간(통상 M일 저녁)동안의 어느 특정일에 밀수정이 무사히 해협을 도강, 완료함을 의미한다.
- A와 B는 M값보다 적거나 같은 정찰 가능일을 공히 알고 있다.

2.1.3 게임모형 및 해

g_k^n, $k < M$, $n = M, M-1, \cdots, 1$ 을 (2)의 전제하에 n과 k에 의해 결정되는 게임이라 하자. 그러면 이 게임을 위한 게임행렬은 다음과 같이 주어진다.

A의 행동	B의 행동	
	도강	비 도강
정찰	v (게임 끝)	G_{k-1}^{n-1}
비 정찰	-1(게임 끝)	G_k^{n-1}

<그림 2.1-1> 1-1게임행렬 G_k^n

<그림 2.1-1>에서 v는 A의 정찰과 B의 도강이 시도되면 A는 v만큼의 게임 값을 얻게 되고 A의 정찰과 B의 비도강 하에서는 게임 날자가 하루 줄어 v는 $n-1$이 되고, 정찰 가능일도 하루 줄어 k는 $k-1$이 된다. 또한, A의 비정찰하에서 B가 도강하면 B의 성공으로 A는 -1을 당하게 되며 B가 도강하지 않으면 게임 날자는 하루 감소되어 n은 $n-1$이 되지만 정찰 가능일은 k로써 변함이 없음을 나타내고 있다.

영화(zero-sum) 게임에서 게임 행렬이 $n \times n$ 인 경우, 게임자간의 전략벡터 벡터 X, 벡터 Y는 다음과 같이 구해진다.

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{J_n A^+}{J_n A^+ J_n'}$$

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) = \frac{J_n A^{+'}}{J_n A^+ J_n'} \qquad (2.1\text{-}1)$$

단, $J_n = (1, 1, \cdots, 1)$ i.e., $(1 \times n)$ 행렬,

A^+ = 게임 행렬 A의 adjoint.

(2.1-1)을 이용하면 G_k^n의 게임값 g_k^n는 다음과 같다;

$$g_k^n = \frac{v \cdot g_k^{n-1} + g_{k-1}^{n-1}}{v + g_k^{n-1} + 1 - g_{k-1}^{n-1}}$$

$$\text{단, } g_0^n = -1,\ g_n^n = v,\ n > 0 \qquad (2.1\text{-}2)$$

(2.1-2)에서 $n > 0$ 에 대하여 $g_0^n = -1$ 이

되는 것은 A측에서 정찰 내보낼 경비정이 없으니 B의 도강이 성공했다는 의미이고, $g_n^n = v$는 A측에서 매일 정찰을 내보낼 수 있으니 A의 검색이 가능해져 v만큼의 게임값을 얻게 된다는 뜻이다.

g_k^n의 값은 순환식(recursive formula)으로 되어 있는 (2.1-2)이외에 다음과 같은 축약된 형태로도 표시 가능하다;

$$g_k^n = \frac{k(v+1)-n}{n}. \qquad (2.1\text{-}3)$$

(2.1-3)을 (2.1-2)에 대입하면 등식이 성립함을 이내 알 수 있다. (2.1-3)를 G_k^n 에 대입하면

$$G_k^n = \begin{bmatrix} v & \frac{(k-1)(v+1)-(n-1)}{n-1} \\ -1 & \frac{k(v+1)-(n-1)}{n-1} \end{bmatrix}$$

와 같이 표시되므로 게임자 A와 게임자 B의 최적전략은 다음과 같이 도출된다;

$$x_k^n = \frac{k}{n},\ k < M,\ n = 1, \cdots, M$$

$$y_k^n = \frac{1}{n},\ k < M,\ n = 1, \cdots, M$$

단, x_k^n : A의 정찰확률,

y_k^n : B의 도강확률.

< 예 제 >

만일 $v=0.5$, $n=10$, $k=6$ 이면 A, B의 전략은 각각 $x_6^{10}=0.6$, $y_6^{10}=0.1$이고 $g_6^{10} = -0.1$이며 A, B 모두 비정찰, 비도강이면 게임은 G_6^9 이 되고 이때의 A, B의 전략은 각각 $x_6^9 = \frac{2}{3}$, $y_6^9 = \frac{1}{9}$, 그리고 $g_6^9 = 0$이다.

2.2 한 척의 밀수정, 두 척의 경비정인 경우의 게임 (1- 2게임)

2.2.1 게임상황 및 가정

이 경우 게임자 A는 두 척의 상이한 능력을 가진 경비정을 가지고 정찰에 나선다. 동일한 능력을 갖는 경비정일 경우라면 식은 더욱 단순해 질 것이다. 그리고 두 경비정의 정찰가능일도 k_1, k_2로 각각 상이하다고 가정한다.

본 게임에서는 B가 특정한 날 도강을 하지 않았다면 그는 다음날 도강여부를 결정하기 전에 A가 당일 어떤 경비정을 어떻게 사용하였는지를 알게된다고 가정하고. 마찬가지로 A도 B가 전날 어떠한 결정을 했는가를 미리 알게된다고 가정한다.

2.2.2 게임

$p(i)$, $i=1, 2$ 를 각각 1, 2번 경비정이 정찰에 나설 확률로 표시했을 때, 두 경비정이 동시에 정찰에 나설 때의 검색확률을 p로 표시하면 p의 값이 p_1+p_2 보다 크거나 같은 경우에는 < 정리 2.1a > 와 < 정리 2.1b >, 적은 경우에는 < 정리 2.2a >와 <정리 2.2b> 가 성립한다.

< 정리 2.1a >

만일 $p \geq p_1 + p_2$ 이고, $k_1, k_2 \leq n$ $(n \geq 1)$ 이면 게임자 B는 게임자 A의 기대치가 다음값 이상이 되지 않도록 제한할 수 있다

$$g_{k_1,k_2}^n = \begin{cases} \frac{2k_1p+2(k_2-k_1)p_2-n}{n}, & k_1 \leq k_2, \\ \frac{2k_2p+2(k_1-k_2)p_1-n}{n}, & k_2 \leq k_1. \end{cases}$$

증명 :

수학적 귀납법으로 증명한다. $n=1$이고 k_1, k_2가 0 혹은 1이면 위의 정리는 성립한다. 이제 $n = m$

이고 $(k_1, k_2 \le m)$, $k_1 < k_2 < m+1$ 이라 할 때, 게임 $G^{m+1}_{k_1, k_2}$ 를 고려하자.

B가 첫날 $\frac{1}{m+1}$ 의 확률로 도강을 시도한다 하고, 첫날 다음의 (가)-(라)에 나타난 A의 4가지 전략을 고려하면, 4가지 경우 모두, B는 A의 기대치가 (2.2-1) - (2.2-4)에 나타난 게임값 이상이 되지 않도록 제한 할 수 있다.

(가) 경비정을 한 척도 내보내지 않을 경우

$$\frac{-1}{m+1} + \frac{m}{m+1}\,\frac{2k_1p + 2(k_2-k_1)p_2 - m}{m} = g^{m+1}_{k_1, k_2}, \tag{2.2-1}$$

(나) 두 경비정을 모두 내보낼 경우

$$\frac{2p-1}{m+1} + \frac{m}{m+1}\,\frac{2(k_1-1)p + 2(k_2-k_1)p_2 - m}{m} = g^{m+1}_{k_1, k_2}, \tag{2.2-2}$$

(다) 경비정 #1을 내보낼 경우

$$(2p_1-1)\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}\,\frac{2(k_1-1)p + 2(k_2-k_1+1)p_2 - m}{m} = g^{m+1}_{k_1, k_2} + \frac{2(p_1+p_2-p)}{m+1} \le g^{m+1}_{k_1, k_2}, \tag{2.2-3}$$

(라) 경비정 #2를 내보낼 경우

$$(2p_2-1)\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}\,\frac{2k_1p + 2(k_2-1-k_1)p_2 - m}{m} = g^{m+1}_{k_1, k_2}. \tag{2.2-4}$$

따라서 정리는 증명되었다.

위의 증명과정에서 (2.2-2)와 (2.2-3)은 시사하는 바가 크다. 그것은 만일 $p > p_1 + p_2$의 경우는 경비정 두 척을 동시에 내보내는 것이 경비정을 한 척씩 분리하여 내보내는 것보다 더 효율적이라는 사실이다. 후술되겠지만, $p < p_1 + p_2$의 경우는 경비정 두 척을 동시에 정찰에 내보내는 것보다는 한 척씩 따로따로 내보내는 것이 더 효율적이라는 결과를 얻게된다.

< 정리 2.1b >

만일 $p \ge p_1 + p_2$ 이고, $k_1, k_2 \le n\,(n \ge 1)$ 이면 게임자 A가 취할 수 있는 최소한의 게임값은 <정리 2.1a>의 결과와 같다.

증명:

$n=1$ 의 경우는 생략하고, $g^{m+1}_{k_1, k_2}$의 경우만 고찰해 보기로 한다. A가 경비정을 정찰에 내보낼 때, 두 척의 경비정은 $\frac{k_1}{m+1}$의 확률로, #2 경비정은 $\frac{k_2-k_1}{m+1}$의 확률로, 그리고 $\frac{m+1-k_2}{m+1}$ 의 확률로는 전혀 경비정을 내보내지 않는다고 하면, B가 첫날 도강을 시도할 때와 하지 않을 때의 A의 기대치는 다음과 같다.

(가) 도강을 시도할 때

$$(2p-1)\frac{k_1}{m+1} + (2p_2-1)\frac{k_2-k_1}{m+1} + \frac{(-1)(m+1-k_2)}{m+1} = g^{m+1}_{k_1, k_2}, \tag{2.2-5}$$

(나) 도강을 시도하지 않을 때

$$\frac{k_1}{m+1} g^{m}_{k_1-1, k_2-1} + \frac{k_2-k_1}{m+1} g^{m}_{k_1, k_2-1} + \frac{m+1-k_2}{m+1} g^{m}_{k_1, k_2} = g^{m+1}_{k_1, k_2}. \tag{2.2-6}$$

따라서 증명이 완료된다.

< 정리 2.2a >

만일 $p < p_1 + p_2$ 이고 $k_1, k_2 \le n\,(n \ge 1)$이면 B는 A의 기대치가 다음값 이상이 되지 않도록 제한 할 수 있다.

$$g^{n}_{k_1,k_2}=\begin{cases}\dfrac{2k_1p_1+2k_2p_2-n}{n}, & k_1+k_2\le n \quad (2.2\text{-}8)\\ \dfrac{2(k_1+k_2-n)p+2(n-k_2)p_1}{n}+\dfrac{2(n-k_1)p_2-n}{n}, & k_1+k_2\ge n.\end{cases}$$

(2.2-9)

증명 :

$n=1$이고 k_1, k_2 가 0 혹은 1이면 위 식은 성립한다. 정리의 결과가 $k_1, k_2 \le m$ 이고 $n=m$일 때 성립한다고 가정하고 게임 $G^{m+1}_{k_1,k_2}$ $k_1, k_2 \le m+1$을 생각하자. 밀수자가 첫 날 $1/(m+1)$의 확률로 도강을 시도한다하고 k_1+k_2의 값이 $m+1$보다 크거나 같은 경우와 적은 경우를 고찰해보면 다음과 같다.

(가) $k_1+k_2\ge m+1$일 때

세관원이 첫날 경비정을 전혀 정찰에 내보내지 않을 경우는

$$(-1)\frac{1}{m+1}+\frac{m}{m+1}\,\frac{2(k_1+k_2-m)p+2(m-k_2)p_1+2(m-k_1)p_2-m}{m}$$
$$=g^{m+1}_{k_1,k_2}+\frac{2(p-p_1-p_2)}{m+1} < g^{m+1}_{k_1,k_2} \qquad (2.2\text{-}10)$$

을 얻고, 경비정 #1을 내보내면,

$$\frac{2p_1-1}{m+1}+\frac{m}{m+1}\left\{\frac{2(k_1-1+k_2-m)p+2(m-k_2)p_1}{m}+\frac{2(m-k_1+1)p_2-m}{m}\right\}=g^{m+1}_{k_1,k_2}, \qquad (2.2\text{-}11)$$

같은 방법으로 경비정 #2를 내보낼 때와 두 경비정을 내보낼 때에도 (2.2-11)식과 같이 좌변은 $g^{m+1}_{k_1,k_2}$과 등식을 이룬다.

(나) $k_1+k_2 < m+1$일 때

세관원이 첫날 두 척의 경비정을 정찰에 내보낸다면 그의 게임값의 최대치는

$$\frac{2p-1}{m+1}+\frac{2(k_1-1)p_1+2(k_2-1)p_2-m}{m+1}$$
$$=g^{m+1}_{k_1,k_2}+2(p-p_1-p_2) < g^{m+1}_{k_1,k_2}. \qquad (2.2\text{-}12)$$

만일 세관원이 첫날 단 한 척의 경비정을 정찰에 내보냈다면 그의 게임의 최대치는 역시 $g^{m+1}_{k_1,k_2}$가 된다. 따라서 정리는 증명되었다.

<정리 2.2b >

만일 $p < p_1+p_2$ 이고 $k_1, k_2 \le n\,(n\ge 1)$ 이면 게임자 A가 취할 수 있는 최소한의 게임값은 <정리 2.2a>의 결과와 같다.

<정리 2.2b>의 결과는 <정리 2.1a>에서 <정리 2.1b>를 증명한 것과 비슷한 방법으로 증명이 가능하므로 생략한다.

경비정의 성능이 모두 동일하다고 가정하면, 경비정이 두 척인 경우에는 $p < p_1+p_2$가 성립한다. 그 이유는 $1-(1-p)^2 < 2p$가 성립하기 때문이다. 이 식은 경비정이 n 인 경우도 성립한다(보조정리 참조). 따라서 본 논문은 < 정리 2.2a >의 조건에 해당한다.

< 보조정리 >

$1-(1-p)^n$은 np보다 적다. (2.2-13)

증명:

수학적 귀납법으로 증명이 가능하다. 위의 식이 $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때를 보면

$1-(1-p)^{(k+1)} < 1-(1-p)^k < kp < (k+1)p$이 성립하기 때문이다. <정리 2.1a> 에서 <정리2.2b> 까지를 종합하면 <정리 2.3>을 얻는다.

< 정리 2.3 >

게임 $G^{n}_{k_1,k_2}$의 게임값 $g^{n}_{k_1,k_2}$은 $k_1 \le k_2 \le n$ 의 상태 하에서 각각 다음과 같다.

$$\frac{2k_1p+2(k_2-k_1)p_2-n}{n}, \quad p \ge p_1+p_2$$

$$\frac{2k_1p_1+2k_2p_2-n}{n}, \quad p < p_1+p_2, \ k_1+k_2 \le n$$

$$\frac{2(k_1+k_2-n)p+2(n-k_2)p_1+2(n-k_1)p_2-n}{n},$$

$$p < p_1+p_2, \quad k_1+k_2 \ge n.$$

2.3 한 척의 밀수정, 세 척의 경비정인 경우의 게임 (1-3 게임)

2.3.1 게임상황

경비정이 두 척의 경우에서 세 척으로 증가된 게임이므로 상황에 추가적인 요소는 없다. 그러나 게임자 A의 게임전략의 수가 8개로 늘어남에 따라 각각의 전략에 대응하는 확률을 계산하는 일이 복잡해지며 따라서 경비정의 수가 n이 되면 전략의 수는 2^n으로 증가하여 NP-complete에 이른다.

게임자 A의 8가지 전략은 다음과 같다 ;

- 한 척을 내보내는 경우 (3가지)
- 두 척을 내보내는 경우 (3가지)
- 세 척을 내보내는 경우 (1가지)
- 전혀 보내지 않는 경우 (1가지).

본 게임에서 $p_1 \le p_2 \le p_3$, $k_i \le n$, $i=1,3$ 으로 가정하고 게임 $G^{n}_{k_1,k_2,k_3}$ 을 살펴보기로 한다.

2.3.2 1-3 게임

우선 게임 G의 matrix는 다음과 같다.

게임자 A		게임자 B 도강 (y_1)	게임자 B 비도강 (y_2)
한척의 경우	x_1	$2p_1-1$	$G^{n-1}_{k_1-1,k_2,k_3}$
	x_2	$2p_1-1$	$G^{n-1}_{k_1,k_2-1,k_3}$
	x_3	$2p_1-1$	$G^{n-1}_{k_1,k_2,k_3-1}$
두척의 경우	x_4	$2p_2-1$	$G^{n-1}_{k_1-1,k_2-1,k_3}$
	x_5	$2p_2-1$	$G^{n-1}_{k_1,k_2-1,k_3-1}$
	x_6	$2p_2-1$	$G^{n-1}_{k_1-1,k_2-1,k_3}$
세척의 경우	x_7	$2p_3-1$	$G^{n-1}_{k_1-1,k_2-1,k_3-1}$
비정찰의 경우	x_8	-1	$G^{n-1}_{k_1,k_2,k_3}$

게임 matrix G에서 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_8)$ 과 $Y=(y_1, y_2)$는 각각 게임자 A와 B의 전략 벡터이다.

수식을 간결하게 하기 위하여 $g^{n}_{k_1,k_2,k_3}$을 게임 G의 게임값이라 하고

$$s^{n}_{k_1,k_2,k_3} = g^{n}_{k_1,k_2,k_3}+1$$

$$a_i = 2p_i$$

로 놓으면 $n \ge k_1, k_2, k_3 > 0$ 에 대하여 전략벡터 X와 Y 는 다음 부등식이 만족될 때 최적전략이 된다.

$$y_1a_1+y_2s^{n-1}_{k_1-1,k_2,k_3} \le s^{n}_{k_1,k_2,k_3} \quad (2.3\text{-}1)$$

$$y_1a_1+y_2s^{n-1}_{k_1,k_2-1,k_3} \le s(\ .\ ) \quad (2.3\text{-}2)$$

$$y_1a_1+y_2s^{n-1}_{k_1,k_2,k_3-1} \le s(\ .\ ) \quad (2.3\text{-}3)$$

$$y_1a_2+y_2s^{n-1}_{k_1-1,k_2-2,k_3} \le s(\ .\ ) \quad (2.3\text{-}4)$$

$$y_1a_2+y_2s^{n-1}_{k_1,k_2-1,k_3-1} \le s(\ .\ ) \quad (2.3\text{-}5)$$

$$y_1a_2+y_2s^{n-1}_{k_1-1,k_2,k_3-1} \le s(\ .\ ) \quad (2.3\text{-}6)$$

$$y_1a_3+y_2s^{n-1}_{k_1-1,k_2-2,k_3-1} \le s(\ .\ ) \quad (2.3\text{-}7)$$

$$y_2 s^{n-1}_{k_1,k_2,k_3} \le s(\ .\ ) \qquad (2.3\text{-}8)$$

$$(x_1+x_2+x_3)a_1+(x_4+x_5+x_6)a_2+x_7a_3 \ge s(\ .\ ) \qquad (2.3\text{-}9)$$

$$\begin{aligned} &x_1 s^{n-1}_{k_1-1,k_2,k_3}+x_2 s^{n-1}_{k_1,k_2-1,k_3} \\ &+x_3 s^{n-1}_{k_1,k_2,k_3-1}+x_4 s^{n-1}_{k_1-1,k_2-1,k_3} \\ &+x_5 s^{n-1}_{k_1,k_2-1,k_3-1}+x_6 s^{n-1}_{k_1-1,k_2,k_3-1} \\ &+x_7 s^{n-1}_{k_1-1,k_2-1,k_3-3}+x_8 s^{n-1}_{k_1,k_2,k_3} \ge s(\ .\ ) \end{aligned} \qquad (2.3\text{-}10)$$

단, 경계조건으로 $s^n_{k_1,0,0}$ 은 (2.1-2)를 따르며

$s^n_{k_1,k_2,0}$ 은 <정리 2.3>의 결과를 따른다.

< 정리 2.4 >

$$a_1+a_3 < 2a_2 \qquad (2.3\text{-}11)$$

$$a_2 < 2a_1 \qquad (2.3\text{-}12)$$

이 성립하면 $n \ge k_1 \ge k_2 \ge k_3 > 0$ 에 대하여, $Y=(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})$ 이고, $s^n_{k_1,k_2,k_3}$, 혹은 단순히 표시하여 s 값과 전략벡터는 다음과 같다. 아래의 (가)-(다)에서 $k=k_1+k_2+k_3$ 이다.

(가) 경우 #1 ($k \le n$)

$$s=\frac{ka_1}{n},$$

$$x_i=\frac{k_i}{n},\ i=1,3,\ x_j=0,\ j=4,7,\ x_8=\frac{n-k}{n}$$

(나) 경우 #2 ($n < k \le 2n$)

$$s=\frac{(2n-k)a_1+(k-n)a_2}{n},$$

$$x_i=\frac{2n-k}{3n},\ i=1,3,\ x_j=\frac{k-n}{3n},\ j=4,6,$$

$$x_7=x_8=0,$$

(다) 경우 #3 ($2n < k \le 3n$)

$$s=\frac{(3n-k)a_2+(k-2n)a_3}{n},$$

$$x_i=0,\ i=1,3,\ x_j=\frac{3n-4}{3n},\ j=4,6,$$

$$x_7=\frac{k-2n}{n},\ x_8=0.$$

< 증명 >

(가) 경우 #1

부등식 (2.3-1)-(2.3-3), (2.3.8)-(2.3.10)은 등식으로써 만족된다. (2.3-1)의 경우를 살펴보면 다음과 같다.

$$(2.3\text{-}1):\ \text{LHS} = \frac{1}{n}a_1+\frac{n-1}{n}\cdot(k-1)\frac{a_1}{n-1} = k\frac{a_1}{n} = \text{RHS},$$

같은 방법으로 (2.3-8) - (2.3-10)이 증명된다. (2.3-4) - (2.3-6)은 부등식으로 만족된다. 세 개의 식 중 하나만 증명하면 나머지는 같은 요령이므로 (2.3-4)만을 살펴보면 다음과 같다.

$$(2.3\text{-}4):\ \text{LHS} = \frac{a_2}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot(k-2)\frac{a_1}{n-1} = \frac{ka_1+(a_2-2a_1)}{n},$$

한편, $\text{RHS} = \frac{ka_1}{n},$

위의 두 식은 본 정리의 가정인 (2.3-12)에 의해 LHS < RHS 가 되어 성립한다. 끝으로 (2.3-7)은 다음과 같이 증명된다.

$$(2.3\text{-}7):\ \text{LHS} = \frac{a_3}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot(k-3)\frac{a_1}{n-1} = k\frac{a_1}{n}+\frac{a_3-3a_1}{n},$$

그리고, $\text{RHS} = \frac{ka_1}{n},$

위의 두식은 $a_3 < 3a_1$ 이 성립할 때 LHS < RHS 가 된다. 그런데 (2.3-11)로부터 $a_1+a_3 < 2a_2 < 4a_1$

이 성립하므로 $a_3 < 3a_1$, 그러므로 (2.3-7)이 증명된다.

(나) 경우 #2

(2.3-1)-(2.3-6), (2.3-9), (2.3-10)은 등식으로써 만족되며, 부등식 (2.3-7), (2.3-8)은 각각 (2.3-11), (2.3-12)와 같다.

(다) 경우 #3

부등식 (2.3-4)-(2.3-7), (2.3-9),(2.3-10)은 등식으로써 만족되며, 부등식 (2.3-1)-(2.3-3)은 (2.3-11)과 같은 표현이며, 부등식 (2.3-8)은 $2a_3-3a_2$와 같은데 이 부등식은 (2.3-11), (2.3-12)에 의하여 다음과 같은 관계에서 곧 증명된다.

$$2a_3-3a_2<4a_2-2a_1-3a_2<0.$$

3. 경비정이 N인 경우의 게임

3.1 경비정의 성능이 동일한 경우의 1-3게임

경비정의 성능이 동일하다면 1-3게임은 다음과 같이 단순하게 표현된다 ;

$$y_1a_1+y_2s_{k-1}^{n-1} \le s_k^n \quad (3.1\text{-}1)$$

$$y_1a_2+y_2s_{k-2}^{n-1} \le s_k^n \quad (3.1\text{-}2)$$

$$y_1a_3+y_2s_{k-3}^{n-1} \le s_k^n \quad (3.1\text{-}3)$$

$$y_2s_k^{n-1} \le s_k^n \quad (3.1\text{-}4)$$

$$x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3 \ge s_k^n \quad (3.1\text{-}5)$$

$$x_1s_{k-1}^{n-1}+x_2s_{k-2}^{n-1}+x_3s_{k-3}^{n-1}+x_4s_k^{n-1} \ge s_k^n \quad (3.1\text{-}6)$$

단, 경계조건으로서,

1척의 경우, $s_k^n=\frac{ka_1}{n}$ (3.1-7)

2척의 경우,

$$s_k^n=\frac{ka_1}{n},\ a_2\le 2a_1,\ k<n, \quad (3.1\text{-}8)$$

$$s_k^n=\frac{(2n-k)a_1+(k-n)a_2}{n},\ a_2\le 2a_1,\ k>n \quad (3.1\text{-}9)$$

3.2 경비정의 성능이 동일한 경우의 1-N게임

경비정 성능이 동일할 때 < 정리 2.4 >의 경우 #3에 대한 증명과정을 다시 한번 음미할 필요가 있다. 즉, $2n<k\le 3n$ 인 경우는 경비정을 2-3척을 보내는 전략이 최적인바 이 때 만족되어야 할 제약식은 (2.3-1) - (2.3-3)으로써 경비정 한 척의 경우, 그리고 (2.3-8)로써 경비정을 내보내지 않은 경우였다.

따라서 $3n<k\le 4n$ 인 경우 만족되어야 할 제약식은 경비정 1-2척의 경우와 비정찰의 경우에 해당하는 제약식이 될 것이고 일반적으로 $(M-1)n<k\le Mn$ 의 경우 만족되어야 할 제약식은 경비정 $1\sim(M-2)$척의 경우와 비정찰의 경우에 해당하는 제약식이 될 것이다.

3.2.1 $(M-1)n<k\le Mn$ 인 경우의 게임 모형의 제약식

경비정이 $1\sim(M-2)$인 경우의 제약식과 비정찰 경우의 제약식은 각각 다음과 같다.

$$a_{M-r-1}+ra_M<(r+1)a_{M-1},\ r=1,\cdots,M-2 \quad (3.2\text{-}1)$$

$$(M-1)a_M<Ma_{M-1}. \quad (3.2\text{-}2)$$

본 논문에서는 M개의 경비정이 동시에 정찰에 임했을 경우의 검색확률 p_M을 $1-(1-p)^M$으로 가정하였으므로 $1-p$ 를 $x\ (0<x<1)$로 놓으면 (3.2-1)은

$$x^r(r+1-rx)<1,\ \ r=1,\cdots,M-2$$

이 된다. 윗식에서 $f(x)=x^r(r+1-rx)$ 으로 놓으면 $x=1$ 일 때 $f(x)$는 최대치 1을 가지게 되어 (3.2-1)이 만족된다. 또한 (3.2-2)는

$$(M-1)a_M < Ma_{M-1} < M(M-1)a_1$$

혹은 $a_M < Ma_1$

이 되어 (2.2-13)에 의해 만족된다.

3.2.2 $(M-1)n < k \leq Mn$ 인 경우의 <정리 2.4>의 확장

따라서 경비정의 수의 범위가 $Mn<k<(M+1)n$ 일 때 게임자 A의 전략과 게임값은 각각 <표 3.2-2>, <표 3.2-3>과 같다.

<표3.2-2> $(M-1)n < k \leq Mn$일 때의 A의 전략

	정찰 경비정 수					
	1	2	3		$M-1$	M
$n < k \leq 2n$	$\frac{2n}{n}-\frac{k}{n}$	$\frac{k}{n}-\frac{n}{n}$				
$2n < k \leq 3n$		$\frac{3n}{n}-\frac{k}{n}$	$\frac{k}{n}-\frac{2n}{n}$			
…	…					
$(M-1)n<k \leq Mn$					$\frac{Mn}{n}-\frac{k}{n}$	$\frac{k}{n}-\frac{(M-1)n}{n}$

<표 3.2-2>는 우리에게 다음과 같은 결론을 준다.

1) 경비정 수가 정찰가용일과 같으면 $(k=n)$, 매일 1척의 경비정을 보낸다

2) 경비정 수가 정찰 가용일의 M배이면 $(k=Mn)$, 매일 M척의 경비정을 보낸다.

< 표 3.2-3 >의 의미는 다음과 같다 ;

1) $k=n$이면 $s=a_1$이다. 즉, 매일 1척의 경비정 정찰이 가능하므로 게임값은 $2p_1-1$와 같아진다.

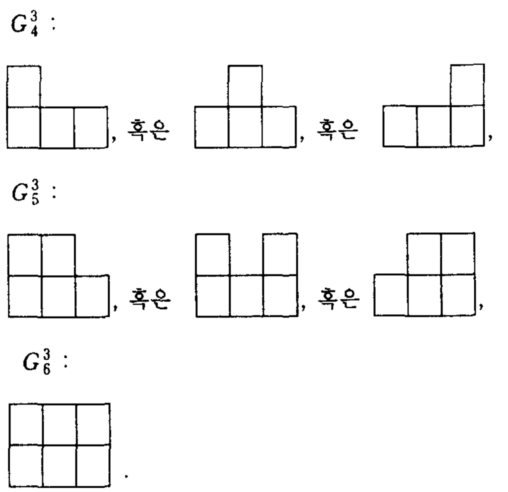
<표 3.2-3> 정찰가용일(k)에 따른 게임 값

k	S 값(게임값+1)
$n < k \leq 2n$	$\frac{(2n-k)a_1}{n}+\frac{(k-n)a_2}{n}$
$2n < k \leq 3n$	$\frac{(3n-k)a_2}{n}+\frac{(k-2n)a_3}{n}$
…	…
$(M-1)n<k\leq Mn$	$\frac{(Mn-k)a_{M-1}}{n}+\frac{(k-(M-1)n)a_M}{n}$

2) $k=Mn$ 이면 $s=a_M=2p_M-1$ 이다. 매일 M척의 경비정의 정찰이 가능하기 때문이다.

< 표 3.2-3 >을 의미를 파악하기 위해 예를 들어 $n=3,\ k=4,5,6$ 일 때를 그림으로 보이면 다음과 같다 ;

(가) $n < k \leq 2n$ 의 경우



<그림 3.2-1> $n < k \leq 2n$인 경우의 A의 게임전략

(나) $2n < k \le 3n$ 의 경우

경비정 2척 검색확률은 $\frac{3n-k}{n}$, 경비정 3척 탐색 확률은 $\frac{k-2n}{n}$ 이며, 예를 들어, $n=3, k=7,8,9$ 일 때를 그림으로 그려보면 < 그림 3.2-1 >의 그림 중 밑줄을 하나 더 그어 경비정을 한 척 증가시킨 것을 제외하고 동일하게 나타난다.

(다) $(M-1)n < k \le Mn$의 경우

같은 방법으로 $(M-1)n < k \le Mn$ 인 경우도 도표에 의한 확장이 가능하며, 따라서 경비정 수 증가에 따른 게임자 A의 전략벡터는 < 표 3.2-2 > 와 같다.

3.3 M 경비정인 경우의 정찰확률 및 게임값

경비정이 M인 경우의 정찰확률과 그때의 게임값에 대한 이론적 타당성을 입증하기 위해, 우선 성능이 동일한 M 경비정인 경우 게임 G_k^n을 고찰한다.

<표 3.3-1> M 경비정인 경우의, G_k^n $(M-1)<k<Mn$ 일 때

$y_1=\frac{1}{n}$	도강확률: $y_1=\frac{1}{n}$	비도강확률: $y_2=1-\frac{1}{n}$
$M-1$ 경비정 정찰확률 x_1: $\frac{Mn-k}{n}$	a_{M-1}	$s_{k-(M-1)}^{n-1}$
M 경비정 정찰확률 x_2: $\frac{k-(M-1)n}{n}$	a_M	s_{k-M}^{n-1}

단,

$$s_{k-(M-1)}^{n-1}=\frac{(Mn-k-1))a_{M-1}+(k-(M-1)n)a_M}{n-1},$$

$$s_{k-M}^{n-1}=\frac{(Mn-k)a_{M-1}+(k-(M-1)n-1)a_M}{n-1}.$$

< 표 3.3-1 >에서

x_1에 대하여, $a_{M-1}y_1+g_{k-(M-1)}^{n-1}\cdot y_2$ 의 값,

x_2에 대하여, $a_My_1+g_{k-M}^{n-1}\cdot y_2$의 값

들이 모두

$$\frac{(Mn-k)a_{M-1}+(k-(M-1)n)a_M}{n} \qquad (3.3\text{-}1)$$

로서 동일하며 이 값은 곧 s_k^n가 되어 흥미롭다. 이 사실은 $x_1+x_2=1$ 이면 게임자 A는 어떠한 전략을 사용하여도 동일한 결과를 얻는다는 의미인즉, 극단적으로

$$(x_1,x_2)=(0\ ,1) \qquad (3.3\text{-}2)$$

$$(x_1,x_2)=(1\ ,0) \qquad (3.3\text{-}3)$$

로 놓아도 (3.3-1)은 만족되어야 함을 의미하고 있다.

< 정리 3.3-1 >

(3.3-2), (3.3-3)의 전략이라도 그 결과는 궁극적으로 <표 3.3-1>에 나타난 x_1, x_2와 같아진다.

증명 :

(3.3-2)가 궁극적으로 x_1, x_2 의 전략과 같아지는 사실만 보이고자 한다. k의 값이 $(M-1)n < k \le Mn$ 일 때, $(x_1,x_2)=(0,1)$ 이면 첫날 게임 G_k^n 에서, 게임자 A는 게임자 B에게 도강시 a_M, 비도강시는 s_{k-M}^{n-1}을 발생케 하고, 둘째날의 게임 G_{k-M}^{n-1} 에서는 a_M, s_{k-2M}^{n-2} 의 값을 각각 발생케 한

다.

그러나 이 때, 가용경비정의 수가 정찰가용일의 정수배가 되면 잔여일은 정수배 만큼의 경비정 검색이 가능하다. 그리고 $(M-1)n < k \leq Mn$의 경우, n일 동안은 기본적으로 $M-1$ 척의 경비정을 할당할 수 있고, $k-(M-1)n$ 일 동안은 M척의 경비정을 할당할 수 있다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

최초 게임 G_k^n는 $k-(M-1)n$ 일이 지나면 경비정의 수는 $k-(k-(M-1)n)M$ 으로 감소하므로 G_k^n는 $k-(M-1)n$ 일 후

$$G_{k-(k-(M-1)n)M}^{n-(k-(M-1)n)} \qquad (3.3\text{-}4)$$

이 되며 (3.3-4)는

$$G_{(M-1)(Mn-k)}^{Mn-k} \qquad (3.3\text{-}5)$$

로 되어 경비정의 수가 정찰가용일의 정수배가 된다. 따라서 게임자 A는 $k-(M-1)n$일 동안은 M척의 경비정을, $Mn-k$ 일 동안은 $M-1$척의 경비정을 정찰에 할당할 수 있게 되므로, 각각의 경우의 확률은 <표 3.3-1>과 같아진다.

<예 제>

G_{10}^3에서 $k=10$은 $(4-1)\cdot 3 < 10 < 4\cdot 3$ 이므로 $M=4$ 이다. 따라서 $k-(M-1)n = 10-9$인 1일 동안은 4척의 경비정 할당이 가능하므로 1일이 지나면 게임 G_{10}^3은 G_6^2이 되는 바, G_6^2 에서 6은 2의 3배 $(M-1)$ 가 되어 나머지 2일 동안은 3척의 경비정할당이 가능하다.

4. 결 론

본 논문은 일정한 유효기간이 지나면 효력을 상실하는 밀수품(혹은 군사정보)을 소지한 한 척의 밀수자(혹은 간첩)를 N척의 경비정을 운영하는 세관원이 주어진 기간동안 어떠한 규칙(rule)에 의해 경비정을 할당할 것인가에 대한 전략을 고찰한 것이다. 이 분야의 논문에는 한 척 내지는 3척의 경비정인 경우에 대한 논문은 발표된바 있으나 일반적으로 N척인 경우는 없다. 3척인 경우의 논문을 발표한 Garnaev는 3척의 경비정이 모두 그 기능들이 각각 상이한 경우를 다루었으며, 따라서 N척인 경우는 NP-complete으로 계산불가를 지적하였다.

본 논문에서는 N척의 경비정의 성능을 동일하게 보고 논리를 전개하였다. 따라서 N척의 경비정이 한 간첩선을 검색할 확률은, 한 경비정의 검색확률을 p로 보았을 때, $1-(1-p)^N$ 으로 표현된다. N척의 경우 밀수자에 대한 전략벡터는 < 표 3.3-1 >에 나타난 대로 유효기간 (n)과 경비정의 수 (k)간에 $(M-1)n < k < Mn$ 의 관계가 있을 때, $M-1$ 척의 경비정을 정찰에 내보낼 확률 x_1은 $(Mn-k)/n$, M척의 경우 x_2는 $(k-(M-1)n)/n$이고, 그때의 게임값은 $(x_1 a_{M-1} + x_2 a_M)/(n-1)$ 이다.

한가지 흥미로운 결과는 밀수자가 도강가용기간 (n) 동안 도강확률은 $1/n$, 비도강확률을 $1-1/n$으로 하는 한, 게임값은 M경비정 정찰확률과 $M-1$ 경비정 정찰확률의 합이 1이 되기만 하면, <표 3.3-1>의 전략이 어떤 확률값이냐에 관계없이 얻어진다는 사실이다. 그러나 이 결과는 게임기간이 하루씩 감소하다가 어느 날 경비정의 수가 검색가용일의 정수배가 되면 잔여기간동안은 해당 정수만큼

의 경비정을 정찰에 내보내는 것이 최적이므로 이 사실을 이용하면 결국 전략 x_1, x_2 는 <표 3.3-1>과 같아진다.

참고 문헌

[1] Auger, J. M., "An Infiltration Game on k Arcs," Naval Resesarch Logistics, 38, 511-529 ,1991.

[2] Baston, V. J., and Bostock, F., A., " A Generalized Inspection Game," Naval Research Logistics, 38, 171-182, 1991.

[3] Garnaev, A. Yu.," A Discrete Game with Time Lag in a Plane," Automation and Remote Control, 50, 1480-1487, 1989.

[4] Garnaev, A., " A Remark on the Customs and Smuggler Game, " Naval Research Logistics, 41, 287-293, 1994.

[5] Garnaev, A., " On the Infiltration Game," International J. of Game Theory 26, 215-221, 1997.

[6]. Isaacs, R., and Karlin, S., " A Game of Aiming and Evasion," The Rand Corporation, Research Memorandum, No. RM-1316, 1954

[7] Isaacs, R., Differential Game, Wiley, New York, 1965.

[8] Lalley, S., P., " A One-Dimensional Infiltration Game," Naval Research Logistics, 35, 441-446, 1988.

[9] Lee, K, " A Firing Game with Time Lag, " J. of Optimization Theory and Application, 41(4), 547-558, 1983.

[10] Thomas, M. U., and Nisgav, Y., " An Infiltration Game with Time Dependent Payoff," Naval Research Logistics Quarterly, 23, 297-302, 1976.

[99년 5월 11일 접수, 99년 11월 8일 심사완료]