

반무한방파제에 의한 파랑변형 해석해 Analytical Solutions for Wave Deformation Due to Semi-Infinite Breakwaters

徐 承 男*
Seung Nam Seo*

요 旨 : 반무한방파제에 의한 파랑변형을 다룬 Penney and Price(1952)와 Stoker(1957)의 해석해를 재유도하였다. 기존 연구는 해석해의 유도과정을 간략하게 기술하거나 생략하여 본 논문에서는 해의 유도에 초점을 두었다. Stoker 해는 급수형태로 표시되어 급수 개수에 따른 정밀도를 분석하고 수치계산결과를 제시하였다.

핵심용어 : 파랑의 회절, 반무한방파제, 변수분리법, Stationary Phase

Abstract □ Two analytical solutions for wave diffraction by a semi-infinite breakwater, which Penney and Price (1952), and Stoker (1957) presented, are rederived. Since in previous works the derivations were skipped or briefly given, in the paper the derivation is brought into focus. Numerical computations of the solutions are presented and solution behavior of Stoker's method due to a number of terms in the series is analyzed.

Keywords : wave diffraction, semi-infinite breakwater, separation of variables, stationary phase

1. 서 론

반무한방파제에 의한 파랑변형 즉 회절에 대한 해석 해로는 광학에 적용한 Sommerfeld(1896)의 방법을 파랑변형에 도입한 Penney and Price(1952)의 해석해 및 Stoker(1957) 해석해가 있다. Stoker는 쇄기형태의 반무한방파제를 다루었고 쇄기의 폭이 없는 경우에는 반직선 형태의 반무한방파제가 되므로 Penney and Price의 해를 확장한 것이다. Chen(1987)은 쇄기형태 방파제 주변의 파랑변형에 대한 해석해를 구하기 위해 Fourier 변환을 사용한 Stoker의 방법을 사용하였다. 해석해의 일반적인 특징은 해를 구하기가 쉬워 관련 현상을 파악하는 데 용이할 뿐 아니라 수치모형의 검증에도 매우 유용하기 때문에 해석해의 유도는 매우 중요하다.

반무한방파제에 의한 파랑변형의 해석해는 수심이 일정하고 선형문제로 가장 단순한 매우 이상적인 경우로 실제 항만의 회절 재현과는 상당한 차이를 보일 수 있다. 즉 실제 항만의 방파제 길이는 유한하고 항내 수심도 일정하지 않을 뿐 아니라 일반적으로 항내의 반사

에 의한 영향도 무시할 수 없다. 그러나 이러한 제약에도 불구하고 계산이 간단하여 항내 회절을 근사적으로 계산하거나 개괄적인 검토의 경우에는 매우 유용하기 때문에 아직도 현업에서 많이 사용하고 있다.

한편 기존 해석해는 그 유도과정 대부분이 생략되어 있기 때문에 본 논문에서는 이를 상세히 기술하여 해석해 유도에 포함된 가정을 밝힘으로써 그 적용범위를 나타내고자 한다. 제 2절에서는 쇄기형태의 반무한방파제에 의한 파랑변형의 해를 Stoker의 방법과 달리 변수분리법을 사용하여 구하고 제 3절에서는 Penney and Price 해를 좌표변환을 이용하여 유도한 과정을 기술한다. 그리고 제 4절에서는 2절과 3절의 해를 비교하여 무한급수로 표시되는 Stoker 해에 있어 급수의 개수에 따른 정밀도를 분석하였다.

2. 쇄기형태의 반무한방파제

일정 수심 위를 진행하는 입사파랑이 쇄기형태의 방파제에 반사되면서 형성되는 파랑변형의 운동을 정식화

*한국해양연구소 연안·항만공학연구센터 (Coastal and Harbor Engineering Research Center, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan 425-600, Korea)

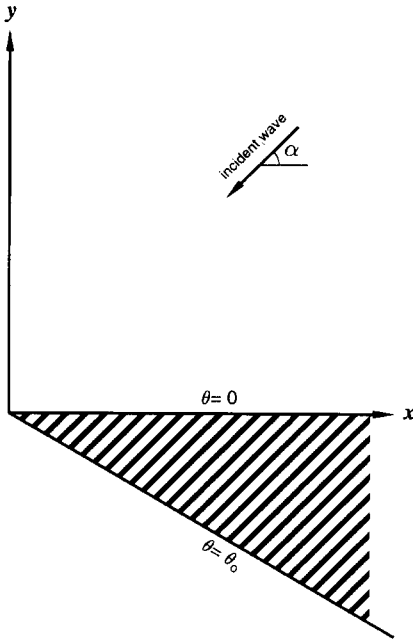


Fig. 1. Definition sketch around a wedge typed breakwater.

하고자 한다. 이 경우 방파제 부근에서는 입사파, 반사파 및 산란파가 존재하며 본 연구에서는 파랑변형의 선형문제만으로 국한하였다. Fig. 1의 좌표계와 같이 입사하는 파랑의 운동을 비압축성 유체의 비회전성 운동이라 가정하면 속도 포텐셜(Φ)에 대한 지배방정식은 Laplace식 (1)이 되며

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, z, t) = 0 \tag{1}$$

수심 h 의 저면에서 수입자의 불투과 조건 (2)를 사용한다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ on } z = -h \tag{2}$$

식 (1)과 (2)를 만족하는 Φ 를 식 (3)과 같이 시간의존 함수 $e^{i\omega t}$ 와 입사진폭 a_0 를 사용하여 나타낼 수 있다.

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \frac{ig a_0}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \phi(r, \theta) e^{i\omega t} \tag{3}$$

식 (3)에서 g 는 중력가속도, ω 는 각주파수 그리고 k 는 파수이며 이들은 식 (4)와 (5)의 자유수면 경계조건을 사용하면 파랑 분산식 (6)을 얻게 된다.

$$\eta(r, \theta, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \tag{4}$$

$$= a_0 \phi(r, \theta) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \tag{5}$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh \tag{6}$$

식 (3)을 지배방정식 (1)에 대입하여 속도포텐셜의 2차원 평면함수만을 극좌표계를 사용하여 나타내면 Helmholtz 식 (7)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + k^2 \phi = 0 \tag{7}$$

Fig. 1에 도시된 바와 같이 해를 구하는 영역이 단순하기 때문에 변수분리법을 사용할 수 있으며 다음과 같은 해를 구성할 수 있다.

$$\phi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \tag{8}$$

식 (8)을 식 (7)에 대입하여 r 과 θ 에 대한 식만으로 나누고 변수분리 상수 n 을 사용하여 정리하면 식 (9)를 얻게 된다.

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - n^2)R = 0 \\ \Theta'' + n^2 \Theta = 0 \end{cases} \tag{9}$$

식 (9)에서 첨자 prime은 미분을 의미하며 이를 풀어 정리하면 식 (10)이 된다.

$$\phi = \{A J_0(kr) + B Y_0(kr)\} \cdot (C\theta + D) + \{E J_n(kr) + F Y_n(kr)\} \cdot (G \cos n\theta + H \sin n\theta) \tag{10}$$

식 (10)에서 대문자 $A-G$ 는 미지상수이고 J 와 Y 는 각각 제1종 Bessel 함수와 제2종 Bessel 함수이다. 미지상수는 경계조건을 사용하여 구할 수 있으며 방파제 벽면($\theta=0, \theta_0$)에서 식 (11)의 불투과 조건을 사용하면

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0, \theta=0 \text{ and } \theta_0, \tag{11}$$

$\theta=0$ 의 경우 $C=H=0$ 이 된다. 한편 식 (11)의 $\theta=\theta_0$ 의 경우에는 식 (12)가 얻어진다.

$$\begin{cases} \sin n\theta_0 = 0 \\ n = \frac{m\pi}{\theta_0}, m = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{12}$$

식 (9)과 (11)을 만족하는 해는 무수히 존재하며 다루고자 하는 문제는 선형이므로 중첩의 원리를 사용하여 식 (13)과 같이 해를 구성할 수 있다.

$$\phi = A^* J_0(kr) + B^* Y_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} \{E_m^* J_m(kr) + F_m^* Y_m(kr)\} \cos m\theta \tag{13}$$

여기서 $v=m\pi/\theta_0$ 이다. 식 (13)의 새로운 미지상수는 식 (10)의 미지상수들의 곱으로 표시되나 나중에는 새로운 미지상수만을 결정하여 해를 구하게 된다.

한편 식 (9)는 r 에 대한 2차 미분방정식이므로 r 에 대한 두 개의 경계조건이 필요하다. 하나는 $r=0$ 에서 조건으로 해에 포함된 제 2종 Bessel 함수는 이 점에서 무한대의 값을 가져 물리적 의미를 갖지 않게 되므로 해당 미지상수의 값은 0이어야 한다. 즉 이 조건에 의해 해는 식 (14)가 되므로 미지상수 E_m^* 을 구하면 원하는 해를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \phi &= A^* J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} E_m^* J_m(kr) \cos v\theta \\ &\equiv \sum_{m=1}^{\infty} E_m^* J_m(kr) \cos v\theta \end{aligned} \quad (14)$$

또 하나의 조건은 방파제에 의해 생성된 산란파에 방사조건을 부여하여 해의 형태를 규정하게 된다. 위에서 유도된 ϕ 는 입사파(ϕ_i), 반사파(ϕ_r) 그리고 산란파(ϕ_s)로 구분하여 나타낼 수 있고 입사각 α 의 경우에는 식 (15)로 표시된다. 입사파와 반사파는 평면파로 지배방정식과 경계조건을 만족함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_i + \phi_r + \phi_s \\ &= \{e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} + e^{ikr\cos(\theta+\alpha)}\} + \phi_s \end{aligned} \quad (15)$$

한편 산란파는 동심원의 형태로 퍼져가며 산란지점에서부터 거리가 멀어질수록 파고가 작아지는 구면파의 형태를 보이며 이를 나타내는 방사조건은 식 (16)이 된다.

$$\sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik \right) \phi_s = 0 \quad \text{as } kr \rightarrow \infty \quad (16)$$

식 (14)의 미지상수를 구하기 위해 식 (16)을 사용하며 계산에 필요한 사항을 우선 살펴보기로 한다. 제 1종 Bessel 함수의 인수가 매우 큰 경우의 점근식은 식 (17)이 된다(Abramowitz and Stegun, 1972). $kr \rightarrow \infty$ 인 경우 으뜸항만을 고려하면

$$\begin{cases} J_\nu(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{\partial J_\nu}{\partial r} = -k \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \quad (17)$$

식 (14)의 $\cos v\theta$ 는 θ 에 대한 특성함수이므로 적분구간 (0, θ_0)에서의 함수적교성에 의해 임의의 $r=r_0$ 에서 식 (18)을 만족한다.

$$\sqrt{r} \int_0^{\theta_0} \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial r} + ik \phi_s \right) \cos v\theta \, d\theta = 0, \quad \left(v = \frac{m\pi}{\theta_0}, \quad m = 0, 1, \dots \right) \quad (18)$$

식 (15)와 (14)로부터 산란파의 속도포텐셜은 식 (19)가 되고

$$\phi_s = \sum_{m=1}^{\infty} E_m^* J_m(kr) \cos v\theta - \{e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} + e^{ikr\cos(\theta+\alpha)}\} \quad (19)$$

E_0^* 를 구하기 위해 식 (18)에 $m=0$, 식 (19)와 식 (17)을 대입하면 $\cos v\theta$ 의 적분구간에 대한 직교성 때문에 E_0^* 를 제외한 모든 항이 없어져 식 (20)이 된다.

$$\begin{aligned} 0 &= -\sqrt{r} \int_0^{\theta_0} E_0^* k \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left\{ \sin\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) - i \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) \right\} d\theta \\ &\quad - ik \sqrt{r} \int_0^{\theta_0} \{ \cos(\theta - \alpha) + 1 \} e^{ikr\cos(\theta - \alpha)} d\theta \\ &\quad - ik \sqrt{r} \int_0^{\theta_0} \{ \cos(\theta + \alpha) + 1 \} e^{ikr\cos(\theta + \alpha)} d\theta \quad \text{as } kr \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)의 우변 첫 항은 쉽게 적분할 수 있으나 둘째와 셋째항은 Stationary Phase을 사용하여 계산할 수 있으며 자세한 것은 徐(1994)를 참고하기 바라며 본 논문에서는 주요 내용만을 기술하고자 한다.

우변 둘째 항인 입사파는 0에서 $\pi + \alpha$ 까지만 존재하며 이 구간에 극점은 α 와 $\pi + \alpha$ 에 있으며 반면에 셋째 항인 반사파는 0에서 $\pi - \alpha$ 까지만 존재하며 극점은 $\pi - \alpha$ 에 있어 다음과 같은 적분값을 가진다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_0} f(\theta) e^{ikr\cos(\theta - \alpha)} d\theta &= \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \left\{ f(\alpha) e^{i(kr - \pi/4)} + \frac{f(\pi + \alpha)}{2} e^{-i(kr - \pi/4)} \right\} \\ \int_0^{\theta_0} f(\theta) e^{ikr\cos(\theta + \alpha)} d\theta &= \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \frac{f(\pi - \alpha)}{2} e^{-i(kr - \pi/4)} \end{aligned} \quad (21)$$

따라서 식 (20)에 식 (21)의 결과를 이용하고 정리하면

$$\begin{aligned} E_0^* \theta_0 i \sqrt{\frac{2k}{\pi}} e^{i(kr - \pi/4)} - 2i \sqrt{2\pi k} e^{i(kr - \pi/4)} &= 0 \\ \text{or } E_0^* &= \frac{2\pi}{\theta_0} \end{aligned} \quad (22)$$

비슷한 방법으로 E_m^* 을 구하기 위해 식 (18)에 식 (19), (17), (21)을 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned} 0 &= -\sqrt{r} \int_0^{\theta_0} E_m^* \cos^2 v\theta i k \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \nu\pi/2 - \pi/4)} d\theta \\ &\quad - ik \sqrt{r} \int_0^{\theta_0} \cos v\theta \{ \cos(\theta - \alpha) + 1 \} e^{ikr\cos(\theta - \alpha)} d\theta \\ &\quad - ik \sqrt{r} \int_0^{\theta_0} \cos v\theta \{ \cos(\theta + \alpha) + 1 \} e^{ikr\cos(\theta + \alpha)} d\theta \end{aligned}$$

$$= E_m^* \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} e^{i(kr - \nu\pi/2 - \pi/4)} - 2i\sqrt{2\pi k} e^{i(kr - \pi/4)} \cos\nu\alpha \quad (23)$$

식 (23)을 정리하여 미지상수 E_m^* 에 대한 식으로 표시하면 식 (24)가 되고

$$E_m^* = \frac{4\pi}{\theta} e^{i\nu\pi/2} \cos\nu\alpha \quad (24)$$

식 (22)와 식 (24)를 식 (14)에 대입하여 방파제 주변의 속도포텐셜 식 (25)가 본 절에서 구하고자 하는 해가 된다.

$$\phi = \frac{2\pi}{\theta} \left\{ J_0(kr) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) \cos\nu\alpha \cos\nu\theta e^{i\nu\pi/2} \right\}, \nu = \frac{m\pi}{\theta} \quad (25)$$

식 (25)는 Bessel 함수의 무한급수 형태로 주어지 수렴 속도가 느린 경우에는 수치계산상 어려운 점이 있으며 제 4절에서 이를 다루기로 한다. 한편 쇄기 형태의 방파제에 대한 解 가운데에서 특수한 경우인 $\theta_0 = 2\pi$ 가 되면 반직선 형태의 반무한 방파제의 해를 얻게된다.

$$\phi = J_0(kr) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) \cos \frac{m\alpha}{2} \cos \frac{m\theta}{2} e^{im\pi/4} \quad (26)$$

3. 반직선 형태의 반무한 방파제

제 2절에서 구한 식 (26)은 반무한 방파제의 해이나 위에 언급한 바와 같이 Bessel 함수의 무한급수의 수렴 속도가 느린 경우에는 계산에 어려운 점이 있다. 본 절에서는 Penney and Price(1952)의 방법을 사용하여 해를 구하기로 한다. 제 2절에서와 같이 일정 수심 위 무한 방파제에 입사각 α 로 파랑이 입사하는 경우 방파제 주변의 파랑 변형을 속도 포텐셜 ϕ 를 사용하여 기술하기로 한다. ϕ 에 대한 지배방정식은 식 (1)과 같으며 ϕ 를 입사파(ϕ^+)와 반사파(ϕ^-)로 분리하여 식 (3)과 유사한 형태를 갖도록 식 (27)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{iga_0}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \phi e^{i\omega t}, \phi \equiv \phi^+ + \phi^- \\ \begin{cases} \phi^+ &= A^+ e^{i(k \cos\alpha x + k \sin\alpha y)} \\ \phi^- &= A^- e^{i(k \cos\alpha x - k \sin\alpha y)} \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

따라서 해는 식 (27)의 미지함수 A^+ 와 A^- 를 구하는 문제로 바뀌어진다. 우선 입사파에 대한 해를 먼저 생각하기로 하고 식 (27)을 지배방정식 (1)에 대입하여 필

요한 연산을 한 후 편의상 첨자 +를 생략하면

$$A_{xx} + 2ik(\cos\alpha A_x + \sin\alpha A_y) + A_{yy} = 0 \quad (28)$$

본 절에서 아래 첨자는 미분을 의미하며 미지함수 A 를 구하는 과정을 기술한다.

직교좌표계 x, y 를 식 (29)와 같이 $u(x, y), v(x, y)$ 좌표계로 변환하면 식 (30)과 같은 관계식을 얻게된다.

$$\begin{aligned} W &= u + iv \\ &= \sqrt{kz} = \sqrt{k(x + iy)} \equiv (kre^{i\theta})^{1/2} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{kr} \cos \frac{\theta}{2}; & v = \sqrt{kr} \sin \frac{\theta}{2} \\ kx = kr \cos \theta = u^2 - v^2 \\ ky = kr \sin \theta = 2uv \\ u^2 + v^2 = kr \end{cases} \quad (30)$$

식 (30)을 이용하여 x, y 에 대한 u, v 좌표계의 미분을 구하기로 하자. 우선 u_x 와 v_x 를 구하기 위해 다음과 같은 Chain 법칙을 사용한다.

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial x} = 1 = \frac{\partial x}{\partial u} u_x + \frac{\partial x}{\partial v} v_x = \frac{2u}{k} u_x - \frac{2v}{k} v_x \\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0 = \frac{\partial y}{\partial u} u_x + \frac{\partial y}{\partial v} v_x = \frac{2v}{k} u_x - \frac{2u}{k} v_x \end{cases} \quad (31)$$

식 (31)의 연립방정식을 풀면 u_x 와 v_x 가 얻어지며 마찬가지로 u_y 와 v_y 를 구하면 식 (32)가 되며 이는 Cauchy-Riemann 조건이다.

$$\begin{cases} u_x = \frac{u}{2r}; & v_x = -\frac{v}{2r} \\ u_y = \frac{v}{2r}; & v_y = \frac{u}{2r} \end{cases} \quad (32)$$

한 걸음 더 나아가 u, v 의 2차 미분은 식 (30), (32)와 Chain 법칙을 이용하여 구할 수 있다. 즉

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x + (u_x)_y v_x \\ &= \left\{ \frac{ku}{2(u^2 + v^2)} \right\}_x \frac{u}{2r} - \left\{ \frac{kv}{2(u^2 + v^2)} \right\}_y \frac{v}{2r} \\ &= \frac{u}{4r^2} - \frac{u^3}{2kr^3} + \frac{uv^2}{2kr^3} \end{aligned} \quad (33)$$

식 (33)과 비슷한 방법으로 v_{xx}, u_{yy}, v_{yy} 를 구하면 식 (34)가 된다.

$$\begin{cases} v_{xx} = \frac{u^2 v}{2kr^3} + \frac{v}{4r^2} - \frac{v^3}{2kr^3} \\ u_{yy} = \frac{u}{4r^2} - \frac{uv^2}{kr^3} \\ v_{yy} = \frac{v}{4r^2} - \frac{u^2 v}{kr^3} \end{cases} \quad (34)$$

따라서 식 (33), 식 (34) 그리고 식 (32)로부터 다음 관계식을 얻게된다.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ u_x v_x = -\frac{uv}{4r^2} = -u_y v_y \end{cases} \quad (35)$$

이제 미지함수 A의 x, y에 대한 미분을 u, v좌표계에 대한 미분으로 나타내기 위하여 위에서 구한 식 (32)~(35)를 사용한다. 일차 미분은 식 (36)이 되며

$$\begin{aligned} A_x &= A_u \frac{u}{2r} - A_v \frac{v}{2r} \\ A_y &= A_u \frac{v}{2r} + A_v \frac{u}{2r} \end{aligned} \quad (36)$$

이차 미분은 식 (37)이 됨을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} A_{xx} &= (A_u u_x + A_v v_x)_x \\ &= A_{uu}(u_x)^2 + A_{vv}(v_x)^2 + 2A_{uv}u_x v_x + A_{uu}u_{xx} + A_v v_{xx} \\ A_{yy} &= (A_u u_y + A_v v_y)_y \\ &= A_{uu}(u_y)^2 + A_{vv}(v_y)^2 + 2A_{uv}u_y v_y + A_{uu}u_{yy} + A_v v_{yy} \end{aligned} \quad (37)$$

식 (36)과 (37)은 x, y좌표계를 u, v 좌표계로 변환하는 일반적인 미분식으로 입사파 뿐 아니라 반사파에도 적용할 수 있다.

마지막으로 식 (28)에 식 (36), (37)을 대입하고 식 (30)의 관계식을 이용하여 정리하면 u, v 좌표계만의 미분방정식 (38)을 얻게 된다.

$$A_{uu} + A_{vv} + 4i\{A_u(u \cos \alpha + v \sin \alpha) + A_v(u \sin \alpha - v \cos \alpha)\} = 0 \quad (38)$$

식 (38)의 해를 구하기 위해 식 (39)의 변수변환을 하면 식 (40)를 얻게된다.

$$\begin{aligned} \zeta &= u(1 + \cos \alpha) + v \sin \alpha \\ \begin{cases} A_u = A_\zeta \zeta_u = A_\zeta(1 + \cos \alpha); \quad A_{uu} = A_{\zeta\zeta}(1 + \cos \alpha)^2 \\ A_v = A_\zeta \zeta_v = A_\zeta \sin \alpha; \quad A_{vv} = A_{\zeta\zeta} \sin^2 \alpha \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

식 (40)을 식 (38)에 대입하여 정리하면 식 (41)을 얻는다.

$$A_{\zeta\zeta} + \frac{2i\zeta}{1 + \cos \alpha} A_\zeta = 0 \quad (41)$$

식 (41)의 미분방정식은 해를 구하기 용이한 형태로 식 (42)의 일반해를 가진다.

$$A = C_1 + C_2 \int_0^\zeta e^{-\frac{i\zeta^2}{1 + \cos \alpha}} d\zeta \quad (42)$$

또는 지수함수를 간단히 나타내기 위하여 식 (43)의 변수변환 및 식 (30)을 사용하면 식 (44)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{\zeta^2}{1 + \cos \alpha} \\ A &= C_1^* + C_2^* \int_0^{\sqrt{2kr} \cos(\frac{\theta - \alpha}{2})} e^{-i\xi^2} d\xi \end{aligned} \quad (44)$$

한편 반사파에 대한 해를 구하기 위해 식 (27)을 지배방정식 (1)에 대입하고 편의상 첨자 r를 생략하면 미분방정식 (45)를 얻는다.

$$A_{xx} + 2ik(\cos \alpha A_x - \sin \alpha A_y) + A_{yy} = 0 \quad (45)$$

식 (45)에 u, v좌표계로의 변환식을 얻기 위해 식 (36), (37)을 대입하여 식 (30)의 관계식을 이용하면 미분방정식 (46)을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} A_{uu} + A_{vv} + 4i\{A_u(u \cos \alpha - v \sin \alpha) - A_v(u \sin \alpha + v \cos \alpha)\} \\ = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

식 (46)의 해를 구하기 위해 식 (47)의 변수변환을 하고 이를 식 (46)에 대입하여 정리하면 식 (48)을 얻으며 이는 식 (41)과 동일하다.

$$\zeta = u(1 + \cos \alpha) - v \sin \alpha \quad (47)$$

$$A_{\zeta\zeta} + \frac{2i\zeta}{1 + \cos \alpha} A_\zeta = 0 \quad (48)$$

따라서 식 (48)의 미분방정식을 풀면 일반해 식 (42)가 되나 식 (43)의 변수변환 및 식 (30)을 사용하여 식 (44)의 형태로 바꾸면 식 (49)가 된다.

$$A = B_1^* + B_2^* \int_0^{\sqrt{2kr} \cos(\frac{\theta + \alpha}{2})} e^{-i\xi^2} d\xi \quad (49)$$

방파제 주변의 속도포텐셜 ϕ 는 식 (27)의 입사파(ϕ^i)와 반사파(ϕ^r)의 합이 되므로 식 (44)와 (49)의 결과를 이용하여 나타내면 식 (50)이 된다.

$$\phi = e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} \left[C_1^* + C_2^* \int_0^{\sqrt{2kr} \cos(\frac{\theta - \alpha}{2})} e^{-i\xi^2} d\xi \right]$$

$$+e^{ikr\cos(\theta+\alpha)} \left[B_1^* + B_2^* \int_0^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)} e^{-i\xi^2} d\xi \right] \quad (50)$$

식 (50)의 미지상수를 정하기 위해 부여될 경계조건은 방파제에서 불투과 조건과 음의 x 축상에서 거리가 멀리 떨어지면 입사파랑만이 존재하는 조건이다. 방파제 벽면에서 불투과 조건을 나타내면

$$0 = \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \Big|_{\theta=0} \\ = (C_1^* - B_1^*)ikr\sin\alpha e^{ikr\cos\alpha} + (C_2^* - B_2^*)e^{ikr\cos\alpha} \\ \left\{ ikr\sin\alpha \int_0^{\sqrt{2kr}\cos\frac{\alpha}{2}} e^{-i\xi^2} d\xi + \frac{\sqrt{2kr}}{2} \sin\frac{\alpha}{2} e^{-i2kr\cos\frac{2\alpha}{2}} \right\} \quad (51)$$

0에서 π 까지 변화하는 모든 입사각 α 에 대해 식 (51)이 성립하려면 $B_1^* = C_1^*$, $B_2^* = C_2^*$ 가 되어야 한다. 이를 식 (50)에 대입하고 방파제의 선단에서 멀리 떨어진 음의 x 축 부근에서는 입사파랑만이 존재하며 이 조건은 식 (52)로 나타내지며 식 (53)의 관계식을 써서 미정계수를 정하면 식 (54)과 같다.

$$\begin{cases} C_1^* + C_2^* \int_0^\infty e^{-i\xi^2} d\xi = 1 \\ C_1^* + C_2^* \int_0^\infty e^{-i\xi^2} d\xi = 0 \end{cases} \quad (52)$$

$$\int_0^\infty e^{-i\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (53)$$

$$C_1^* = \frac{1}{2}; C_2^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (54)$$

따라서 속도포텐셜 ϕ 는 식 (55)가 되고

$$\phi = e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)} e^{-i\xi^2} d\xi \right] \\ + e^{ikr\cos(\theta+\alpha)} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)} e^{-i\xi^2} d\xi \right] \quad (55)$$

이를 Fresnel cosine(C)과 Fresnel sine(S)으로 나타내기 위하여 $\xi^2 = \pi/2 x^2$ 를 사용하여 변환시키면 식 (56)을 얻을 수 있다.

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left\{kr\cos(\theta-\alpha) + \frac{\pi}{4}\right\}} \left[\frac{1}{2} + C(\gamma_1) - i \left\{ \frac{1}{2} + S(\gamma_1) \right\} \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left\{kr\cos(\theta+\alpha) + \frac{\pi}{4}\right\}} \left[\frac{1}{2} + C(\gamma_2) - i \left\{ \frac{1}{2} + S(\gamma_2) \right\} \right] \quad (56)$$

여기서

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sqrt{\frac{4kr}{\pi}} \cos\frac{\theta-\alpha}{2}; \gamma_2 = \sqrt{\frac{4kr}{\pi}} \cos\frac{\theta+\alpha}{2} \\ C(\gamma) = \int_0^\gamma \cos\frac{\pi x^2}{2} dx; S(\gamma) = \int_0^\gamma \sin\frac{\pi x^2}{2} dx \end{cases} \quad (57)$$

입사각 α 는 0보다 크고 π 보다 작으며 $\pi-\alpha \leq \theta \leq \pi+\alpha$ 에서는 입사파 만이 존재하는 반면에 반사파는 $0 \leq \theta \leq \pi-\alpha$ 에 입사파랑과 함께 나타난다. 그러므로 식 (57)의 γ_1, γ_2 는 θ 값에 따라 다음과 같은 값을 가진다.

$$\begin{cases} a) 0 \leq \theta \leq \pi-\alpha \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta-\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \gamma_1 \geq 0 \\ 0 \leq \frac{\theta+\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \gamma_2 \geq 0 \end{cases} \\ b) \pi-\alpha \leq \theta \leq \pi+\alpha \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta-\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \gamma_1 \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta+\alpha}{2} \leq \frac{3\pi}{2}, \gamma_2 \leq 0 \end{cases} \\ c) \pi+\alpha \leq \theta \leq 2\pi \begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta-\alpha}{2} \leq \pi, \gamma_1 \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta+\alpha}{2} \leq \frac{3\pi}{2}, \gamma_2 \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (58)$$

한편 Fresnel cosine과 Fresnel sine은 $C(\pm\infty) = S(\pm\infty) = \pm 1/2$ 의 점근값을 가지므로 방파제 선단에서 멀리 떨어진 지면($r \rightarrow \infty$) 식 (56)와 (58)로부터 구역별 식 (59)과 같이 되어 경계조건에 부합됨을 알 수 있다.

$$\begin{cases} a) 0 \leq \theta \leq \pi-\alpha, \phi = e^{i\{kr\cos(\theta-\alpha)\}} + e^{i\{kr\cos(\theta+\alpha)\}} \\ b) \pi-\alpha \leq \theta \leq \pi+\alpha, \phi = e^{i\{kr\cos(\theta-\alpha)\}} \text{ as } r \rightarrow \infty \\ c) \pi+\alpha \leq \theta \leq 2\pi, \phi = 0 \end{cases} \quad (59)$$

식 (59)은 방파제에서 멀리 떨어진 점근식으로 이는 방파제의 영향을 받지 않아 회절효과가 없는 파랑변위를 나타내며 거리가 짧아지면 회절의 영향이 점차 커져 Fresnel 적분으로부터 이에 상응하는 값이 주어지며 파랑변위가 복잡하게 된다.

4. 결과 비교

제 2장의 Stoker의 해는 Bessel 함수의 무한급수로 표시되어 있으나 실제 계산에서는 급수 개수를 유한 개(N)로 한정할 수밖에 없다. 정밀한 값을 구하기 위해서

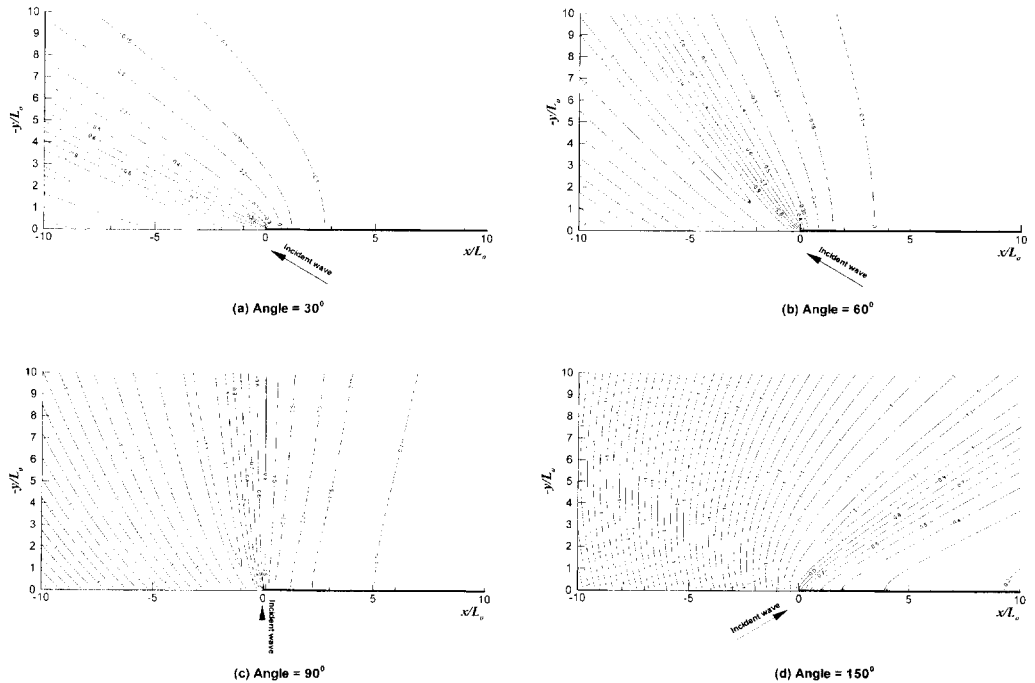


Fig. 2. Wave diffraction by a semi-infinite breakwater; (a) $\alpha=30^\circ$, (b) $\alpha=60^\circ$, (c) $\alpha=90^\circ$, (d) $\alpha=150^\circ$.

는 N 의 값을 크게 하면 되나 계산시간이 많이 들게 된다. 또한 N 개 이후 무시되는 급수 합을 너무 작을 정도의 큰 N 의 값을 정하는 것도 의미가 없기 때문에 적절한 N 값의 선택이 필요하다.

수치계산에서 Bessel 함수와 Fresnel 함수의 값을 구하기 위해 PC용 IMSL 소프트웨어를 사용하였으며 정밀도를 높이기 위해 함수 값은 배정도(double precision)를 사용하였다.

우선 Fig. 2에 Penney and Price의 방법으로 계산한 결과를 나타내었다. 입사각 30° , 60° , 90° 그리고 150° 의 파랑을 대상으로 하여 방파제에 의해 뒤편에 생성된 회절파 및 입사파랑의 합을 구해 입사파랑의 진폭비를 나타내었다. 그림의 x 와 y 축은 입사파장 L_0 으로 무차원한 값으로 나타내어 방파제 선단에서 좌우 및 뒤로 10 파장내의 파고비를 계산하였다. 방파제는 x 축 상의 음이 아닌 선에 위치하며 그림에서는 굵은 선으로 나타내었다. 방파제 선단에서 회절된 파랑이 입사파랑과 중첩되어 강화된 파고는 1.15배 정도로 나타났다.

Penney and Price 방법과 Stoker의 해를 비교하기 위해 방파제 뒤편의 $y/L_0=-1, -3, -6$ 그리고 -10 선에서의 파고비를 표시하였다. Fig. 3~Fig. 5의 계산에는 입사각 45° , 90° 그리고 135° 를 사용하여 계산한 파고비로 Stoker

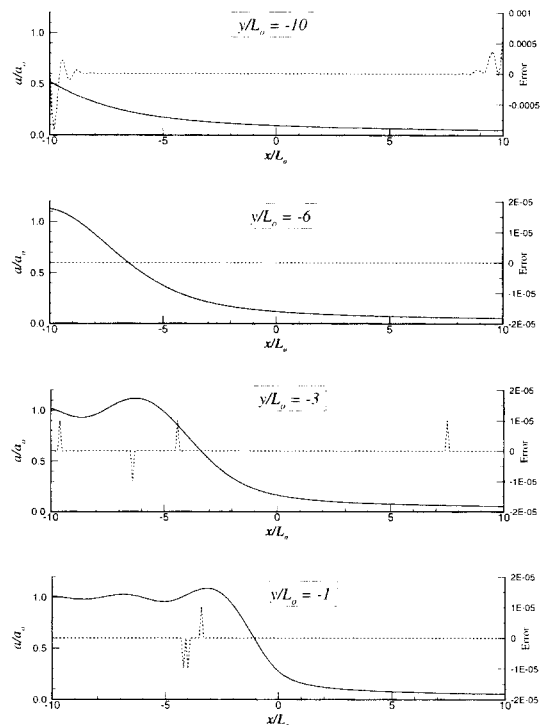


Fig. 3. Diffracted wave height ratio(solid lines) and error(dotted lines) from the results of Penney and Price and Stoker ($N=200$), incident wave angle $\alpha=45^\circ$.

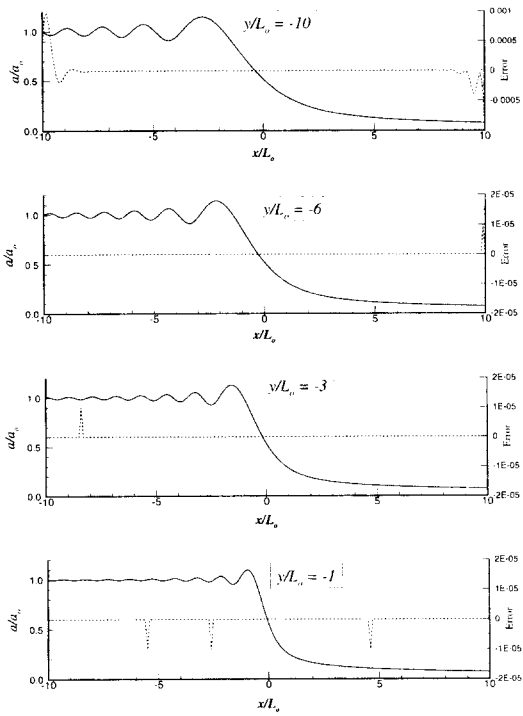


Fig. 4. Diffracted wave height ratio(solid lines) and error(dotted lines) from the results of Penney and Price and Stoker($N=200$), incident wave angle $\alpha=90^\circ$.

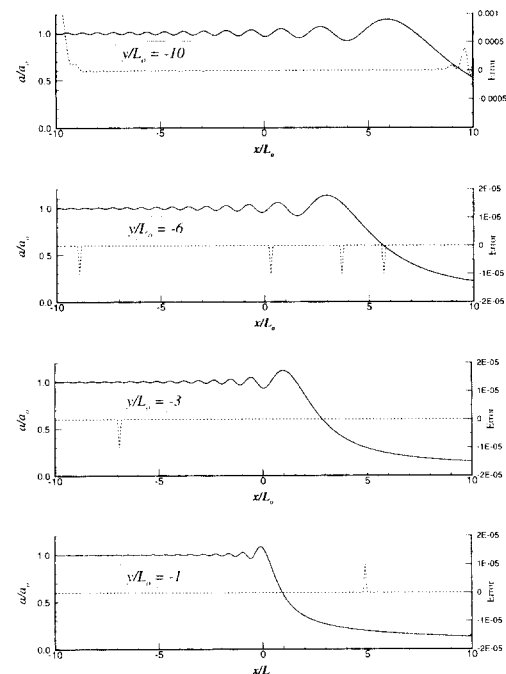


Fig. 5. Diffracted wave height ratio(solid lines) and error(dotted lines) from the results of Penney and Price and Stoker($N=200$), incident wave angle $\alpha=135^\circ$.

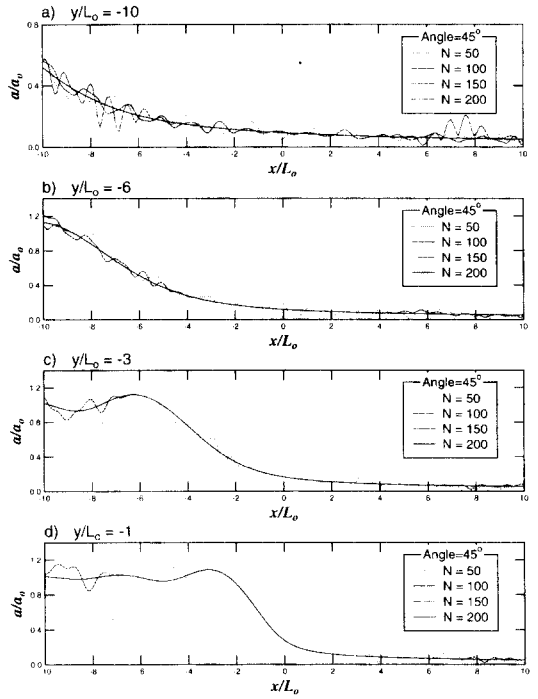


Fig. 6. Diffracted wave height ratio at different section behind a semi-infinite breakwater by Stoker's method, incident wave angle $\alpha=45^\circ$.

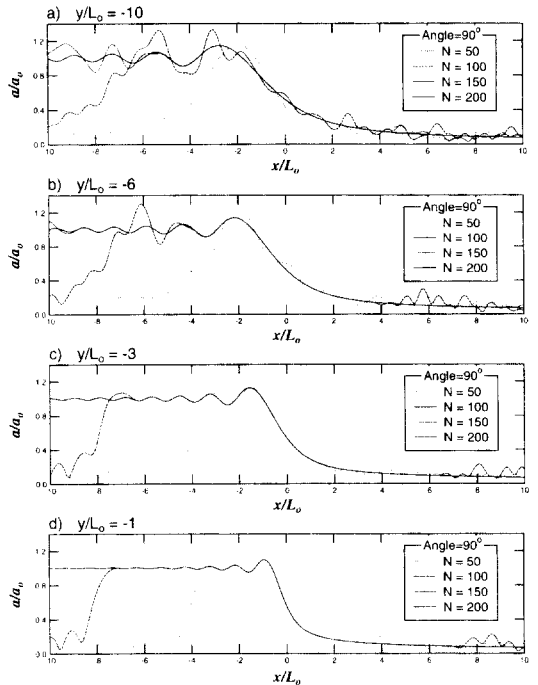


Fig. 7. Diffracted wave height ratio at different section behind a semi-infinite breakwater by Stoker's method, incident wave angle $\alpha=90^\circ$.

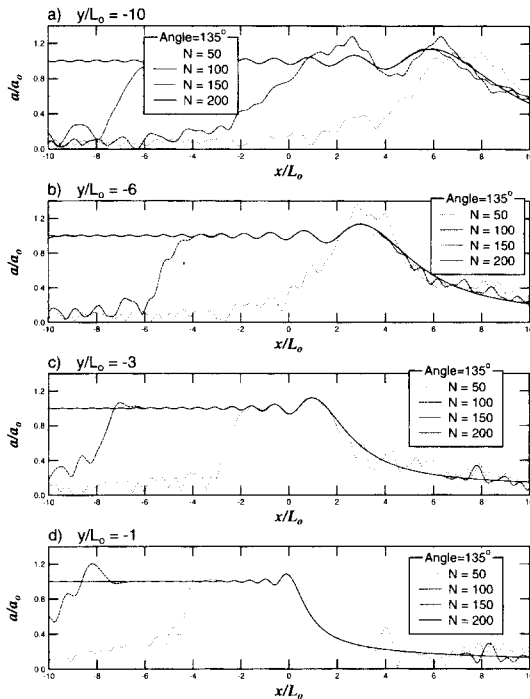


Fig. 8. Diffracted wave height ratio at different section behind a semi-infinite breakwater by Stoker's method, incident wave angle $\alpha=135^\circ$.

해의 급수 개수로는 $N=200$ 을 사용하였다. 그림의 실선은 Penney and Price 해의 계산 결과이며 점선은 Penney and Price 해에서 Stoker 해를 뺀 값으로 N 에 의한 오차로 간주할 수 있다. 오차는 방파제 선단으로부터 거리가 멀어질수록 커지는 것으로 나타났으며 오차의 가장 큰 값은 0.0013으로 매우 작다. 따라서 $N=200$ 을 사용한 Stoker 해는 Penney and Price 해와 차이가 매우 작아 방파제에 의한 회절과 계산에 어떤 방법을 사용하던지 문제가 되지 않는 것으로 판단된다.

마지막으로 Fig. 6~Fig. 8에 급수 개수에 따른 수치 계산 값을 나타내었다. 그림에는 $N=50, 100, 150$ 그리고 200 을 사용한 결과를 도시하였고 입사각은 $45^\circ, 90^\circ$ 그리고 135° 를 대상으로 하였다. 급수 개수가 많아짐에

따라 오차가 줄어들고, 입사각에 관계없이 방파제 선단에 가까울수록 급수 개수에 따른 오차가 작아지는 것으로 나타났다.

5. 결 론

반무한방파제에 의한 파랑변형을 다룬 Penney and Price(1952)와 Stoker(1957)의 해석해를 재유도하여 급수 형태로 표시된 Stoker 해의 급수 개수에 따른 정밀도를 분석하였다. Penney and Price 해는 Fresnel 함수로 표시되어 계산이 빠른 반면에 Stoker 해는 급수 형태로 나타나 계산 시간이 많이 들뿐 아니라 급수 개수가 계산 정밀도에 상당한 영향을 준다. 이 두 가지의 계산 결과를 분석하면 Stoker 해는 급수 개수를 200개 이상 사용하는 것이 필요하다. 한편 Penney and Price의 해는 방파제가 선의 형태에만 적용되나 Stoker의 해는 쇄기 형태의 방파제에도 적용할 수 있기 때문에 그 응용 범위가 넓다.

참고문헌

- 徐承男, 1994. 漸近 近似法에 의한 波浪變位 계산, 韓國海岸·海洋工學會誌, 6(1): 12-22.
- Abramowitz, M. and Stegun, I.A., 1972. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- Chen, H.S., 1987. Combined reflection and diffraction by a vertical wedge, *Tech. Rep. CERC-87-16*, U.S. Army Engrs., Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS.
- Penney, W.G. and Price, A.T., 1952. The diffraction theory of sea waves and the shelter afforded by breakwaters, *Philos. Trans. Roy. Soc. A*, 244(882), pp. 236-253.
- Sommerfeld, A., 1896. Mathematische theorie der diffraction, *Math. Ann.*, 47, pp. 317-374.
- Stoker, J.J., 1957. *Water Waves*, Interscience, New York.

Received August 25, 1999

Accepted October 1, 1999