

# 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동 해석

## Free Vibration Analysis of Thin-walled Curved Beams with Unsymmetric Cross-section

민 병 철\*                      김 문 영\*\*                      장 승 필\*\*\*  
Min, Byoung Cheol      Kim, Moon Young      Chang, Sung Pil

### 국문요약

비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 자유진동해석을 수행할 수 있는 유한요소 이론 및 엄밀해를 제시하기 위하여, 가상일의 원리를 이용한 3차원 연속체의 운동방정식을 제시한다. 박벽단면의 구속된 비틀림(restrained warping)효과를 고려하는 박벽 곡선보의 변위장을 도입하고 이를 연속체의 운동방정식에 대입하여 단면에 대해 적분함으로써 박벽 곡선보의 운동방정식을 유도한다. 단순지지되고 일축대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면내 자유진동 모드에 대응하는 엄밀해를 산정하였으며 곡선보를 유한요소로 분할하여 요소의 변위장을 요소 변위벡터에 관한 3차의 Hermitian 다항식으로 나타내고 이를 운동방정식에 대입함으로써 탄성강도행렬과 질량행렬을 유도한다. 또한 본 연구에서 얻어진 엄밀해와 곡선보요소를 이용한 유한요소 해석결과를 직선보요소 및 ABAQUS의 쉘요소를 이용하여 얻어진 결과와 비교 검토를 함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다.

**주요어 :** 자유진동, 곡선보, 유한요소법, 엄밀해, 박벽단면, 비대칭단면

### ABSTRACT

For free vibration of non-symmetric thin-walled circular arches including restrained warping effect, the elastic strain and kinetic energy is derived by introducing displacement fields of circular arches in which all displacement parameters are defined at the centroid axis. The cubic Hermitian polynomials are utilized as shape functions for development of the curved thin-walled beam element having eight degrees of freedom. Analytical solution for in-plane free vibration behaviors of simply supported thin-walled curved beams with monosymmetric cross-sections is newly derived. Also, a finite element formulation using two noded curved beam element is presented by evaluating elastic stiffness and mass matrices. In order to illustrate the accuracy and practical usefulness of this study, analytical and numerical solutions for free vibration of circular arches are presented and compared with solutions analyzed by the straight beam element and the ABAQUS's shell element.

**Key words :** free-vibration, curved beam, finite element method, analytic solution, thin-walled section, non-symmetric cross section

## 1. 서 론

아치교나 곡선교는 교량건설에 있어서 널리 적용되는 구조이며 적절히 설계가 이루어진다면 미관이 뛰어나고 매우 경제적인 교량구조

가 될 수 있다. 또한 건설 지점의 입지조건 등에 의해 곡선교의 건설이 불가피한 경우가 많기 때문에 이에 대한 정확한 해석은 매우 중요하다. 주형을 이용하여 설계하는 경우, 대부분의 단면 형태는 판형(plate girder)의 박벽구조(thin-walled structure)가 된다. 박벽보는 주어지는 외력에 대하여 최소한의 자중을 갖는 단면 형태지만 휨과 비틀림의 연계효과로 인하여 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을

\* 성균관대학교 토목공학과 박사과정

\*\* 정회원 · 성균관대학교 토목공학과 부교수

\*\*\* 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 정교수

본 논문에 대한 토의를 6월 30일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.

보이기 때문에 이에 대한 동적 거동특성을 정확히 파악할 수 있어야 한다. 현재까지 곡선보에 대한 연구<sup>(1)</sup>는 여러 분야에서 다양하게 진행되어 왔으며 또한 Kim, M.Y. 등<sup>(2),(3)</sup>은 비대칭 단면을 갖는 직선 박벽보 요소를 이용하여 박벽뿔대의 좌굴 및 자유진동해석을 수행한 바 있다. 그러나 곡선구조를 직선요소로 모델링하는 것은 곡률효과 때문에 해석시 정확도 면에서 한계를 갖게 된다. 임성순<sup>(4)</sup>은 나선형 곡선보요소를 개발하여 나선형 곡선교에 적용하였으며, 윤기용<sup>(5)</sup>은 원형 곡선보요소를 개발하여 곡선교의 동적 해석에 적용하였다. 그러나 이러한 연구들은 단면이 2축 대칭단면이라는 제한을 두었다. 장승필 등<sup>(6)</sup>은 일축대칭 박벽단면을 갖는 경우에 대하여 곡선보의 면의 자유진동에 대한 엄밀해를 제시하고 곡선보요소와 직선보요소를 이용하여 자유진동 해석을 수행한 바 있다. 본 연구에서는 이전의 연구<sup>(6)</sup>를 확장하여 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 3차원 동적 거동특성을 파악할 수 있는 적절한 해석이론을 전개함으로써 일축 대칭 단면을 갖는 곡선보의 면내 자유진동에 대한 엄밀해를 유도하고 한편 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동 해석을 수행하기 위한 유한요소법을 제시한다. 또한 본 연구에서 얻어진 엄밀해와 박벽 곡선보요소를 이용한 해석결과, 직선보요소에 의한 해석결과 그리고 범용구조해석 프로그램인 ABAQUS<sup>(7)</sup>의 쉘요소를 적용한 결과와 비교 검토를 함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다.

## 2. 가상일의 원리

본 논문에서는 선형화된 가상일의 원리를 적용하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

1. 박벽 곡선보는 선형 탄성 거동을 한다.
2. 곡선보의 단면은 뒤틀변형을 제외하고 강체 거동한다.
3. 부재 축을 따라서 단면의 형상은 일정하게 유지된다.
4. 곡선보의 전좌굴(prebuckling) 또는 국부좌굴(local buckling) 현상은 없다.

일축대칭단면을 갖는 곡선보의 자유진동 해석을 수행하기 위하여 회전자유도를 갖는 3차원 연속체에 대하여 가상일의 원리를 나타내면 다음과 같다.

$$\int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV - \omega^2 \int_V \rho U_i \delta U_i dV = \int_S T_i \delta U_i dS \quad (1)$$

여기서  $\delta$ 는 변분을,  $\tau_{ij}$ 와  $e_{ij}$ 는 각각 응력과 변형도이며  $\rho$ 는 밀도,  $\omega$ 는 진동수, T는 표면력, 그리고  $U_i$ 는 변위를 나타낸다. 박벽단면을 갖는 곡선보의 자유진동해석을 수행하기 위하여 초기변위는 없다고 가정하면 변형도와 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (2)$$

여기서 아래첨자 'comma'는 부재좌표계에 대한 편미분을 나타내며 곡선보의 전체좌표계 및 요소좌표계는 그림 1과 같이 정의된다.

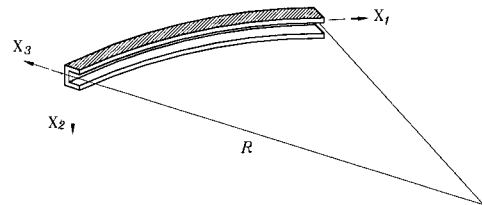


그림 1 박벽 곡선보의 전체좌표계 및 요소좌표계

### 2.1 비대칭 단면을 갖는 원형아치의 변위장

그림 2는 부재좌표계  $(x_1, x_2, x_3)$ 에 대하여 비대칭단면을 갖는 박벽 공간뿔대요소의 변위장을 7개의 변위파라미터로 나타낸 것으로  $x_1$ 은 도심축,  $x_2$ 와  $x_3$ 는 주축을 나타낸다.  $e_2$ 와  $e_3$ 는 각각  $x_2$ 와  $x_3$ 축에 대한 도심축으로부터 전단중심까지의 거리이고  $U_x, U_y, U_z$ 와  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 는 각각  $x_1, x_2, x_3$ 축방향의 강체이동변위(rigid body translation) 및 강체회전변

위(rigid body rotation)를,  $f$ 는 단면의 뒤틀림에 의한  $x_1$ 축방향으로의 변화율로 아래 식과 같이 나타낼 수 있다.

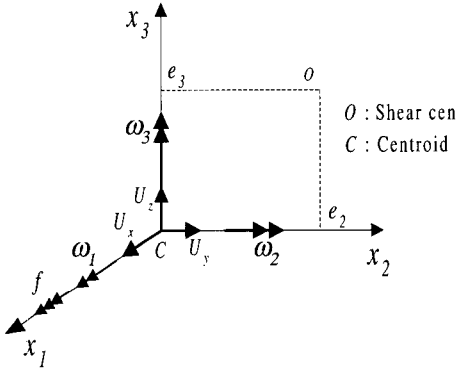


그림 2 박벽 곡선보의 변위장

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \theta, & \omega_2 &= -U_z' + U_x/R \\ \omega_3 &= U_y', & f &= -\theta' - U_y'/R \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 위첨자 'prime'은  $x_1$ 에 대한 미분을 나타낸다.

### 2.2 박벽 곡선보의 변형도-변위관계

부재의 단면이 강체거동하고 축방향에 대하여 뒤틀림만 발생한다고 가정하면, 부재 내 임의의 한 점이 휨과 비틀 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때 박벽 공간뼈대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_1 = U_x - x_2 U_y' - x_3 \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) - \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \phi(x_2, x_3) \quad (4a)$$

$$U_2 = U_y - x_3 \theta \quad (4b)$$

$$U_3 = U_z + x_2 \theta \quad (4c)$$

$$\phi = e_2 x_3 - e_3 x_2 + \phi_s \quad (4d)$$

여기서  $\phi, \phi_s$ 는 각각 도심과 전단중심 축에 대한 뒤틀림수(warping function)를 나타낸다. Vlasov의 가정에 따라 면내변형도( $e_{22}, e_{33}, \tau_{23}$ )는 무시하고, 면내응력( $\tau_{22}, \tau_{33}$ )은 영으로 가정하면 박벽 곡선보의 변형도-변위관계는 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다. 우선 탄성변형에너지를 구성하는 변형도-변위 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left( U_{1,1} + \frac{U_3}{R} \right) \cdot \frac{R}{R+x_3} \\ &= \left[ U_x' + \frac{U_z}{R} - x_2 \left( U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) - x_3 \left( U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) - \phi \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \right] \cdot \frac{R}{R+x_3} \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} 2e_{12} &= U_{2,1} \cdot \frac{R}{R+x_3} + U_{1,2} \\ &= (U_y' - x_3 \theta') \frac{R}{R+x_3} - U_y' - \phi_{,2} \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} 2e_{13} &= \left( U_{3,1} - \frac{U_1}{R} \right) \cdot \frac{R}{R+x_3} + U_{1,3} \\ &= \left[ U_z' - \frac{U_x}{R} + x_2 \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) + \frac{x_3}{R} \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) + \frac{\phi}{R} \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \right] \cdot \frac{R}{R+x_3} - \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) - \phi_{,3} \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \end{aligned} \quad (5c)$$

또한, 전단중심에서 정의된 단면상수는 식 (4d)를 이용하여 도심에 대한 단면상수로 변환할 수 있으며 그 변환식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} I_\phi &= \int_A \phi^2 dA = \int_A (\phi_s + e_2 x_3 - e_3 x_2)^2 dA \\ &= I_\phi^s + e_2^2 I_2 + e_3^2 I_3 \end{aligned}$$

$$I_{\phi 2} = \int_A \phi x_3 dA = \int_A (\phi_s + e_2 x_3 - e_3 x_2) x_3 dA = e_2 I_2$$

$$I_{\phi 3} = \int_A \phi x_2 dA = \int_A (\phi_s + e_2 x_3 - e_3 x_2) x_2 dA = -e_3 I_3$$

$$\begin{aligned} I_{\phi 22} &= \int_A \phi x_3^2 dA = \int_A (\phi_s + e_2 x_3 - e_3 x_2) x_3^2 dA \\ &= I_{\phi 22}^s + e_2 I_{222} - e_3 I_{223} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\phi 33} &= \int_A \phi x_2^2 dA = \int_A (\phi_s + e_2 x_3 - e_3 x_2) x_2^2 dA \\ &= I_{\phi 33}^s + e_2 I_{233} - e_3 I_{333} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\phi 23} &= \int_A \phi x_3 x_2 dA \\
 &= \int_A (\phi_s + e_2 x_3 - e_3 x_2) x_3 x_2 dA \\
 &= I_{\phi 23}^s + e_2 I_{223} - e_3 I_{233} \\
 I_{\phi \phi 2} &= \int_A (\phi_s + e_2 x_3 - e_3 x_2)^2 x_3 dA \\
 &= I_{\phi \phi 2}^s + e_2^2 I_{222} + e_3^2 I_{233} + 2e_2 I_{\phi 22}^s \\
 &\quad - 2e_3 I_{\phi 23}^s - 2e_2 e_3 I_{223} \\
 I_{\phi \phi 3} &= \int_A (\phi_s + e_2 x_3 - e_3 x_2)^2 x_2 dA \\
 &= I_{\phi \phi 3}^s + e_2^2 I_{223} + e_3^2 I_{333} + 2e_2 I_{\phi 23}^s \\
 &\quad - 2e_3 I_{\phi 33}^s - 2e_2 e_3 I_{233}
 \end{aligned} \tag{6}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_A x_3^2 dA, \quad I_3 = \int_A x_2^2 dA, \quad I_{222} = \int_A x_3^3 dA, \\
 I_{223} &= \int_A x_2 x_3^2 dA, \quad I_{233} = \int_A x_2^2 x_3 dA, \\
 I_{333} &= \int_A x_2^3 dA
 \end{aligned} \tag{7}$$

단면상수의 윗첨자 's'는 전단중심에서 정의되었음을 나타내고 첨자가 없는 것은 도심축에 대하여 정의되었음을 나타낸다.

### 2.3 비대칭 박벽단면을 갖는 원형아치의 총포텐셜 에너지

비대칭 박벽 곡선보의 자유진동 해석방법을 제시하기 위해서, 3차원 곡선보요소의 총포텐셜 에너지  $\Pi$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E - T \tag{8}$$

여기서  $\Pi_E$ 와 는 각각 탄성변형에너지와 운동 에너지를 나타낸다. 식 (1)로부터 이들 에너지 식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2} \int_L \int_A [E e_{11}^2 + 2G e_{12}^2 + 2G e_{13}^2] \frac{R+x_3}{R} dV \tag{9a}$$

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_L \int_A [U_1^2 + U_2^2 + U_3^2] \frac{R+x_3}{R} dV \tag{9b}$$

먼저 식 (5)를 탄성변형에너지 식 (9a)에 대입하고 단면에 대하여 적분을 행하면 아래의

결과식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \Pi_E &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA \left( U_x' + \frac{U_z}{R} \right)^2 \right. \\
 &\quad + E \widehat{I}_2 \left( U_z'' + \frac{U_z}{R^2} \right)^2 + E \widehat{I}_3 \left( U_y'' - \frac{\theta}{R} \right)^2 \\
 &\quad + GJ \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right)^2 + E \widehat{I}_\phi \left( \theta'' + \frac{U_y''}{R} \right)^2 \\
 &\quad + 2E \widehat{I}_{\phi 2} \left( U_x'' + \frac{U_z}{R} \right) \left( \theta'' + \frac{U_y''}{R} \right) \\
 &\quad + 2E \widehat{I}_{\phi 3} \left( U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) \left( \theta'' + \frac{U_y''}{R} \right) \\
 &\quad \left. - 2E \frac{I_{223}}{R} \left( U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) \left( U_z'' + \frac{U_z}{R^2} \right) \right] dx_1
 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \widehat{I}_2 &= I_2 - \frac{I_{222}}{R}, \quad \widehat{I}_3 = I_3 - \frac{I_{233}}{R}, \quad \widehat{I}_\phi = I_\phi - \frac{I_{\phi \phi 2}}{R} \\
 \widehat{I}_{\phi 3} &= I_{\phi 3} - \frac{I_{\phi 23}}{R}, \quad \widehat{I}_{\phi 2} = I_{\phi 2} - \frac{I_{\phi 22}}{R}
 \end{aligned} \tag{11}$$

여기서  $A$ ,  $I_2$  그리고  $I_3$ 는 각각 단면적,  $x_2$  축에 대한 단면 2차 모멘트 그리고  $x_3$  축에 대한 단면 2차 모멘트를 나타내고  $J$ 와  $I_\phi$ 는 각각 비틀상수와 뒹상수를 나타낸다. 그리고 식 (12)에서의 곡률 항은 다음과 같은 근사식을 적용한다.

$$\frac{R}{R+x_3} \cong 1 - \frac{x_3}{R} \tag{12}$$

한편, 변위장을 나타내는 식 (4)를 운동에너지 식 (9b)에 대입하고 단면에 대하여 적분하면 다음과 같이 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 운동에너지  $T$ 를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_L \left[ A \left( U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 \right) + \widetilde{I}_\theta \theta^2 + \widetilde{I}_3 U_y'^2 \right. \\
 &\quad + \widetilde{I}_2 \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 + \widetilde{I}_\phi \left( \theta + \frac{U_y'}{R} \right)^2 - 2 \frac{I_2}{R} U_x \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \\
 &\quad - 2 \frac{I_{\phi 2}}{R} U_x \left( \theta + \frac{U_y'}{R} \right) - 2 \frac{I_3}{R} U_y \theta + 2 \frac{I_{223}}{R} U_y' \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \\
 &\quad \left. + 2 \widetilde{I}_{\phi 3} U_y' \left( \theta + \frac{U_y'}{R} \right) + 2 \widetilde{I}_{\phi 2} \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left( \theta + \frac{U_y'}{R} \right) \right] dx_1
 \end{aligned} \tag{13}$$

여기서

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= I_2 + \frac{I_{222}}{R}, \quad \tilde{I}_3 = I_3 + \frac{I_{233}}{R}, \quad \tilde{I}_\phi = I_\phi + \frac{I_{\phi\phi\phi}}{R}, \quad I_o = I_2 + I_3 \\ \tilde{I}_{\phi 2} &= I_{\phi 2} + \frac{I_{\phi 22}}{R}, \quad \tilde{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} + \frac{I_{\phi 33}}{R}, \quad \tilde{I}_o = I_o + \frac{I_{222} + I_{233}}{R} \end{aligned} \quad (14)$$

### 3. 일축대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면내 자유진동

단순지지되고  $x_3$  축에 대하여 대칭단면(그림 1 참조)을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동 모드는 면내와 면외거동이 서로 연계되지 않기 때문에, 각 거동에 대응하는 변위를 분리하여 지배방정식을 유도할 수 있다. 면외 자유진동에 대한 엄밀해는 이전의 연구<sup>(6)</sup>에서 제시한 바 있으므로, 본 논문에서는 단순지지되고 일축 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면내 자유진동에 대한 엄밀해만을 제시한다. 또한, 엄밀해를 유도하기 위하여 총포텐셜에너지는 다음과 같은 비신장조건(inextensibility condition)을 적용한다.

$$U_x' + \frac{U_z}{R} \approx 0 \quad (15)$$

그림 3는 단순지지된 원형아치의 면내에 대한 역대칭 자유진동 모드를 나타내고 있다. 일축대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면내 자유진동해석을 수행하기 위하여, 식 (10)과 (13)으로부터 면내거동과 관련된 항만을 고려하고 운동에너지에 대한 회전관성을 무시하면 총포텐셜에너지는 다음과 같이 얻어진다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ E\tilde{I}_2 \left( U_z'' - \frac{U_z}{R^2} \right)^2 - \rho\omega^2 A \left( U_x^2 + U_z^2 \right) \right] dx \quad (16)$$

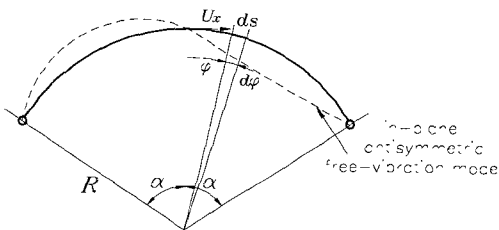


그림 3 원형아치의 면내 자유진동

식 (15)의 비신장조건을 이용하여 식 (16)에서  $U_z$ 를  $U_x$ 에 대한 항으로 치환하면 총포텐셜에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ E\tilde{I}_2 \left( R U_x''' + \frac{U_x'}{R} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \rho\omega^2 A \left( U_x^2 + R^2 U_x'^2 \right) \right] dx \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)에 대하여 변분을 취하면, 다음과 같은 6차의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} R^2 (R^4 U_x'''''' + 2R^2 U_x'''' + U_x'') \\ + k^2 (U_x - R^2 U_x'') = 0 \end{aligned} \quad (18a)$$

여기서

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2 AR^4}{EI_2} \quad (18b)$$

비신장조건을 고려하면, 식 (18a)에 나타난 면내 자유진동에 대한 지배방정식은  $U_z$ 에 대하여는 역대칭모드이고  $U_x$ 에 대해서는 대칭 모드를 갖는다. 결국, 박벽 곡선보의 면내 고유진동수는 식 (18a)을 계산함으로써 얻어질 수 있다.

## 4. 유한요소 정식화

비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동해석을 수행하기 위하여, 본 연구에서 개발한 곡선보요소와 직선보요소를 비교하여 제시한다. 두 요소의 변위장은 모두 도심축에 대하여 정의되었으며 유한요소의 형상함수는 비교적 간단하며 박벽 곡선보의 거동을 정확하게 나타낼 수 있는 3차의 Hermitian 다항식을 이용하였고 각 요소의 자유도는 그림 4와 5에 나타난 바와 같이 곡선보요소는 절점당 8개, 직선보요소는 절점당 7개를 갖는다.

### 4.1 곡선보 요소

그림 4는 구속된 비틀림에 의한 뒹을 고려한 박벽 곡선보요소의 재단변위벡터를 표시한 것

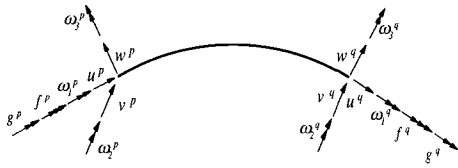


그림 4 박벽 곡선보요소의 변위벡터

이다. 일반화된 좌표들( $U_x, U_y, U_z, \theta$ )을 재단 변위벡터로 나타내기 위해서는 요소의 거동을 적절히 나타낼 수 있는 형상함수들을 선택하여야 한다. 본 논문에서 요소당 2절점을 갖는 3차의 Hermitian 다항식을 사용한다. 그림 4를 참조하여 위의 사항들을 고려하면 박벽 곡선보요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다

$$U_x = h_1 u^p + h_2 L g^p + h_3 u^q + h_4 L g^q \quad (19a)$$

$$U_y = h_1 v^p + h_2 L \omega_3^p + h_3 v^q + h_4 L \omega_3^q \quad (19b)$$

$$U_z = h_1 w^p - h_2 L \omega_2^p + h_3 w^q - h_4 L \omega_2^q \quad (19c)$$

$$\theta = h_1 \omega_1^p - h_2 L f^p + h_3 \omega_1^q - h_4 L f^q \quad (19d)$$

여기서

$$\begin{aligned} u^p &= U_x(0), & v^p &= U_y(0), & w^p &= U_z(0) \\ \omega_1^p &= \theta(0), & \omega_2^p &= -U_z'(0), & \omega_3^p &= U_y'(0), \\ f^p &= -\theta'(0), & g^p &= U_x'(0), \end{aligned} \quad (20)$$

그리고  $h_i$ 는 3차의 Hermitian 다항식이므로써 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_1 &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, & h_2 &= (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)L \\ h_3 &= -2\xi^3 + 3\xi^2, & h_4 &= (\xi^3 - \xi^2)L \end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$\xi = x/L$$

현재까지의 이론을 고려하여 식 (19)를 식 (10)과 식 (13)에 대입하고 적분을 행하면 다음과 같이 박벽 곡선보에 대한 행렬운동방정식을 얻는다.

$$K_e U_e - \omega^2 M_e U_e = F_e \quad (22)$$

여기서

$$U_e = \langle u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, g^p, u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q, g^q \rangle \quad (23a)$$

$$F_e = \langle F_1^p, F_2^p, F_3^p, M_1^p, M_2^p, M_3^p, M_4^p, F_m^p, F_1^q, F_2^q, F_3^q, M_1^q, M_2^q, M_3^q, M_4^q, F_m^q \rangle \quad (23b)$$

위 식에서  $K_e$ 와  $M_e$ 는 각각 부재좌표계에 대한  $16 \times 16$  탄성강도행렬 및 질량행렬을 나타낸다.  $U_e$ 와  $F_e$ 는 각각 구속된 비틀음 고려한 부재좌표계에서의 절점변위 및 절점력벡터를 나타낸다. 그리고 식 (23a)에서 회전 및 축방향 변위성분은 곡률효과를 고려하여 다음과 같은 변환관계가 성립한다.

$$\widehat{\omega}_2^p = -U_z'(0) + \frac{U_x(0)}{R} = \omega_2^p + \frac{u^p}{R} \quad (24a)$$

$$\widehat{f}^p = -\theta'(0) - \frac{U_y'(0)}{R} = f^p + \omega_3^p \quad (24b)$$

$$\widehat{g}^p = U_x'(0) + \frac{U_z(0)}{R} = g^p + \frac{w^p}{R} \quad (24c)$$

전체강도행렬에 대응하는 요소강도행렬을 산정하기 위하여 곡률효과가 고려된 변환행렬이 필요하며, 전체 변위파라미터와 요소 변위파라미터에 대한 변환관계는 변환행렬을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_\alpha = T_1 \widehat{U}_\alpha, \quad \alpha = p, q \quad (25)$$

여기서  $p$ 와  $q$ 는 2절점 요소의  $i$  단과  $j$  단을 각각 나타낸다.  $T_1$ 은 한쪽 단에서의 변환행렬을 나타내고 문자의 'hat'는 요소강도행렬에서의 변위벡터를 나타내며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} U_p^T &= \{u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, g^p\}, \\ \widehat{U}_p^T &= \{u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \widehat{\omega}_2^p, \omega_3^p, \widehat{f}^p, \widehat{g}^p\} \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} U_q^T &= \{u^q \ v^q \ w^q \ \omega_1^q \ \omega_2^q \ \omega_3^q \ f^q \ g^q\}, \\ \widehat{U}_e^T &= \{u^q \ v^q \ w^q \ \omega_1^q \ \widehat{\omega}_2^q \ \omega_3^q \ \widehat{f}^q \ \widehat{g}^q\} \end{aligned} \quad (26b)$$

그리고

$$T_1 = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline -1/R & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1/R & 1 \\ \cdot & \cdot & -1/R & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right] \quad (27)$$

식 (25)을 이용하여, 식 (22)의 평형방정식은 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$(\widehat{K}_e - \omega^2 \widehat{M}_e) \widehat{U}_e = \widehat{F}_e \quad (28)$$

여기서

$$\begin{aligned} \widehat{U}_e &= \langle u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \widehat{\omega}_2^p, \omega_3^p, \widehat{f}^p, \widehat{g}^p, \\ &u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \widehat{\omega}_2^q, \omega_3^q, \widehat{f}^q, \widehat{g}^q \rangle \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_e &= \langle F_1^p, F_2^p, F_3^p, M_1^p, \widehat{M}_2^p, M_3^p, \widehat{M}_\phi^p, F_m^p, F_1^q, F_2^q, \\ &F_3^q, M_1^q, \widehat{M}_2^q, M_3^q, \widehat{M}_\phi^q, F_m^q \rangle \end{aligned} \quad (29b)$$

그리고 식 (10)의 강도행렬과 하중 및 변위 벡터는 다음과 같이 계산되어진다.

$$\begin{aligned} \widehat{K}_e &= T^T K_e T, & \widehat{M}_e &= T^T M_e T, \\ U_e &= T \widehat{U}_e, & \widehat{F}_e &= T^T F_e \end{aligned} \quad (30a)$$

여기서

$$T = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right] \quad (30b)$$

결과적으로 직접강도법에 의하여 전체 구조

물에 대한 운동방정식은 다음과 같이 바뀌어 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{U} + K_E U = F = 0 \quad (31)$$

여기서  $M$ 와  $K_E$ 는 전체 구조물에 대응하는 질량 및 탄성강도행렬을 나타내며 이 식으로부터 비대칭 단면을 갖는 박벽 원형 아치의 고유진동수를 계산할 수 있다.

### 4.2 직선보 요소

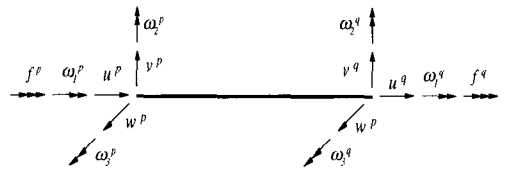


그림 5 박벽 직선보요소의 변위벡터

그림 5는 직선보요소의 재단변위벡터를 나타내는 것으로 구속된 비틀림에 의한 뒹의 자유도를 포함하고 있다. 곡선보에서의 경우와 마찬가지로 선형화된 가상일의 원리를 적용하면, 비대칭 단면을 갖는 박벽 직선보의 총포텐셜에너지  $\Pi$ 는 식 (32) 및 (33)과 같이 나타낼 수 있으며 결국, 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지 식에서  $1/R$ 을 영으로 취한 결과와 일치하게 된다. 직선보의 탄성변형에너지  $\Pi_E$  와 운동에너지  $T$ 를 도침에 대하여 정의된 변위장을 이용하여 구체적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_E &= \frac{1}{2} \int_0^L [EA U_x'^2 + EI_3 U_y''^2 + EI_2 U_z''^2 \\ &+ GJ \theta'^2 + EI_\phi \theta''^2 + 2EI_{\phi 3} U_y'' \theta'' \\ &+ 2EI_{\phi 2} U_z'' \theta'' + 2EI_{23} U_y'' U_z''] dx_1 \end{aligned} \quad (32)$$

그리고

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^L [A(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) + I_0 \theta^2 + I_2 U_z'^2 + I_3 U_y'^2 \\ &+ I_\phi \theta'^2 + 2I_{\phi 2} U_z' \theta' + 2I_{\phi 3} U_y' \theta' + 2I_{23} U_y' U_z'] dx_1 \end{aligned} \quad (33)$$

위 식에서 변위 파라미터와 단면력은 도식에 대하여 정의되었으며 7개의 자유도를 갖는 2절점 3차의 Hermitian 다항식을 사용하는 경우, 박벽 직선보요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다

$$U_x = \xi u^p + (1 - \xi) u^q, \quad \xi = x_1/L \quad (34a)$$

$$U_y = h_1 v^p + h_2 L \omega_3^p + h_3 v^q + h_4 L \omega_3^q \quad (34b)$$

$$U_z = h_1 w^p - h_2 L \omega_2^p + h_3 w^q - h_4 L \omega_2^q \quad (34c)$$

$$\theta = h_1 \omega_1^p - h_2 L f^p + h_3 \omega_1^q - h_4 L f^q \quad (34d)$$

식 (34)를 식 (32) 및 (33)의 총포텐셜에너지 식에 대입하면, 박벽 직선보요소의 대한 행렬 운동방정식은 식 (22)와 동일하게 얻어지며 이때의 벡터 성분은 다음과 같다.

$$U_e = \langle u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q \rangle \quad (35a)$$

$$F_e = \langle F_1^p, F_2^p, F_3^p, M_1^p, M_2^p, M_3^p, M_4^p, F_1^q, F_2^q, F_3^q, M_1^q, M_2^q, M_3^q, M_4^q \rangle \quad (35b)$$

그리고  $K_e$ 와  $M_e$ 는 각각 요소좌표계에 대한  $14 \times 14$  탄성강도 및 질량행렬이고  $U_e$ 와  $F_e$ 는 각각 구속된 뒎 효과를 고려한 절점변위 및 하중벡터를 나타낸다. 결국, 얻어진 요소강도행렬을 전체강도행렬로 변환하여 고유치 문제를 해결함으로써 비대칭 단면을 갖는 박벽 직선보의 고유진동 수를 산정할 수 있다.

### 5. 해석예제

본 연구에서는 비대칭 박벽단면을 갖는 원형 곡선보의 자유진동해석을 수행하기 위하여, 가상일의 원리를 이용한 3차원 연속체로부터 박벽단면의 비대칭성과 구속된 비틀(restrained

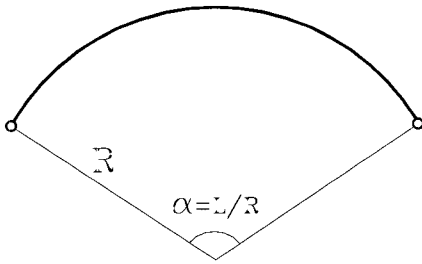
warping)효과를 고려하는 운동방정식을 유도하였고, 이로부터 박벽 곡선 및 직선보요소에 대한 유한요소 정식화 과정을 제시하였으며 단순지지되고 일축 대칭단면을 갖는 곡선보에 대한 엄밀해를 유도하였다. 유한요소 정식화 과정에서는, 박벽 곡선보를 유한요소로 분할하여 요소의 변위장을 요소 변위벡터에 관한 3차의 Hermitian 다항식으로 나타낸 후 이를 운동방정식에 대입하여 5점 가우스적분을 행함으로써 탄성강도행렬 및 질량행렬을 산정하고 Jacobi의 방법을 적용하여 고유치 문제를 해결하였다. 본 연구에서 제시한 이론 및 개발된 프로그램을 검증하기 위하여, 단순지지된 아치 및 캔틸레버 아치의 3차원 자유진동 해석을 수행하였으며 해석 결과를 범용 구조해석 프로그램인 ABAQUS의 쉘요소를 이용한 해석 결과와 비교함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다.

### 5.1 일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 자유진동해석

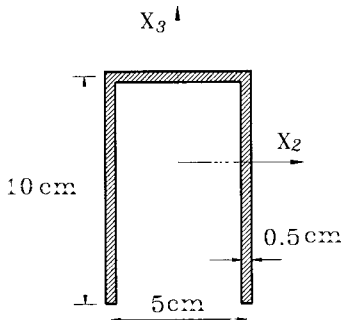
그림 6은 단순지지되고 일축대칭 단면( $x_3$ 축에 대하여 대칭)을 갖는 박벽 원형아치를 보여주고 있다. 아치의 단면계수는 이전의 연구<sup>(6)</sup>에서 제시한 부록 I의 전단중심에 대한 단면상수를 식 (6)에 대입함으로써 도심축에 대해 정의된 단면계수로 변환함으로써 재료상수와 함께 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= 12.5 \text{ cm}^2, \quad E = 73,000 \text{ kg/cm}^2, \\ G &= 28,000 \text{ kg/cm}^2, \quad J = 1.04167 \text{ cm}^4, \\ e_2 &= 0 \text{ cm}, \quad e_3 = 8.61538 \text{ cm}, \quad I_2 = 133.3854 \text{ cm}^4, \\ I_3 &= 67.9167 \text{ cm}^4, \quad I_4 = 5682.1302 \text{ cm}^6, \\ I_{42} &= 0 \text{ cm}^5, \quad I_{43} = -585.1282 \text{ cm}^5, \\ I_{222} &= -100.0 \text{ cm}^5, \quad I_{223} = 0 \text{ cm}^5, \quad I_{422} = 0 \text{ cm}^6, \\ I_{233} &= -41.667 \text{ cm}^5, \quad I_{333} = 0 \text{ cm}^5, \\ I_{442} &= 7465.730 \text{ cm}^7, \quad I_{443} = 0 \text{ cm}^7, \quad I_{433} = 0 \text{ cm}^6, \\ I_{423} &= -282.051 \text{ cm}^6, \quad \rho = 0.00785 \text{ kg/cm}^3 \end{aligned}$$





(a) 단순지지된 원형아치

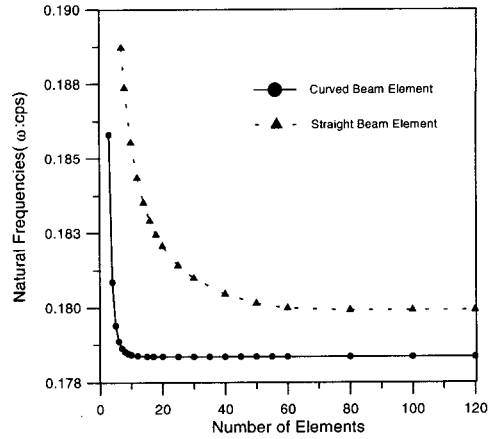


(b) 일축대칭단면

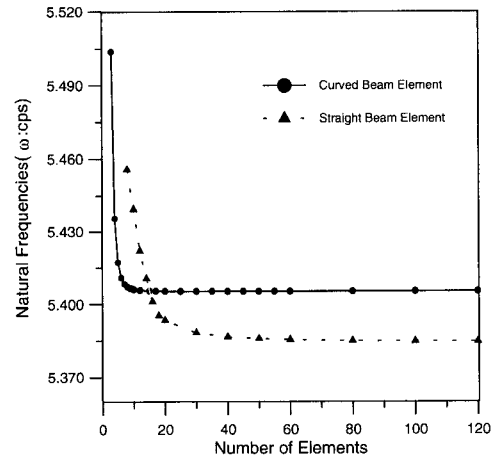
그림 6 곡선보의 형상

본 예제에서는 아치에 대한 호의 길이를 250cm로 전체구조에 대하여 일정하게 유지시키고 내각  $\alpha$ 만을 변화시키며 면내에 대한 자유진동 해석을 수행하였다. 아치의 단면은 X-Z평면에 대하여 대칭이므로 면내와 면외거동이 서로 독립된 진동모드를 갖게되며, 면외 이동변위와 회전에 의한 복합모드로 진동하는 면외 자유진동 해석은 이전의 연구<sup>(6)</sup>에서 제시한 바 있으므로, 그림 7과 같이 요소 수에 따른 수렴성 판정을 위한 해석을 제외하고는 면내 진동해석만을 수행하였다.

그림 7은 요소 수에 따른 수렴정도를 파악하기 위하여 내각이  $90^\circ$ 인 원형아치의 면외 및 면내에 대한 최 저차의 고유진동수  $\omega$ 를 제시한 것이며, 그 결과 곡선보요소는 10개 이상 사용하면 급격히 수렴하고 직선보요소는 80개 정도를 사용하여야 수렴하게 됨을 알 수 있다.



(a) 면외 자유진동



(b) 면내 자유진동

그림 7 요소 수에 따른 원형 아치의 고유진동수  $\omega$  ( $\alpha = 90^\circ$ )

이상의 결과로부터, 직선보요소를 이용하여 해석하는 경우에는 기하학적 대칭성을 고려하여 아치의 반만을 50개의 요소를 이용하여 모델링하였고 곡선보를 이용하는 경우에는 전체 구조에 대하여 20개의 요소를 사용하였다. 표 1은 면내 자유진동에 대하여 박벽 원형아치의 고유치( $\omega^2$ )를 해석한 결과를 제시한 것이며, 면내 자유진동에 대한 엄밀해는 앞 절에서 언급한 바와 같이 회전관성이 무시되고 비신장 조건을 고려한 역대칭(anti-symmetric) 모드에

대한 결과만을 제시하였다. 그 결과, 엄밀해에 의한 곡선보가 유한요소에 의한 곡선보보다 상대적으로 큰 강성을 갖게되어 유한요소 해석결과가 엄밀해보다 작은 값을 얻었으며 곡선보요소 및 직선보요소에 의한 고유치( $\omega^2$ ) 해석 결과는 비교적 잘 일치하였다.

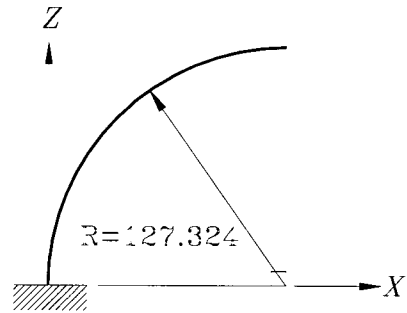
표 1 단순지지된 박벽원형아치의 면내 자유진동에 대한 고유치,  $\omega^2$

Mode	Angle (degree)	Vibration mode	Analytical solution	FEM's solution	
				Curved beam	Straight beam
1st	30	symm.	·	34.917	34.612
		anti-symm.	38.307	38.045	37.969
	60	symm.	·	112.69	111.42
		anti-symm.	34.651	34.401	33.322
	90	symm.	·	146.26	144.52
		anti-symm.	29.436	29.219	28.995
120	symm.	·	142.81	140.82	
	anti-symm.	23.600	23.432	23.184	
2nd	30	symm.	·	200.10	199.80
		anti-symm.	629.03	611.59	610.11
	60	symm.	·	226.51	225.98
		anti-symm.	614.32	595.01	591.71
	90	symm.	·	364.24	362.12
		anti-symm.	591.01	570.47	565.27
120	symm.	·	599.47	593.91	
	anti-symm.	561.06	540.69	533.73	

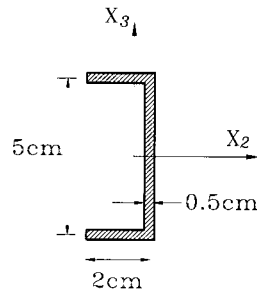
### 5.2 일축단면을 갖는 캔틸레버 아치( $X_2$ 에 대하여 대칭단면)

그림 8은 X-Y 평면에 대하여 대칭단면을 갖는 박벽 캔틸레버 아치를 나타낸다. 아치의 단면계수는 이전의 연구<sup>(6)</sup>에서 제시한 부록 I에 제시한 방법을 이용하여 계산하고 도심축에 대한 단면계수로 변환함으로써 얻어진다. 결국, 캔틸레버 아치의 안정성 해석에 사용된 재료상수 및 단면계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 A &= 4.5 \text{ cm}^2, & E &= 30,000 \text{ kg/cm}^2, \\
 G &= 11,500 \text{ kg/cm}^2, & J &= 0.375 \text{ cm}^4, \\
 e_2 &= 1.15033 \text{ cm}, & e_3 &= 0.0 \text{ cm},
 \end{aligned}$$



(a) 아치의 형상



(b) 아치의 단면

그림 8  $X_2$  축에 대하여 대칭인 박벽 캔틸레버 아치

$$\begin{aligned}
 I_2 &= 17.7500 \text{ cm}^4, & I_3 &= 1.82986 \text{ cm}^4, \\
 I_{\phi} &= 31.33086 \text{ cm}^6, & I_{\phi 2} &= -20.41830 \text{ cm}^5, \\
 I_{\phi 3} &= 0.0 \text{ cm}^5, & I_{222} &= 0.0 \text{ cm}^5, \\
 I_{223} &= -4.62963 \text{ cm}^5, & I_{233} &= 0.0 \text{ cm}^5, \\
 I_{333} &= -1.23457 \text{ cm}^5, & I_{\phi \phi 2} &= 0.0 \text{ cm}^7, \\
 I_{\phi \phi 3} &= -28.38363 \text{ cm}^7, & I_{\phi 22} &= 0.0 \text{ cm}^6, \\
 I_{\phi 23} &= -13.16872 \text{ cm}^6, & I_{\phi 33} &= 0.0 \text{ cm}^6,
 \end{aligned}$$

본 예제는 아치의 전체구조와 단면형상이 갖는 특성으로 인해서 면내 및 면외거동이 서로 연계되기 때문에 완전 비대칭 단면을 갖는 아치를 해석하는 것과 같은 경우이다. 곡률반경 R은 곡률중심에서 단면 도심까지의 거리이며 원호의 길이는 200cm이고 단면의 두께는 구조물 전체에 대하여 일정하다. 캔틸레버 아치의 자유진동해석을 수행하기 위하여, 유한요소를 이용한 해석시 수렴된 값을 보이는 요소

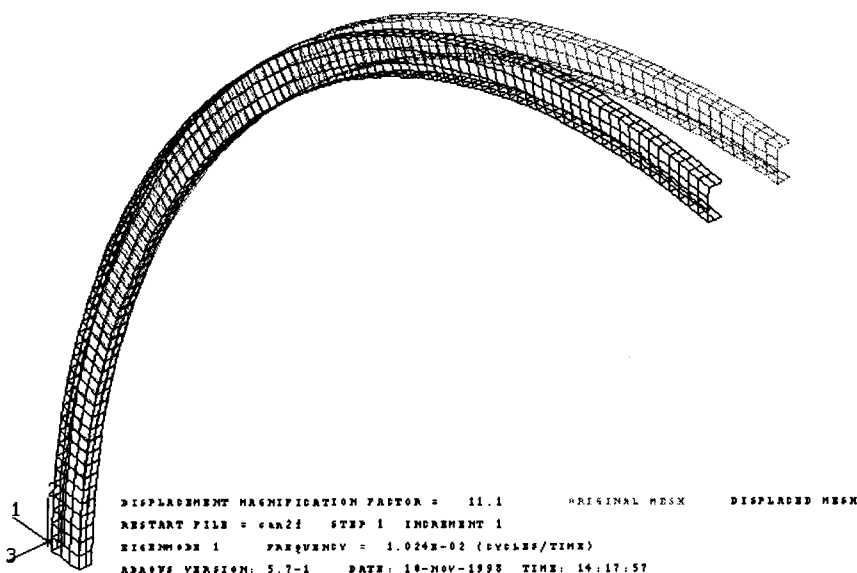
의 수를 선택하였고, 그 결과 직선보요소는 50개 그리고 곡선보는 20개의 요소를 사용하였다. 범용구조해석 프로그램인 ABAQUS를 이용한 해석에서는 단면에 대하여 7개, 길이방향으로 100개를 이용하여 총 700개의 9절점 쉘 요소를 사용하고 감차적분을 적용하였으며 그림 9는 ABAQUS의 쉘요소를 이용하여 캔틸레버 아치의 자유진동모드를 나타낸 것이다. 표 2

는 박벽 캔틸레버 아치의 고유진동수( $\omega$ )의 제곱(고유치:  $\omega^2$ )을 나타낸 것으로, 본 연구에서 제시한 곡선보요소에 의한 해석결과가 ABAQUS를 이용한 해석결과와 직선보를 이용한 해석 결과의 중간 값 정도를 나타내었고, 결국 곡률 효과가 고려된 곡선보요소는 직선보요소에 비해 적은 수의 요소로 모델링하더라도 정확한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

표 2  $X_2$ 축에 대하여 대칭인 박벽 캔틸레버 아치의 고유치,  $\omega^2$

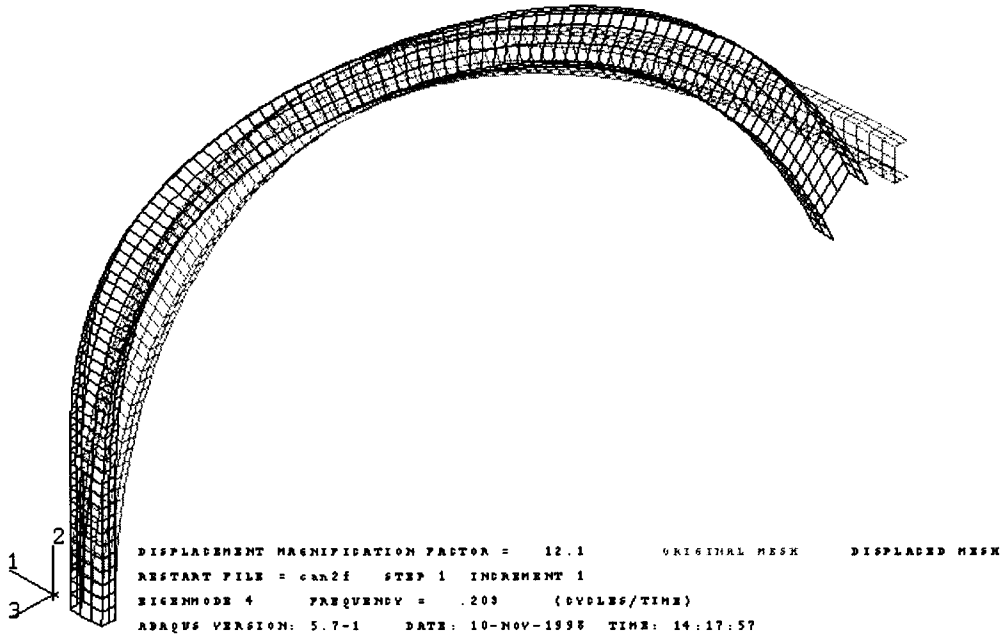
vibration modes	thin-walled curved beam element	thin-walled straight frame element	ABAQUS (shell elements)
1	0.004248	0.0050218	0.004139
2	0.12058	0.1243830	0.12172
3	0.14281	0.1496007	0.14110
4	1.65258	1.7688560	1.6266
5	2.82722	2.8903576	2.8066
6	7.80903	8.5062958	7.6888
7	18.1506	19.230160	18.018
8	23.2419	24.762296	22.817
9	32.1306	34.870961	31.937
10	41.2302	43.658367	40.624

1

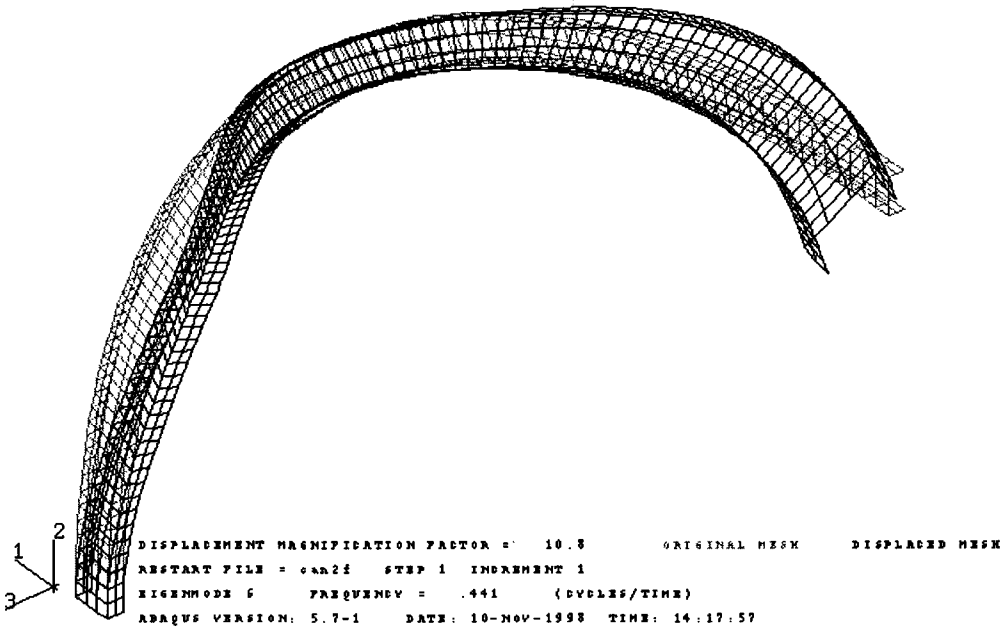


(a) 박벽 캔틸레버 아치의 1차 자유진동 모드

그림 9 박벽 캔틸레버 아치의 자유진동 모드(ABAQUS - 쉘요소) (계속)

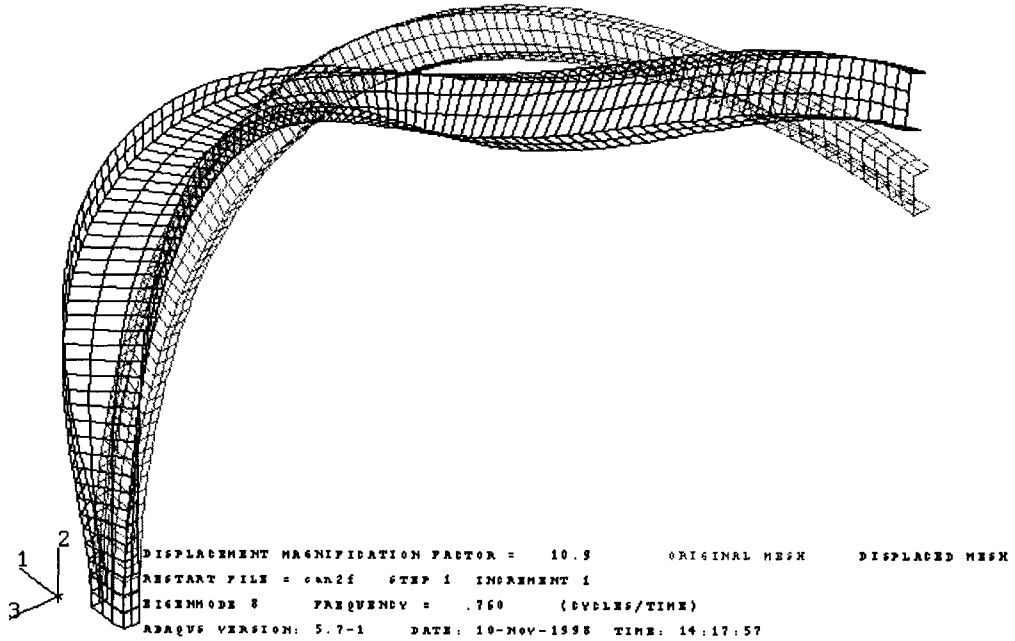


(b) 박벽 캔틸레버 아치의 4차 자유진동 모드



(c) 박벽 캔틸레버 아치의 6차 자유진동 모드

그림 9 박벽 캔틸레버 아치의 자유진동 모드(ABAQUS - 쉘요소) (계속)



(d) 박벽 캔틸레버 아치의 8차 자유진동 모드

그림 9 박벽 캔틸레버 아치의 자유진동 모드(ABAQUS - 셸요소)

## 6. 결 론

3차원 연속체에 대한 평형방정식으로부터 유도된 선형화된 가상일의 원리를 적용하고 박벽단면의 구속된 뒤를 고려하는 변위장을 도입하여 단면에 대해 적분함으로써 3차원 자유진동해석을 수행하기 위한 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지를 유도하였고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 아치에 대해서는 면내 자유진동모드에 대응하는 엄밀해를 제시하였다. 얻어진 총포텐셜에너지를 토대로 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보요소 및 직선보요소를 개발하였고 이를 이용한 유한요소 정식화과정을 제시하였다. 유한요소의 정식화 과정에서는 3차의 Hermitian 다항식을 적용하여 형상함수로 가정하고 탄성강도행렬과 질량행렬을 산정하였으며 변환행렬을 이용하여 곡률효과를 고려하였다. 본 연구에서 제시한 이론 및 방법의 타당성을 증명하기

위하여, 범용 구조해석 프로그램인 ABAQUS의 셸요소와 본 연구에서 제시한 직선보요소를 이용하여 아치구조를 해석한 결과, 다음과 같은 결론에 도달하였다.

1. 단순지지되고 일축 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면내 자유진동에 대한 엄밀해를 유도하였고 이를 직선보를 이용한 해석결과와 비교한 결과 서로 잘 일치하였다.
2. 면내와 면외거동이 연계되는 일축대칭 단면을 갖는 캔틸레버 아치의 자유진동 해석을 수행한 결과, 본 연구에서 제시한 박벽 곡선보요소를 이용한 해석결과가 ABAQUS의 셸요소를 이용한 해석결과와 잘 일치하였으며, 직선보요소는 많은 수의 요소를 사용하더라도 ABAQUS의 결과와 다소의 차이를 보이는 한계를 나타내었다.
3. 본 연구에서는 임의의 지지조건과 완전 비

대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보를 해석할 수 있는 유한요소 프로그램을 개발하였으며, 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 원형 아치의 면내 자유진동모드에 대응하는 엄밀해를 유도함으로써 곡선보가 이용되는 제반 구조물의 동적해석에 유용하게 쓰여질 수 있을 것으로 판단된다.

### 감사의 글

본 연구는 포항제철 석좌교수 연구기금에 의해 연구되었으므로 이에 깊은 감사를 드립니다.

### 참고 문헌

1. Kou, C.h., Steven, E.B., and Huang, J.Y., "Free vibration analysis of curved thin-walled girder bridges", *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol 118(6), No. 10, 1992. 10, pp. 2890-2910.
2. Kim, MY., Chang, S.P., and Kim, S.B., "Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams I : analytic approach," *Int. J. Numer. Methods Engineering*, Vol 37, 1994. 12, pp. 4097~4115.
3. Kim, MY., Chang, S.P., and Kim, S.B., "Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams II : numerical approach," *Int. J. Numer. Methods Engineering*, 1994. 12, pp. 4117~4140.
4. 임성순, "나선형 곡선 부재의 동적 해석", 공학박사학위논문, 서울대학교, 1987.
5. 윤기용, "수평곡선 I형교의 동적거동 특성", 공학박사학위논문, 고려대학교, 1997.
6. 장승필, 김문영, 민병철, "일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형 곡선보의 자유진동 해석", 한국지진공학회논문집, 제 2권, 제 2호(통권 제6호), 1998. 6, pp. 57-68.
7. ABAQUS, User's Manual Vol. I and Vol. II, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1992.