

Elliptical 함수, Legendre 다항식을 이용한 단층, 대전류 솔레노이드의 자장균일도 비교

정정호 · 박포규 · 김윤배

한국표준과학연구원, 대전 유성구 유성우체국 사서함 102, 305-606

V. Ya. Shifrin, V. N. Khorev

D.I. Mendeleyev Institute for Metrology (VNIIM), 198005, St. Petersburg, Russia

(1999년 8월 9일 받음, 1999년 10월 10일 최종수정본 받음)

단층 솔레노이드의 길이 1.02 m, 평균반경 0.11467 m, 단위길이당 권선수 1000 turns/m에서 Elliptical 함수와 Legendre 다항식, Biot-Savart 법칙을 이용하여 단층 솔레노이드에 대전류를 인가하여 중심부근에서 자장균일도를 향상시키는 계산방법, 자장분포도 및 반지름 변화에 따른 자장균일도의 차이를 구하였다. 단전류 방법의 경우 1×10^{-6} 의 자장균일도 공간이 중심에서 0.1 cm 미만이지만, 5-current 방법은 8 cm 정도로 80배 정도 확대됨을 알 수 있고, 단층 단전류를 사용한 솔레노이드와 비교하였을 때 길이가 0.16 km인 경우와 같은 효과를 얻었다. 또한 각각의 계산방법에 대한 자장오차를 비교분석 하였다.

I. 서 론

솔레노이드는 자기측정 분야에서 다양하게 사용되고 있으며, 사용목적에 따라 여러 가지 형태로 만들 수 있다. 즉 자장균일도, 균일한 자장발생공간 등의 필요에 따라, 적절한 크기의 솔레노이드 치수(길이, 반경, 피치)의 선택과 아울러 기계적인 정밀 가공이 필요하다. 자장균일도는 솔레노이드의 길이를 크게하면 향상되지만, 실제 사용에 있어서는 실험조건이나 경제적인 문제 등의 제약이 따른다. 또한 솔레노이드 중심에서 대칭인 양끝 부분에 단위 길이당 권선수를 늘리거나[1], 다층 코일을 설치하는 방법이 있지만, 피치의 불균일성, 중심축의 불일치 등으로 인하여 높은 균일도를 얻기가 어렵다. 이러한 단점을 보완하는 방법으로 균일하게 감긴 단층 솔레노이드에 여러 개의 보조전류를 인가하여, 그 분포를 계산에 의해 최적화 시키면 중심부의 넓은 공간에서 균일한 자장을 발생시킬 수 있다[2-4].

본 연구에서는 단층 솔레노이드의 주전류 외에 중심에서 대칭인 1개, 2개, 3개, 4개의 보조전류를 인가하여 중심부근에서 최대의 균일도를 얻는 방법과 중심부근의 공간에서 Elliptical 함수와 Legendre 다항식을 이용하여 자장을 계산하였다. Elliptical 함수는 솔레노이드 내부 및 외부의 넓은 공간에 걸쳐 축 및 지름방향 성분의 자장을 계산할 수 있고, Legendre 다항식은 중심부근에서 수렴 속도가 빠르기 때문에 중심부근의 자장을 구할 때 편리하다[5-6].

솔레노이드 중심부근에서 각각의 방법으로 대전류를 사

용하여 계산한 자장분포도와 단전류를 사용할 때의 자장분포도를 비교분석 하였으며, 또한 반경변화에 대한 자장의 변화량도 계산하였다. 단전류를 사용한 자장계산값과 헬름 마그네토미터를 이용하여 측정된 값을 비교분석 하였다.

II. 자장계산

2.1 Legendre 다항식을 이용한 자장균일도 향상

솔레노이드 중심부근에서 자장의 계산은 Legendre 다항식으로 표현하는 것이 수렴속도가 빠르기 때문에 편리하다. Legendre 다항식을 전개하기 위해서는 벡터 포텐셜을 도입해야 되는데, Fig. 1에서 보듯이 원형 전류 T_1 에 의해 임의의 점 $P(\gamma, \theta)$ 에서의 벡터 포텐셜은 다음과 같이 주어진다[6-7].

$$\vec{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2} \sin \theta \sin^2 \theta_1 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^m \frac{P'_m(\cos \theta) P'_m(\cos \theta_1)}{m(m+1)} e_\phi \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (1)$$

$$\vec{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2} \sin \theta \sin^2 \theta_1 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r}\right)^{(m+1)} \frac{P'_m(\cos \theta) P'_m(\cos \theta_1)}{m(m+1)} e_\phi \quad (r \geq r_1) \quad (2)$$

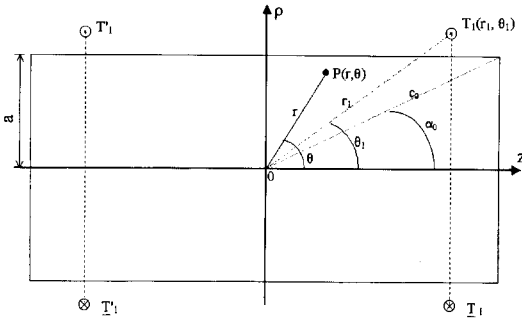


Fig. 1. Axial section of current sheet.

여기서 I_n 는 전류, $P_m(\cos \theta)$ 는 Legendre 다항식을 나타낸다. Legendre 다항식을 사용하여 자장을 계산할때 솔레노이드 중심으로부터의 대각선 길이 r_1 에 따라 식이 다르게 표현되며, 중심에서 r_1 이내의 공간에서는 식(1), r_1 보다 먼 공간에서는 식(2)를 사용하여 각각 계산할 수 있다. 중심에서 T_1 의 대칭거리에 위치한 T'_1 에 의한 점 $P(r, \theta)$ 에서의 벡터 포텐셜은 식(1)에서 θ_1 을 $\pi - \theta_1$ 으로 치환하는 것과 같다. 그러므로 두 개의 원형전류 T_1 과 T'_1 에 의한 벡터 포텐셜은 각각의 합으로 계산된다. 원형전류가 연속적으로 배열되어 있는 솔레노이드에 의한 벡터 포텐셜은 전류 I 대신 nI 를 대입하고, θ_1 을 α_0 에서 $\pi/2$ 까지 적분하여 구할 수 있다. 이 벡터 포텐셜에 회전연산자 curl를 취하면 솔레노이드의 자장을 구할 수 있다. Fig. 1에서 솔레노이드 중심에서 대각선 길이가 C_0 , 반지름 a 인 솔레노이드 내부의 한 점 $P(r, \theta)$ 에서의 자장은 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{B}(r, \theta; \alpha_0) = B_\rho(r, \theta; \alpha_0) \hat{e}_\rho + B_z(r, \theta; \alpha_0) \hat{e}_z \quad (3)$$

여기서

$$B_\rho(r, \theta; \alpha_0) = \mu_0 n I_0 \sin^2 \alpha_0 \sin \theta \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c_0}\right)^{2m} \frac{P'_m(\cos \theta) P'_m(\cos \alpha_0)}{2m(m+1)} \quad (4)$$

$$B_z(r, \theta; \alpha_0) = \mu_0 n I_0 \left[\cos \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c_0}\right)^{2m} \frac{P'_{2m}(\cos \theta) P'_{2m}(\cos \alpha_0)}{2m} \right] \quad (5)$$

일반적으로 축에 수직인 자장성분 B_ρ 는 B_z 에 비해 그 크기가 10^{-6} 정도이기 때문에 축방향 성분의 자장인 B_z 만

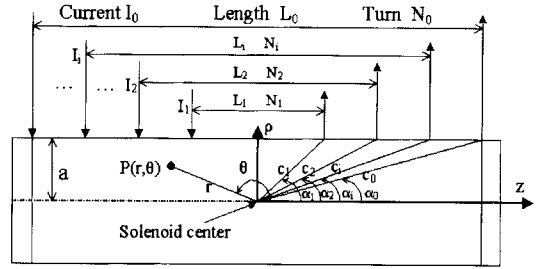


Fig. 2. Block diagram of a multi-current solenoid.

을 고려하여 계산하였다[8].

중심점 부근의 공간에서 자장 균일도를 향상시키기 위해서는 솔레노이드 각 권선에 차등전류분포를 형성시키는 것이 필요한데, Fig. 2에 나타난 바와 같이 주전류 I_0 외에 길이 L_i , 권선수 N_i 인 보조전류 I_i 를 인가하면 중심에서의 자장은 각 전류에 의한 자장의 합으로 주어진다.

$$B_z^{tot} = \sum_{i=0}^f B_z^{(i)} \quad (6)$$

$$B_z^{(i)} = \mu_0 n I_i \left[\cos \alpha_i - \sin^2 \alpha_i \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{c_i}\right)^{2m} \frac{P'_{2m}(\cos \theta) P'_{2m}(\cos \alpha_i)}{2m} \right] \quad (7)$$

여기서 f 는 보조전류의 개수를 나타낸다. 그러나 이 식은 첫 번째 보조전류의 대각선 길이 C_1 이내의 거리에서만 유효하고 C_1 을 벗어나면 식(2)을 사용하여야 한다.

균일자장을 형성하기 위한 보조전류 결정에는 여러 가지 방법이 있으나, Legendre 다항식을 사용하여 계산할 경우 측정점 변수 (r, θ) 가 포함된 전개항의 계수가 "0"이 되도록 보조전류를 설정하면 솔레노이드 중심점 부근에서 구대칭형의 균일 자장 공간을 형성시킬 수 있기 때문에 식(7)을 이용하여 식(8)과 같이 Legendre 전개항의 윗림 차순으로 전개하는 것이 보조전류를 결정하는데 편리하다[8].

$$B_z^{tot} = \mu_0 n \left\{ \sum_i I_i \cos \alpha_i - \sum_i A_i I_i \frac{r^2}{2} P_2(\cos \theta) - \sum_i B_i I_i \frac{r^4}{4} P_4(\cos \theta) - \sum_i C_i I_i \frac{r^6}{6} P_6(\cos \theta) - \sum_i D_i I_i \frac{r^8}{8} P_8(\cos \theta) \dots \right\} \quad (8)$$

$$\text{여기서 } A_i = \left(\frac{\sin \alpha_i}{C_i}\right)^2 P'_2(\cos \alpha_i)$$

$$B_i = \left(\frac{\sin \alpha_i}{C_i^2}\right)^2 P'_4(\cos \alpha_i)$$

$$C_i = \left(\frac{\sin \alpha_i}{C_i^3}\right)^2 P'_6(\cos \alpha_i)$$

$$D_i = \left(\frac{\sin \alpha_i}{C_i^4}\right)^2 P'_8(\cos \alpha_i)$$

만일 p 개의 보조 전류를 사용한다면 p 개의 항의 계수를 “0”으로 만들 수 있는데, Legendre 다항식에서 (r, θ) 가 포함된 항의 차수가 증가함에 따라 자장의 크기에 미치는 영향은 감소한다. 따라서 균일자장 형성을 위해 Legendre 전개에 낮은 차수 항부터 “0”이 되도록 보조전류 크기를 결정해야 하는데, 이를 만족하는 솔레노이드의 보조전류의 해는 식(7)에 의해 구해진다. 그러므로 식(9)에 Cramer 법칙을 적용해서 1의 해를 구할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^f A_i I_i = -A_0 I_0, \quad \sum_{i=1}^f B_i I_i = -B_0 I_0, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^f F_i I_i = -F_0 I_0 \quad (9)$$

Legendre 다항식을 이용해서 인가한 전류의 수에 따른 중심축상에서의 자장균일도를 비교해보면 Fig. 3과 같다. 단전류 방법과 비교하면, 10⁻⁸의 자장 균일도 공간이 2-전류 방법은 14배, 3-전류 방법은 19배, 4-전류 방법은 70배, 5-전류 방법은 80배 정도 확대됨을 알 수 있다. 또한 5-전류 방법은 솔레노이드 중심에서 2cm 이내의 공간에서 자장균일도를 비교했을 때 단일 전류방법을 사용한 솔레노

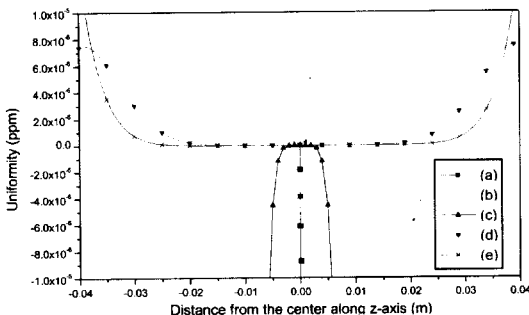


Fig. 3. Uniformity of magnetic field along z-axis using Legendre polynomials (a) single current, (b) 2-current, (c) 3-current, (d) 4-current, (e) 5-current method.

이드의 길이가 0.16 km에 해당되는 효과와 같은 균일자장 공간을 얻을 수 있다.

2.2 Elliptical 함수를 이용한 자장계산

Biot-Savart 법칙이 솔레노이드 중심축상에서 축방향성분의 자장만 계산할 수 있는데 비해, Elliptical 함수는 축 및 지름방향 성분의 자장을 계산할 수 있고, 솔레노이드 전 공간에 걸쳐 단일식을 사용하여 자장을 계산할 수 있는 잇점이 있다.

Elliptical 함수를 사용하여 단전류에서 솔레노이드의 자장을 계산할 때, 식(10) 및 식(11)을 이용하며, 대전류 방법에서는 이식을 중첩하여 계산할 수 있다[9].

솔레노이드 길이가 $L(l_2-l_1)$, 반경이 R , 권선수 N 인 솔레노이드에 주전류 I 를 인가할 때 원통좌표계로 나타낸 점 $P(z, \rho)$ 에서의 자장은 아래식으로 주어진다.

$$H_z = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{z'-z}{\sqrt{(R+\rho)^2+(z'-z)^2}} \left[2R+\rho \Pi + K \right]_{z'=l_1}^{z'=l_2} \quad (10)$$

$$H_\rho = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\sqrt{(R+\rho)^2+(z'-z)^2}}{\rho} [2(k-E)-(k^2K)]_{z'=l_1}^{z'=l_2} \quad (11)$$

$$\text{여기서 } \sigma = \frac{IN}{l_2-l_1} = nI$$

$$k^2 = \frac{4R\rho}{[(R+\rho)^2+(z'-z)^2]}$$

$$K = \frac{\pi}{2}$$

$$E = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2}k^2 \right)$$

$$\Pi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{2(1-P)} + 1 \right)$$

$$P = \frac{4R\rho}{(R+\rho)^2}$$

Fig. 4는 Legendre 다항식을 사용하여 보조전류의 크기와 위치를 최적화 한 다음, Elliptical 함수로 계산한 각 current의 자장균일도의 변화를 나타낸 것이다. 각 current마다 평균 20%의 자장 균일도 공간이 향상되는 것을 확인할 수 있는데 1-current (a)일 경우 10⁻⁸ 자장 균일도 공간이 0.1 cm 이하인데 비해 5-current (e)의 경우 3.6 cm 정도로 확대됨을 알 수 있다. Legendre 다항식의 경우 5-current 방법에서 10⁻⁸ 자장 균일도 공간이 8 cm까지 확대되는 것과 비교해 보면 2~3배 가량의 차이가 있다. Legendre 다항식의 경우 자장균일도 공간이 이처럼 크게

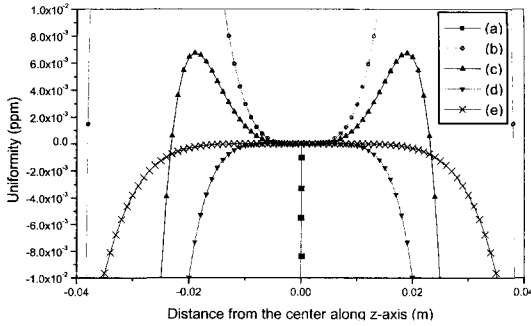


Fig. 4. Uniformity of magnetic field along z-axis using Elliptical function (a) single current, (b) 2-current, (c) 3-current, (d) 4-current, (e) 5-current method.

나타나는 이유는 중심에서는 수렴속도가 빨라 Elliptical 함수와 비슷한 값을 나타내나 Fig. 5의 (e)에서 보듯이 중심에서 3 cm를 벗어나면 식(2)를 사용해야 하나 계산의 편의상 식(1)만 사용했기 때문에 이런 오차가 발생한다.

III. 계산 결과 및 측정값 비교

3.1 Biot-Savart, Elliptical, and Legendre 방식을 이용한 중심축상에서의 자장계산

Elliptical 함수와 Legendre 다항식의 검증을 위해 Biot-Savart 식을 이용하고, 세가지 계산방법의 차이점을 비교 분석했다.

Biot-Savart 법칙을 이용하여 자장을 계산한 방법은 식 (12)와 같다.

$$B_z = \frac{NI\mu_0}{2} \left\{ \frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}-z\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}+z\right)^2}} \right\} \quad (12)$$

여기서 N 은 권선수, I 는 전류, l 은 솔레노이드의 길이, a 는 반지름, μ_0 는 진공 투자율로 $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 이다.

Biot-Savart 법칙과 Elliptical 함수의 경우 솔레노이드 전 구간에 걸쳐 정확히 일치하는 결과를 보여주지만, Legendre 다항식의 경우 솔레노이드 중심부근에서는 다른 방정식과 일치하는 값을 주지만 중심에서 멀어질수록 차이가 커지는 형태로 나타난다. Fig. 5에 세 방정식의 각 current별 자장계산값을 비교했다. 5-current (e)의 경우 중심에서 30 cm 이상 벗어나는 지점부터 Elliptical 함수와 Legendre 다항식의 계산값이 차이가 나기 시작한다. 이는 계산위치가 보조전류의 대각선 길이보다 클 경우 식(2)을

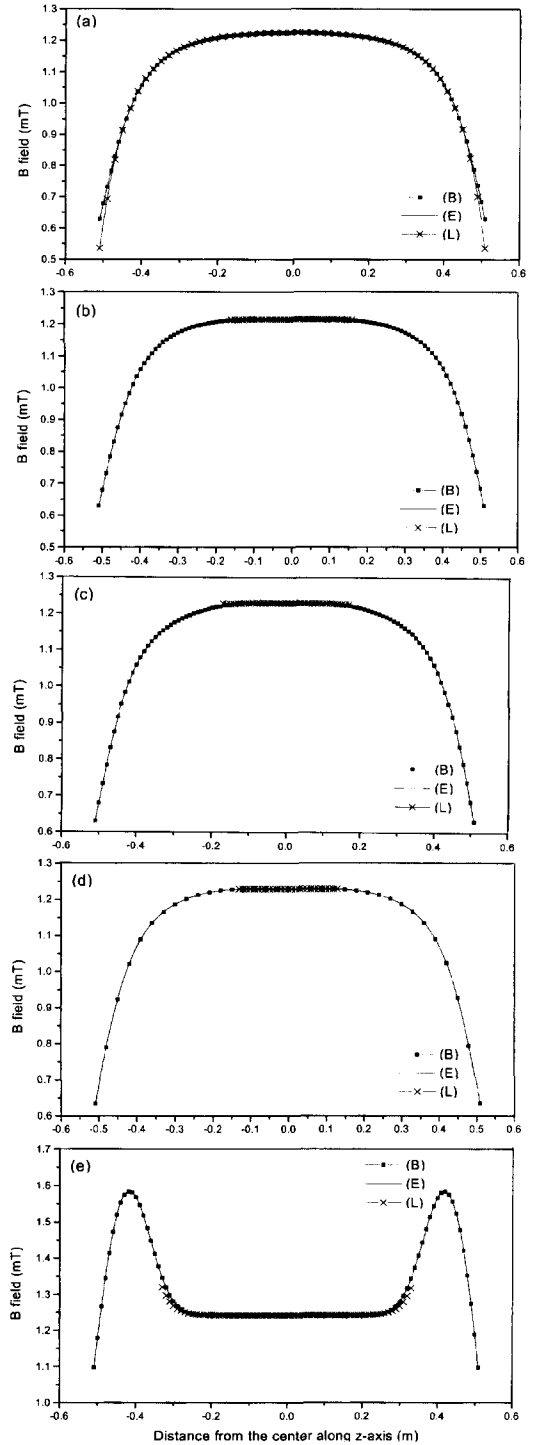


Fig. 5. Calculation of magnetic field in solenoid using Biot-Savart law (B), Elliptical function (E), and Legendre polynomials (L). (a) single current, (b) 2-current, (c) 3-current, (d) 4-current, (e) 5-current method.

이용하여 계산해야 함을 의미한다. 그러나 보조 전류의 위치가 중심에서 20 cm 이내에 있는 경우에는 각각의 방정식을 사용하여 계산한 자장값이 정확히 일치함을 보여준다.

3.2 공간상에서의 자장 균일도

컴퓨터를 사용하여 각 current의 해를 구할 수 있는데, 이 해를 이용하여 중심부근에서의 자장분포를 계산할 수 있다. Fig. 6에서와 같이 중심부근에서의 자장 균일도가 보조전류의 수가 증가함에 따라 향상되는 것을 확인할 수 있다. 각 그림은 솔레노이드 중심에서 ± 10 cm 이내에 분포하는 자장 균일도를 그린 것이다. 그림에서 0으로 나타나는 contour 라인은 자장균일도가 10^{-9} 이하인 공간을 나

타내는데 2-current부터 5-current 방법까지 10^{-9} 자장 균일도 공간이 4 cm, 5 cm, 10 cm, 12 cm 등으로 확대되었다. 또한 보조 전류의 수가 증가함에 따라 자장균일도 공간이 확대됨을 0 라인 밖의 첫 번째 contour 라인을 통해서도 확인할 수 있다.

3.3 계산값과 측정값의 비교

Fig. 7은 1-current 방법의 솔레노이드 중심축상에서 자장균일도의 계산값과 측정값을 비교한 것이다. Biot-Savart 법칙으로 계산된 자장값과 헬륨 마그네토미터를 이용하여 측정된 값을 비교해보면, 측정상의 오차로 인해 중심점이 정확히 일치하지는 않지만, 자장값은 $\pm 10^{-5}$ 이내로 일치

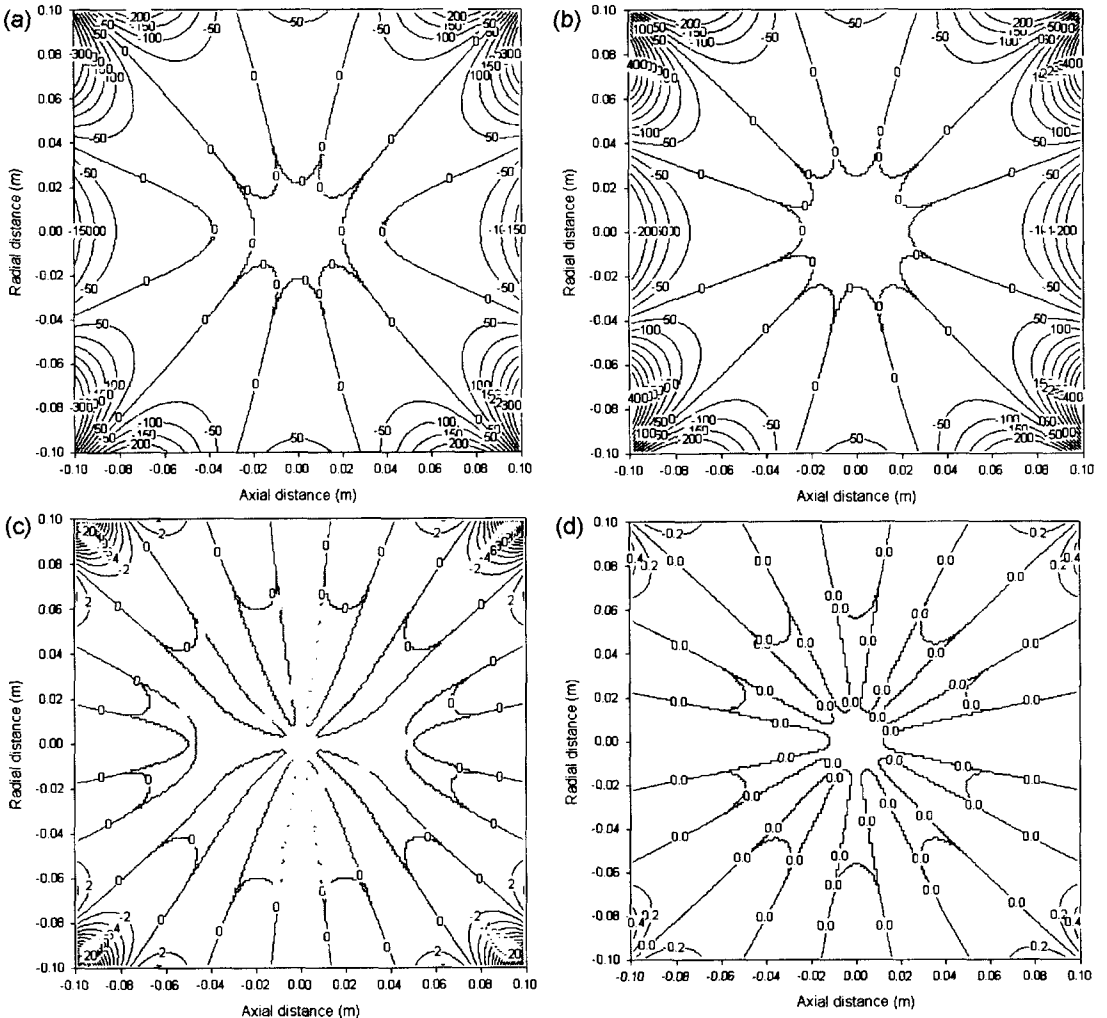


Fig. 6. Distribution of the working space uniformity near the solenoid center (a) 2-current, (b) 3-current, (c) 4-current, (d) 5-current method.

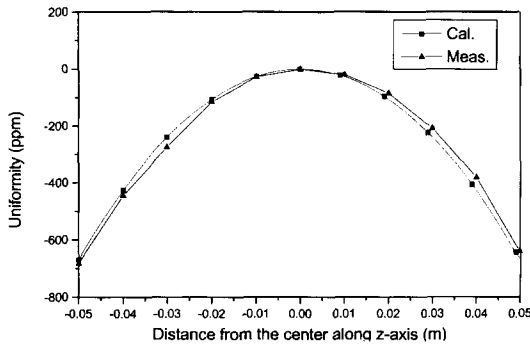


Fig. 7. Comparison between the measured and calculated magnetic fields in the solenoid.

됨을 알 수 있다. 1-current 방법이기에 때문에 자장 균일도 값이 솔레노이드 중심 ± 5 cm에서 7×10^{-4} 으로 아주 큰 값을 나타낸다. 그러나 5-current 일 경우 ± 5 cm에서 자장 균일도 값이 8×10^{-8} 으로 10000배 가량 향상될 것이다.

3.4 Biot-Savart 법칙과 Legendre 다항식의 반지름 변화에 의한 자장차이

반지름의 변화량이 1 mm 발생할 때 중심과 중심에서 4

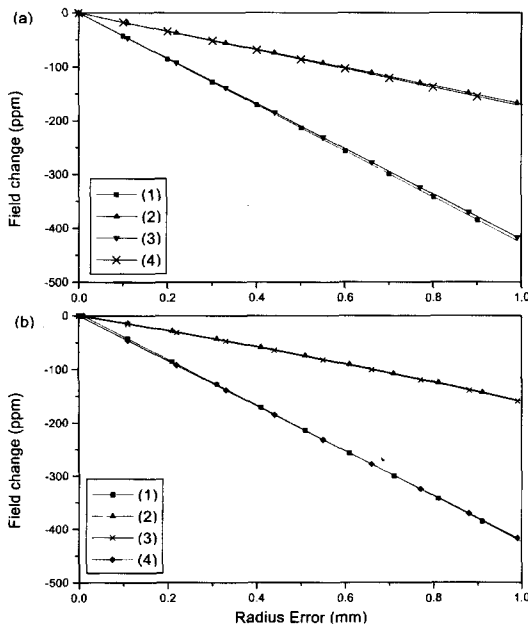


Fig. 8. The variation of magnetic field depending on radius difference for single and five-current at the center and 4 cm off-center (a) Biot-Savart equation, (b) Legendre polynomials: (1) 4 cm off-center with single current, (2) 4 cm off-center with 5-current, (3) center with single current, (4) center with 5-current.

cm 벗어난 지점에서 자장의 변화량을 계산했다. Legendre 다항식을 사용하여 두 번째 전개항부터 "0"으로 만드는 최적조건을 구하면, 그 조건은 솔레노이드 반지름 변화에 둔감한 자장변화를 만든다[10]. 반지름 변화에 대한 자장 변화량을 계산하였다.

Fig. 8의 (a)와 (b)에서 보듯이 Biot-Savart 방정식의 1-current인 경우 반지름 변화가 1 mm 있을 때 Field의 변화가 4×10^{-4} 정도 발생하는데, 5-current의 경우 1.5×10^{-4} 정도로 감소한다. 즉 5-current가 1-current에 비해 2.5배 정도 반지름 변화에 둔감함을 나타낸다. 이는 Legendre 다항식의 조건에서 반지름 변화에 무관한 해를 찾아 계산된 결과이기에 예상되었던 것이다.

IV. 결 론

Elliptical 함수와 Legendre 다항식, Biot-Savart 법칙을 이용해 보조전류를 1-current부터 4-current 방법까지 인가하여 자장균일도, 중심 부근의 자장분포도, 반지름 변화에 따른 자장 균일도의 차이를 구하고, 각 방정식의 특성을 비교분석 하였다.

중심 부근에서는 3가지 방정식이 비교적 일치하는 값을 보여주고 있으나, 중심에서 벗어 날 수록 Legendre 다항식에서 차이가 나타나는데, 이는 Legendre 다항식의 경우 보조전류의 대각선 길이에 따라 사용하는 식이 다르기 때문에 발생하는 오차이다. Legendre 다항식의 계산시에는 솔레노이드의 지름을 증가시키고 길이를 짧게하는 것이 Legendre 다항식의 계산에는 효과적이다.

각각의 보조전류 방법을 단전류 방법과 비교하면, 10^{-8} 의 자장 균일도 공간이 2-전류 방법은 14배, 3-전류 방법은 19배, 4-전류 방법은 70배, 5-전류 방법은 80배 정도 확대됨을 알 수 있다. 또한 5-전류 방법은 솔레노이드 중심에서 2 cm 이내의 공간에서 자장균일도를 비교했을 때 단일 전류방법을 사용한 솔레노이드의 길이가 0.16 km에 해당되는 효과와 같은 균일자장 공간을 얻을 수 있다. 넓은 공간에서 균일한 자장이 필요한 실험시 이 방법을 적용한다면 많은 도움이 될 것이다.

참 고 문 헌

- [1] M. E. Gadner, J. A. Jungerman, P. G. Lichtenstein and C. G. Patten, Rev. Sci. Instrum., **31**, 929(1960).
- [2] K. Weyand, Archive fur Electrotechnik, **69**, 287(1986).
- [3] H. Nakamura, Jpn. J. Phys., **18**, 1883(1979).

- [4] P. G. Park, C. G. Kim and C. S. Kim, Kor. Appl. Phys., **3**, 572(1990).
- [5] H. Sasaki, N. Kasai and H. Nakamura, Bul. Electrotech. Lab., **49**, 38(1985).
- [6] Chest Snow and R. L. Driscoll, J.NBS., **69C**, 49(1965).
- [7] C. G. Kim, P. G. park and C. S. Kim, Kor. Appl. Phys., **3**, 494(1990).
- [8] C. G. Kim, K. S. Ryu, B. C. Woo and C. S. Kim, Kor. Mag. Soc., **2**, 268(1992).
- [9] Yu. V. Afanasyev *et al.*, "Instruments for measurements of the magnetic field parameters" Energiya edition (1979) Russia.
- [10] 백종승 등저 "양성자 자기 회전 비율 측정", KRIS-95-087-IR, Chap.4, 108-114(1995).

Comparison of Uniformity of Calculated-magnetic Field in a Single-layer Solenoid with Multi-current by Using Elliptical Function and Legendre Polynomials

Jung Hyo Jung, Po Gyu Park and Yoon Bae Kim

Korea Research Institute of Standards and Science (KRIS), P.O.Box 3, Taejon 305-606, Korea

V. Ya. Shifrin, V. N. Khorev

D. I. Mendeleyev Institute for Metrology(VNIIM), 198005, St. Petersburg, Russia

(Received 9 August 1999, in final form 10 October 1999)

The magnetic field in single-layer solenoid with multi-current is calculated using Elliptical function, Legendre polynomials and Biot-Savart law. The optimization conditions to a highly uniform magnetic field in the center of solenoid has been studied. The variation of magnetic field depending on radius difference was examined. The uniformity of magnetic field is compared with that obtained each multi-current method. The five-current method increases the working space within 0.02 ppm uniformity by eighty times that using single current method. And this method improves the magnetic field uniformity which is equivalent to the effect of 160 m long solenoid by using single current.