

박막에서 쌍곡선형 열전도 방정식에 의한 열전도 해석

정우남 · 이용호* · 조창주

전남대 기계공학과, *여수공대 기계자동차계열

Analysis of Hyperbolic Heat Conduction in a Thin Film

Woo-Nam Juhng, Yong-Ho Lee* and Chang-Joo Cho

Department of Mechanical Engineering, Chonnam National University

Department of Mechanical and Automotive Engineering, Yosu Technical Coll.*

요 약

고전적인 Fourier 열전도 방정식은 극저온하에서 또는 아주 짧은 시간 동안의 가열시 타당성이 없는 것으로 고려되었다. 이러한 조건하에서는 열전도파의 성질이 지배적이기 때문에, 수정된 Fourier 법칙에 근거한 쌍곡선형 열전도 방정식이 도입되었다. 열전도에 대한 Fourier 모델과 쌍곡선형 열전도 모델이 적분변환법과 함께 Green 함수 방법을 이용하여 분석되었다. 한쪽 표면에서 주기적인 표면 가열을 하는 유한한 평판의 열유속 분포 및 온도 분포의 해를 제시하였고 각각의 모델로부터 얻어진 결과를 서로 비교 검토하였다. 쌍곡선형 열전도 방정식에서 유도된 열전도파는 매개물을 통해 전파되어 맞은편 쪽의 단열 표면에서 가열 표면쪽으로 반사하였으나, 고전적인 Fourier 모델에 의한 열은 열적 교란이 매개물의 전체에 걸쳐서 전달된 후 즉각적으로 무한한 속도로 열전도가 발생함을 보여주었다.

Abstract — The classical Fourier heat conduction equation is invalid at temperatures near absolute zero or at very early times in highly transient heat transfer processes. In such situations, a hyperbolic equation model for heat conduction based on the modified Fourier law is introduced because the wave nature of heat propagation becomes dominant. The Fourier model and the hyperbolic model for heat conduction are analyzed by using the Green's function technique together with the integral transform. Analytical expressions for the heat flux and temperature distributions in a finite slab subjected to a periodic surface heating at one of its surfaces are presented and the results obtained from each model are compared with each other. The thermal wave implied by the hyperbolic model is shown to travel through a medium and to reflect back toward the origin at the other insulated surface. On the other hand, the heat by the Fourier model propagates at an infinite speed instantaneously after a thermal disturbance is felt throughout the medium.

1. 서 론

Fourier 열전도 법칙은 현재까지의 열전도 학문에서 기반을 이루고 있다.

$$\bar{q}(\vec{r}, t) = -k \nabla T(\vec{r}, t) \quad (1)$$

이 식은 물체내의 열적인 교란이 물체 내에서 무한한 속도로 전파된다는 것을 의미한다. 실제로 열전파속도(thermal wave speed)는 상온에서 금속의 경우 $10^2 \sim 10^3$ m/s로 매우 크므로 무한하다고 가정하고 Fourier 열전도방정식(1)을 이용하여 해석할 수 있다. 그러나 아주 짧은

시간동안의 가열이나 극저온에서는 열전파속도가 무한하게 가정될 수 없기 때문에 고전적인 Fourier 열전도 방정식(1)을 사용할 수 없게 된다.

1940년 Tisza¹⁾는 액체 헬륨에서 유한한 열전파속도를 예측하는 논문을 발표하였다. 그 뒤 Peshkov²⁾에 의하여 극저온에서 열전도파(thermal wave)가 존재한다는 것이 실험적으로 증명 되었으며, 온도 1.4 K의 액체 헬륨의 열전파속도가 19 m/s로 측정되었다 또한 열전도파가 전달되는 현상이 음파(acoustic wave)의 전달현상과 비슷하기 때문에 이 열전도파를 '제2음파'(second sound)³⁾라고 하였다.

Morse와 Feshbach^[4]를 비롯한 여러 학자들은 다음과 같은 수정된 Fourier 열전도법칙을 제안하였다.

$$\bar{q}(\bar{r}, t) + \tau \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}(\bar{r}, t) = -k \nabla T(\bar{r}, t) \quad (2)$$

이때, τ 는 열이완 시간(thermal relaxation time)으로 표현되며, 물체 내에서 온도 기울기가 형성되었을 때 열전도가 시작되는데 걸리는 시간(build-up time)이다. 만일, $\tau \rightarrow 0$ 일 때 수정된 Fourier 열전도 방정식(2)는 무한한 열전도 속도를 갖는 Fourier 방정식(1)이 되므로 Fourier 열전도 방정식이 수정된 열전도 방정식의 근사식이라고 할 수 있다 Baumeister와 Hamill^[5]은 수정된 열전도 방정식(2)을 이용하여 계단함수로 온도에 대한 경계조건이 주어질 때 반무한 평판에서 온도분포를 구하였고. Maurer와 Thompson^[6]은 laser processing과 같은 10^7 w/cm^2 의 높은 열유속에 대하여 유한한 열전도속도를 고려한 열전도 방정식 즉, 쌍곡선형 열전도 방정식을 적용하여 열펄스 문제를 해석하고 평판의 표면온도가 Fourier의 열전도법칙에 의해 얻어진 온도보다 매우 높음을 예측하였다. Vick과 Özisik^[7]은 반무한 평판과 유한 평판에서 내부에 열원을 가질 때 수정된 열전도법칙을 적용하여 열전도파의 전파와 반사에 관하여 연구하였고. Kaminski^[8]는 실험을 통하여 불균일 물질분포를 갖는 물체내의 열전도파 속도와 열이완시간 τ 를 측정하였다. 최근 Marciak-Kozłowska^[10]는 femto second laser로 film을 가열하는 경우에 대하여 수정된 열전도방정식으로 온도분포를 계산하였다 수정된 열전도 방정식(2)의 적용은 laser의 개발과 더불어 나타나는 짧은 시간동안의 열전도 해석이나 느린 열전도와 속도를 갖는 극저온에서의 열전도 해석 또는 높은 열유속 기울기를 갖는 경우에 고려되어야 할 것이다.

본 논문에서는 기존의 펄스에 의한 표면 가열과 달리 표면에 주기적인 열유속을 갖는 유한한 평판(finite slab)에서 수정된 열전도법칙을 이용하여 온도와 열유속에 대한 이론해를 구하고 열전도파의 특성을 transient한 경우와 steady한 경우로 분리 해석하고 위상차를 고찰하고자 한다.

2. 이론 해석

수정된 열전도 방정식(2)와 에너지 보존법칙을 이용하여 열유속 \bar{q} 에 관한 쌍곡선형 열전도 방정식(hyperbolic heat conduction equation)을 구하면 다음과 같다.

$$\nabla^2 \bar{q}(\bar{r}, t) - \nabla g(\bar{r}, t) = \frac{1}{\alpha} \left(\tau \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial t^2}(\bar{r}, t) + \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}(\bar{r}, t) \right) \quad (3)$$

식(3)은 감쇠항을 갖는 파동 방정식(wave equation)의 형

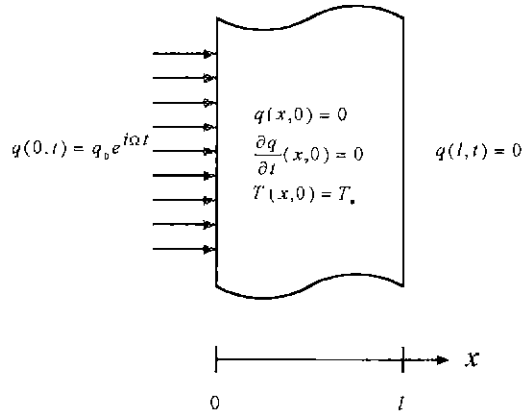


Fig. 1. A slab with a periodic surface heat flux.

태를 갖기 때문에 감쇠 파동 방정식(damped wave equation)라고 부른다. 여기서 열이완 시간은 $\tau = \alpha / C^2$ 로 바꾸어 쓸 수 있다. 이때, α 는 열확산계수이고, C 는 열전도속도이다. Fig. 1에서 주어진 것과 같이, 표면에 $\exp(i\Omega t)$ 의 주기적인 열유속을 갖는 1차원 평판에서 열원이 없는 경우의 지배방정식, 초기조건 및 경계조건은 다음과 같다.

• 지배방정식

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) \quad (4)$$

• 경계조건과 초기조건

$$q(0, t) = q_0 \exp(i\Omega t). \quad (5a)$$

$$q(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (5b)$$

$$q(x, 0) = 0, \quad (5c)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l \quad (5d)$$

식(4)과 식(5)를 무차원화하기 위한 무차원 변수를 도입하면 다음과 같다.

$$\eta = \frac{Cs}{2\alpha}, \quad \eta_l = \frac{Cl}{2\alpha}, \quad (6a)$$

$$\xi = \frac{C^2 t}{2\alpha}, \quad (6b)$$

$$\theta(\eta, \xi) = \frac{T(x, t) - T_0}{(q_0 \alpha / Ck)}, \quad (6c)$$

$$Q(\eta, \xi) = \frac{q(x, t)}{q_0}. \quad (6d)$$

여기서 T_0 는 평판의 초기온도를 나타낸다. 무차원화된 지

배방정식과 경계조건은

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2}(\eta, \xi) + 2\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\eta, \xi) - \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}(\eta, \xi) = 0 \quad (7)$$

$$Q(0, \xi) = \exp(i\omega_0 \xi), \quad (8a)$$

$$Q(\eta, \xi) = 0, \quad \xi > 0, \quad (8b)$$

$$Q(\eta, 0) = 0, \quad (8c)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\eta, 0) = 0, \quad 0 < \eta < \eta_1 \quad (8d)$$

이고, 이때 무차원화된 가열 주파수는 $\omega_0 = 2\alpha\Omega/C^2$ 이다. 미분방정식(7)의 해를 구하기 위하여 다음의 Green's function을 이용하였다.

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_0=0}^{\xi_0+\epsilon} \int_{\eta_0=0}^{\eta_1} G(\eta, \xi | \eta_0, \xi_0) L_0 Q | d\eta_0 d\xi_0 \\ &= \int_{\xi_0=0}^{\xi_0+\epsilon} \int_{\eta_0=0}^{\eta_1} Q L_0^* [G(\eta, \xi | \eta_0, \xi_0)] d\eta_0 d\xi_0 \\ &+ \int_{\xi_0=0}^{\xi_0+\epsilon} \left[G \frac{\partial Q}{\partial \eta_0} - Q \frac{\partial G}{\partial \eta_0} \right]_{\eta_0=0}^{\eta_1} d\xi_0 \\ &+ \int_{\eta_0=0}^{\eta_1} \left[-G \frac{\partial Q}{\partial \xi_0} + Q \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_0} - 2G \right) \right]_{\xi_0=0}^{\xi_0+\epsilon} d\eta_0 \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)에서 선형연산자 L_0 는

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial}{\partial \xi} \quad (10)$$

이며, adjoint operator L_0^* 는

$$L_0^* = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial}{\partial \xi} \quad (11)$$

이다. 식(9)를 만족하는 Green's function $G(\eta, \xi | \eta_0, \xi_0)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & G(\eta, \xi | \eta_0, \xi_0) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_m(\lambda_m, \eta) \Psi_m(\lambda_m, \eta_0) e^{(\xi_0 - \xi)}}{2\sqrt{\lambda_m^2 - 1} N(\lambda_m, i)} \\ & \times \left(e^{\sqrt{\lambda_m^2 - 1}(\xi_0 - \xi)\eta} - e^{\sqrt{\lambda_m^2 - 1}(\xi_0 - \xi)\eta_0} \right), \quad \xi > \xi_0. \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, 고유 함수(eigen function)와 고유값(eigenvalue)은 각각

$$\Psi(\lambda_m, \eta) = \sin \lambda_m \eta \quad (13a)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{\eta_1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (13b)$$

이며, 정규화 적분(normalization integral)은 $N(\lambda_m) = \frac{2}{\eta_1}$ 이다

식(12)와 식(13)을 식(9)에 대입하여 열유속 $Q(\eta, \xi)$ 를 구하고 Kummer 변환을 적용하면 다음과 같다.

$$Q(\eta, \xi) = Q_{\text{steady}} + Q_{\text{transient}} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{steady}} &= \left(1 - \frac{\eta}{\eta_1} \right) \cos \omega_0 \xi - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin \lambda_m \eta}{\eta_1} \\ & \times \left\{ \frac{\cos \omega_0 \xi}{\lambda_m} \frac{\lambda_m [(\lambda_m^2 - \omega_0^2) \cos \omega_0 \xi + 2\omega_0 \sin \omega_0 \xi]}{[(\lambda_m^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2]} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{transient}} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \lambda_m e^{-\xi} \sin \lambda_m \eta}{\eta_1 [(\lambda_m^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2]} \\ & \times \left\{ \frac{(\lambda_m^2 + \omega_0^2) \sin \sqrt{\lambda_m^2 - 1} \xi}{\sqrt{\lambda_m^2 - 1}} + (\lambda_m^2 - \omega_0^2) \cos \sqrt{\lambda_m^2 - 1} \xi \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Q_{steady} 에서 ω_0 에 대한 진폭은 다음과 같이 주어진다.

$$|A_m| = \frac{2 \lambda_m}{\eta_1 [(\lambda_m^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2]^{1/2}} \quad (17)$$

온도 분포에 대한 해는 $\theta(\eta, \xi) = \theta(\eta, 0) - \int_0^{\xi} \frac{\partial Q}{\partial \eta}(\eta, \xi_0) d\xi_0$ 로 주어지며 이로부터 온도 $\theta(\eta, \xi)$ 를 구하면 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} \theta(\eta, \xi) &= \frac{\sin \omega_0 \xi}{\eta_1 \omega_0} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \lambda_m \cos \lambda_m \eta}{\eta_1 [(\lambda_m^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2]} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 e^{-\xi} \lambda_m^2 \cos \lambda_m \eta}{\eta_1 [(\lambda_m^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2]} \\ & \times \left\{ \frac{(\lambda_m^2 - \omega_0^2 - 2) \sin \sqrt{\lambda_m^2 - 1} \xi}{\sqrt{\lambda_m^2 - 1}} - 2 \cos \sqrt{\lambda_m^2 - 1} \xi + 2 e^{\xi} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

같은 방법으로 얻어진 고전적인 Fourier 열전도 방정식에 대한 열유속과 온도 분포의 해는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q(\eta, \xi) &= \left(1 - \frac{\eta}{\eta_1} \right) \cos \omega_0 \xi \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin \lambda_m \eta}{\lambda_m \eta_1 (\lambda_m^4 + 4\omega_0^2)} \\ & \times \left\{ 4\omega_0^2 \cos \omega_0 \xi - 2\omega_0 \lambda_m^2 \sin \omega_0 \xi + \lambda_m^4 e^{-\lambda_m^2 \xi/2} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\theta(\eta, \xi) = \frac{\sin \omega_0 \xi}{\eta_1 \omega_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \lambda_m \cos \lambda_m \eta}{\eta_1 (\lambda_m^4 + 4 \omega_0^2)} \times \left\{ \frac{2 \omega_0}{\lambda_m} \sin \omega_0 \xi + \lambda_m \cos \omega_0 \xi - \lambda_m e^{-\lambda_m^2 \xi / 2} \right\} \quad (20)$$

3. 결과 및 고찰

1차원 평판 내에서 한쪽 표면($\eta=0$)은 $\exp(i\omega_0\xi)$ 의 열유속으로 가열되고 맞은편 표면($\eta=\eta_1$)에서는 단열된 상태에서 쌍곡선형 열전도 방정식과 Fourier 열전도 방정식에 의하여 구하여진 열유속의 분포가 Fig. 2과 Fig. 3에 각각 나타나 있다.

Fig. 2에서 $\xi < \eta_1$ 경우에 열전도파 선단은 $\eta = \xi$ 에 존재하며 $\eta > \xi$ 에서는 아직 열전도파가 도달하지 않고 있음을 보이고 있다. 이때 열전도파 선단의 크기는 확산에 의한 에너지 소산 때문에 열전도파의 진행에 따라 감소하고 있다. $\xi > \eta_1$ 인 경우에는 열전도파는 단열면($\eta = \eta_1$)에서 반사되어 부호가 바뀌어 되돌아 오며 단열벽을 향하여 진행하는 열전도파와 합성된다. Fig. 3에 나타난 Fourier 열

전도 방정식에 의한 열유속은 $\eta < \eta_1$ 경우에 있어서도 맞은편의 표면($\eta = \eta_1$)까지 분포되는데 이것은 열이 무한한 속도로 전파되는 것을 나타내고 있다.

Fig. 4과 Fig. 5는 식(18)과 식(20)에 의한 온도 분포를 보여주고 있다. Fig. 4에서는 열유속 분포와 마찬가지로 $\xi < \eta_1$ 경우에는 초기온도로 유지되어 있는 영역이 존재한다. 단열 표면에서의 온도 변화의 진폭이 열유속

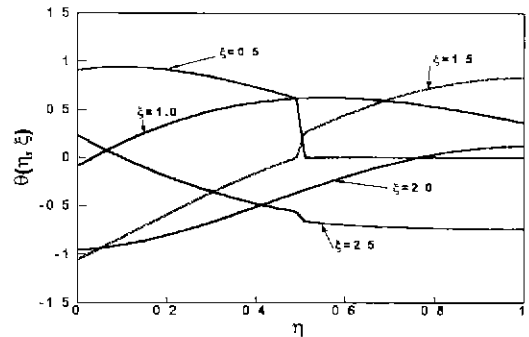


Fig. 4. Temperature distributions for hyperbolic heat conduction at various times ξ in a slab.

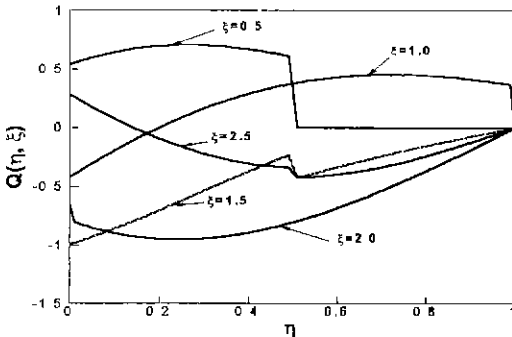


Fig. 2. Heat flux distributions for hyperbolic heat conduction at various times ξ in a slab.

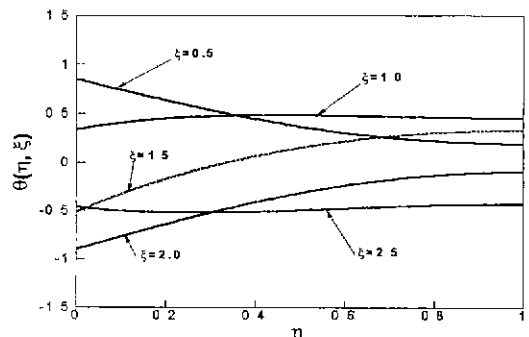


Fig. 5. Temperature distributions for Fourier's heat conduction at various times ξ in a slab.

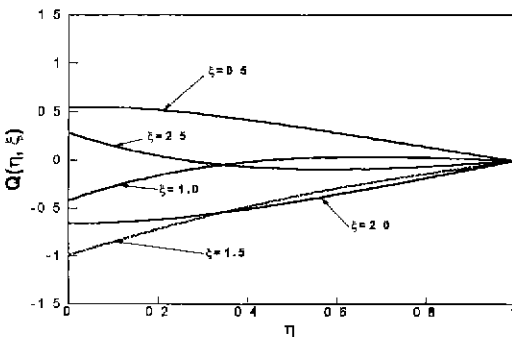


Fig. 3. Heat flux distributions for Fourier's heat conduction at various times ξ in a slab.

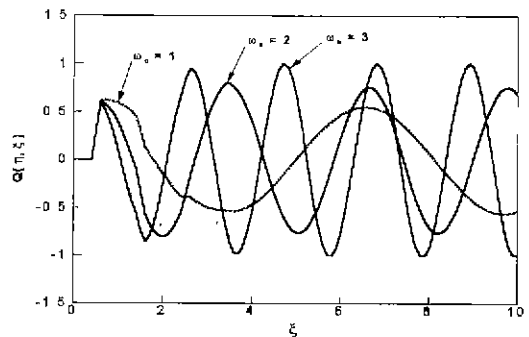


Fig. 6. Heat flux distributions for hyperbolic heat conduction ($\eta=0.5$).

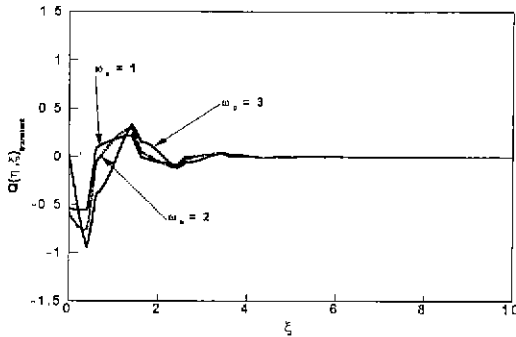


Fig. 7. Transient heat flux distributions for hyperbolic heat conduction ($\eta=0.5$).

의 반사와 증첩때문에 Fig. 4의 경우가 Fig. 5의 경우보다 크게 나타난다.

Fig. 6은 식(14)로부터 $\eta=0.5$ 일 때 $\omega_0=1, 2, 3$ 인 경우에 대하여 ξ 에 따른 열유속 분포를 나타낸다. $\xi=0.5$ 까지는 아직 열전도파가 도달하지 않음을 볼 수 있으며, ω_0 가 작아짐에 따라 시간의 변화에 따른 열유속 분포의 변화가 둔화됨과 동시에 열유속의 최대값과 최소값이 감소한다. 열유속 $Q(\eta, \xi)$ 는 식(15)와 같은 정상상태의 항과 식(16)과 같은 $e^{-\xi}$ 를 포함하는 감쇠항으로 나누어 나타낼 수 있다. Fig 7은 식(16)으로 나타난 감쇠 열전도파를 $\eta=0.5$ 의 위치에서 $\omega_0=1, 2, 3$ 인 각각의 경우를 시간(ξ)에 대하여 나타낸 그림이다. ξ 가 커짐에 따라 이 감쇠항은 0에 수렴한다. 식(15)로 표현되는 정상 열전도파의 전파는 그림 Fig. 8에 나타나 있으며, ξ 가 증가함에 따라 Fig. 6의 열전도파와 일치하게 되므로 열전도파의 공진현상은 식(15)의 정상 열전도파의 전파에 대해서만 고려하여도 타당하다. 식(15)의 진폭 IA_m 은 식(17)에 의하여 표현된다. 열유속의 진폭은 공진을 일으키게하는 모달 주파수와 표면에 가해진 주기적인 열유속에 의한 가진 주파수의 관계를 설명한다. 각각의 모달 주파수 λ_m

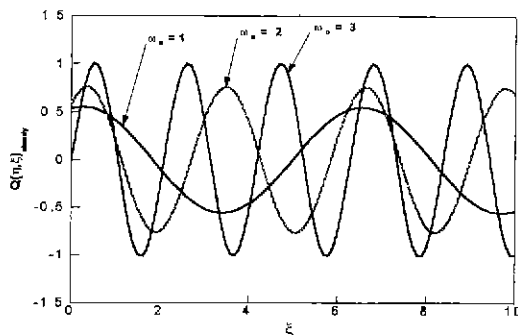


Fig. 8. Steady flux distributions for hyperbolic heat conduction ($\eta=0.5$).

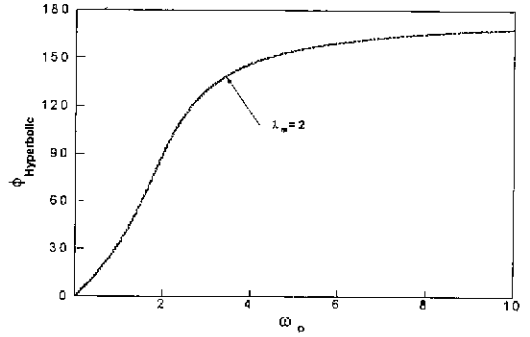


Fig. 9. Phase for hyperbolic heat conduction ($\lambda_m=2$).

에 대하여 가진주파수 ω_0 가 λ_m 에 접근함에 따라 진폭은 최대값을 가지게 되며 최대진폭은 λ_m 이 커짐에 따라 일정한 값에 접근한다.

Fig. 9는 $\lambda_m=2$ 일때 가진주파수의 변화에 따른 위상차를 나타낸 그림이다. 가진주파수가 2일 때 90도의 위상차를 보이며 증가함에 따라 180도의 위상차에 수렴함을 나타내며 Juhng^[11] 등의 결과와 일치하고 있다.

4. 결 론

피동 형태의 유한한 열전파 속도를 갖는 경우에 대하여 유한한 열적 이완 시간(thermal relaxation time)을 고려하여 수정된 Fourier의 열전도 법칙과 에너지 보존 법칙으로부터 유도된 쌍곡선형 열전도 방정식을 사용하였다. 한 표면에서 주기적인 가열을 받고 다른 표면은 단열된 평판 내에서 열전도에 관하여 열유속의 분포와 온도분포를 이론적으로 해석하고 열전도파(thermal wave)의 관점에서 고찰하였으며 Fourier 열전도방정식에서 구한 결과와 비교 하였다.

(1) 열유속에 있어서 열적이완시간을 고려한 쌍곡선형 열전도 방정식의 경우에 $\xi < \eta$ 범위에서는 열전도파가 선단에 존재하지만, $\eta > \xi$ 인 영역에서 열유속분포가 평판 내에 나타나지 않는 현상이 생기며 열전도파가 진행하는 형태를 갖는다. 그러나 Fourier 열전도 방정식에 의하여 구한 열유속은 가열시간에 관계없이 평판내의 전 영역에 분포한다.

(2) 쌍곡선형 열전도에서 시간에 따른 열유속의 분포는 열전도파인 파동의 특성을 갖는다. 단열 벽면($\eta=\eta$)에서 열전도파는 반사되어 부호가 바뀌어 되돌아 오며 이 반사파는 단열벽을 향하여 진행하여 오는 열전도파와 합성된다.

(3) 기존의 Fourier 방정식(classical Fourier equation)에 의한 diffusion equation의 열전도 현상은 열전도파속도(thermal wave speed)가 무한하다는 가정하에서 사용

되지만, 아주 짧은 시간 동안의 가열이나 극저온에서 열전도도가 무한하다고 가정할수 없기 때문에 열유속과 온도분포는 열적 이완시간을 고려한 수정된 Fourier 법칙(modified Fourier law)을 이용한 쌍곡선형 열전도 방정식(hyperbolic heat conduction equation)이 고려되어야 한다.

(4) 평판의 기하학적인 변수에 의하여 나타나는 모달 주파수에 대하여 주기적인 가열원의 주파수는 공진하는 현상이 발생하며 이에 따른 열유속에 대한 위상차는

$$\phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{2\omega_0}{\lambda_m^2 - \omega_0^2} \right\} \text{이다.}$$

참고문헌

1. Tisza, L.: "Sur la supraconductibilit thermique de l'helium II liquide et la statistique de Bose-Einstein", C. R. Acad. Sci. 207, 1035 (1938).
2. Peshkov, V.: "Second Sound in Helium II". J. Physics USSR, 8(6), 381 (1944).
3. Chester, M.: "Second Sound in Solids". Physical Review. 131(5), 2013-2015 (1963).
4. Morse, P.M. and Feshbach, H.: "Method of Theoretical Physics I", McGraw-Hill, 865 (1953).
5. Baumeister, K J and Hamill. T.D.: "Hyperbolic Heat Conduction Equation: A Solution for the Semi-Infinite Body Problem", ASME J. Heat Transfer. 91, 543-548 (1969).
6. Maurer, M.J. and Thompson, H.A.: "Non-Fourier Effect at High Heat Flux", ASME J. Heat Transfer. 95 284-286 (1973).
7. Vick, B. and Zisk, M.N.. "Growth and Decay of a Thermal Pulse Predicted by the Hyperbolic Heat Conduction Equation", ASME J. Heat Transfer, 105, 902-907 (1983).
8. Vick, B. and Özisik, M N. "Propagation and Reflection of Thermal Waves in a Finite Medium", Int. J. Heat and Mass Transfer, 27, 1845-1854 (1984).
9. Kaminski. W.: "Hyperbolic Heat Conduction Equation for Materials with a Nonhomogeneous Inner Structure", ASME J Heat Transfer, 112, 555-560 (1990)
10. Marciak-Kozłowska, J.. "Wave Characteristic of Femtosecond Heat Conduction in Thin Films", Int. J. Thermophysics, 14(3), 593-598 (1993).
11. Juhng, W.N., Lee, Y.H. and Choi, B Y: "Thermal wave characteristics in a finite medium", Proceedings of 11th IHTC, 7, 21-26 (1998).