

축력을 받고 두 파라메타 탄성기초 위에 놓인 티모센코 보의 좌굴 안정성

Buckling Stability of Timoshenko Beams on Two-Parameter Elastic Foundations under an Axial Force

정승호*, 류봉조**, 이규섭***, 최봉문****

Seung Ho Jung, Bong Jo Ryu, Gyu Seop Lee and Bong Mun Choi

Abstract

The paper presents a stability analysis of uniform Timoshenko beams resting on two-parameter elastic foundations. The two-parameter elastic foundations were considered as a shearing layer and Winkler springs in soil models. Governing equations of motion were derived using the Hamilton's principle and finite element analysis was performed and the eigenvalues were obtained for the stability analysis. The numerical results for the buckling stability of beams under axial forces are demonstrated and compared with the exact or available confirmed solutions. Finally, several examples were given for Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with various boundary conditions.

Key Words : Two-Parameter Elastic Foundation(두 파라메타 탄성기초), Timoshenko Beam(티모센코 보), Axial Force(축력), Buckling(좌굴), Stability(안정성)

* 한국 원자력연구소

** 대전산업대학교 기계설계공학과

*** 국방과학연구소

**** 대전산업대학교 기계설계공학과 대학원

1. 서론

탄성기초(elastic foundation) 위에 놓인 보 구조물의 동적해석에 관한 연구는 실제적 또는 이론적 관점 모두에서 볼 때 기계공학, 토목공학, 구조역학 등에서 많은 연구자들의 관심의 대상이 된다. 이전의 대부분의 연구들[1-3]에서는 지반(subsoil)에 대한 가정은 소위 Winkler 모델이라고 하는 단지 축방향으로 하중을 받는 선형 탄성 스프링계로 간주되었다.

공학적 관점에서 볼 때 하나의 지반모델(soil model)은 선형 스프링들의 독립적인 연속층(continuous layer)으로 간주될 수 있기 때문에, 선형 Winkler 모델만으로도 가정은 정적 및 동적문제들에 대한 닫힌형태(closed form)의 간단한 해를 얻을 수 있다는 장점을 제외하면 실제모델에 근접된 충분한 정확도를 갖지는 못하는 것으로 알려져 왔다. 따라서 이러한 Winkler 모델보다 좀 더 정확도를 갖는 두 파라메타 탄성 기초층(전단층과 Winkler기초층), 소위 Pasternak기초에 근거한 진동과 안정성에 관한 연구들이 이루어져 왔다.

Eisenberger와 Clastornik[4]는 다양한 형태의 두 파라메타 탄성기초위에 놓인 보의 진동과 좌굴에 관한 연구를 하였고, Franciosi와 Masi[5]는 행렬변위방법(matrix displacement approach)을 적용한 유한요소법을 사용하여, 두 파라메타 탄성지반 모델 위에 놓인 보의 자유진동에 대한 연구를 하였다.

위의 대부분의 연구들은 Winkler 기초모델 또는 두 파라메타 Pasternak기초에 대해 보의 전단변형과 회전관성을 무시한 비교적 세장비(slenderness ratio)가 큰 Euler-Bernoulli 보 모델에 대한 진동 및 안정성 연구들이었으나 보의 회전관성과 전단변형의 효과를 고려한 Timoshenko보 모델에 대한 연구들도 이루어져 왔다.[6-8] 그 후, Capron과 Williams[9]는 탄성매체에 묻혀있고 축방향으로 하중받는 균일 Timoshenko 보에 대한 엄밀한 동적강성(exact dynamic stiffness)을 구하였고 Cheng과 Pantelides[10]는 동적강성방법을 이용하여 탄성매체 위에 놓인 Timoshenko 보에 대한 진동해석을

하였다. 그 후, Yokoyama[11-12]는 2편의 논문을 통해 축방향 하중을 받고 균일 분포스프링과 전단층으로 구성된 탄성기초를 갖는 Timoshenko보의 고유진동수와 모우드 형상을 유한요소법을 사용하여 구하였다. 그는 이 연구에서 경계조건이 각각 양단힌지인 경우와 한단힌지-타단고정인 보의 가장 작은 처음 3개의 고유진동수(lowest three natural frequencies)를 구하고 이를 엄밀해 등과 비교하였다. 그러나, 그는 자유진동 문제에만 국한된 연구를 하였고 축력으로 인한 계의 좌굴문제는 다루지 않았다.

따라서 본 연구에서는 두 파라메타(전단층과 Winkler 기초층) 탄성기초위에 놓인 회전관성과 전단변형을 고려한 Timoshenko보의 좌굴 안정성 해석을 수행하였다. 즉, 탄성기초상수(elastic foundation parameter)의 변화에 대한 임계축력의 변화를 다양한 경계조건에 따라 유한요소법을 사용하여 고찰하였다.

2. 이론해석

2.1 수학적 모델 및 지배방정식

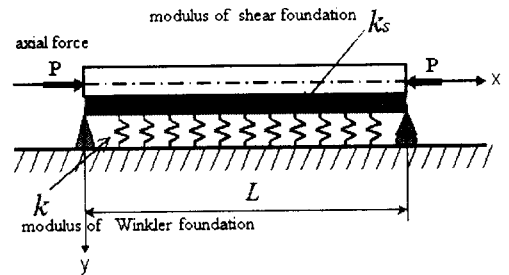


Fig.1 Timoshenko beam supported on two-parameter elastic foundation.

두 파라메타 탄성기초(elastic foundation)를 갖고 축방향 힘 P 를 받는 양단힌지된 Timoshenko보의 모델은 Fig.1과 같다.

Fig.1에서 2개의 탄성기초층은 각각 Winkler기초탄성계수(modulus of Winkler foundation) k 와 전단기초 탄성계수(modulus of shear foundation)

k_s 를 갖는 층으로 이상화될 수 있다.

Fig.1 모델에 대한 지배방정식을 에너지 표현식을 써서 나타내면 다음과 같다.

먼저 탄성변형률에너지(elastic strain energy)

U 는

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (\phi_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \lambda AG (w_x - \phi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L kw^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_s (w_x)^2 dx \quad (1)$$

이고, 여기서 E 는 영률(Young's modulus), A 는 보의 횡단면적, I 는 단면의 2차모멘트, G 는 전단탄성계수(shear modulus), λ 는 전단계수(shear coefficient), w 와 ϕ 는 각각 보의 횡방향 변위와 굽힘기울기를 나타내며, 하첨자 x 는 위치에 대한 미분을 나타낸다.

보의 운동에너지는

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (w_t)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I (\phi_t)^2 dx \quad (2)$$

이고, 여기서 ρ 는 보의 밀도, 하첨자 t 는 시간에 대한 미분을 나타낸다. 또한, 일정한 압축력 P 에 의해 하여진 일 W 는 다음과 같다.

$$W = \frac{1}{2} P \int_0^L (w_x)^2 dx \quad (3)$$

2.2 유한요소법의 적용

식(1)-(3)에서 나타난 에너지표현식을 근거로 유한요소법을 적용시키기 위해 보를 유한길이 l 인 요소로 분할할 때, 한 요소는 각각 2개의 절점(node)과 각 절점당 4자유도(보의 변위 w , 보의 중심선의 기울기 w_x , 굽힘기울기 ϕ , 굽힘기울기 변화율 ϕ_x)를 갖는 것으로 가정된다.

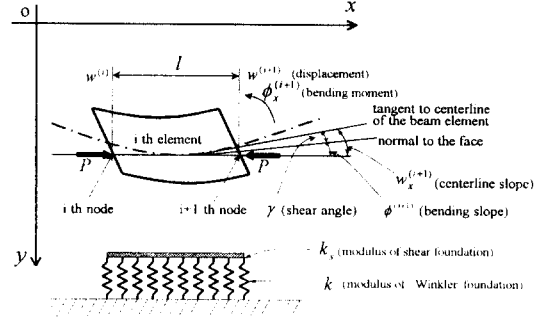


Fig.2 A finite i th element under an axial force, resting on two-parameter elastic foundation.

계산상의 편의를 위해 무차원화된 축 방향좌표 $\xi = \frac{x}{l}$ 와 $\eta = \frac{w}{l}$ 을 도입하고, Fig.2에서 나타내지는 무차원 field 변수를 이용하여 보 요소의 임의의 i 번째 요소에 대해 변위함수와 굽힘기울기 함수를 다음과 같이 가정한다.

$$\eta(\xi)^i = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \quad (4)$$

$$\phi(\xi)^i = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 \quad (5)$$

식(4)-(5)에서 $a_i, b_i (i=0, \dots, 3)$ 를 유한 요소들간의 적합성(compatibility)을 만족시키도록 계수를 구하여 $\eta(\xi)^i$ 와 $\phi(\xi)^i$ 를 다시쓰면 다음과 같다.

$$\eta(\xi)^i = \{N_w\}^T \{H\}^i, \quad \phi(\xi)^i = \{N_w\}^T \{\Phi\}^i \quad (6)$$

여기서 상첨자 T 는 transpose를 의미하고, $\{H\}^i$ 와 $\{\Phi\}^i$ 는 일반화된 요소절점벡터(element nodal vector), $\{N_w\}$ 는 형상함수벡터(shape function vector)를 나타내며 다음과 같다.

$$\{N_w\}^T = \{1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad \xi - 2\xi^2 + \xi^3, \quad 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad -\xi^2 + \xi^3\} \quad (7)$$

$$\{H\}^i = \{\eta_i \quad \eta_i' \quad \eta_{i+1} \quad \eta_{i+1}'\} \quad (8)$$

$$\{\Phi\}^i = \{\phi_i \quad \phi_i' \quad \phi_{i+1} \quad \phi_{i+1}'\} \quad (9)$$

식(6)을 식 (1), (2), (3)에 적용하여 운동에너지와 포텐셜에너지를 이용하여 전체 보에 대해 해밀톤(Hamilton)원리

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0 \quad (10)$$

를 적용하면, 보요소에 대한 운동방정식을 구할 수 있고, 요소의 질량행렬과 강성행렬을 구할 수 있는데, 여기에서 구한 질량행렬과 강성행렬을 보 전체 길이에 대해 조합하여, 정리하면 다음과 같은 행렬 형태의 고유치를 구할 수 있는 특성방정식을 얻게 된다.

$$[[K] - \Omega^2[M]] \{q\} = \{0\} \quad (11)$$

여기서 $[K]$ 와 $[M]$ 은 각각 조합강성행렬(global stiffness matrix)과 조합질량행렬(global mass matrix)을 나타내고 $\{q\}$ 는 모달벡터(modal vector), Ω 는 무차원화된 진동수 파라메타(dimensionless frequency parameter)를 나타낸다.

한편, 본 연구의 수치 해를 얻기위해 사용된 무차원 파라메타들은 다음과 같다.[12]

$$\Omega^2 = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI}, S = \frac{\lambda AGL^2}{EI}, R = \frac{I}{AL^2}, K_s = \frac{k_s L^2}{EI}, K_w = \frac{k_w L^4}{EI}, Q = \frac{PL^2}{EI} \quad (12)$$

여기서, S 는 보의 전단변형파라메타(shear deformation parameter), R 은 보의 회전관성파라메타(rotary inertia parameter), Q 는 축력파라메타(axial force parameter), K_s 와 K_w 는 각각 전단기초 파라메타(shear foundation parameter)와 Winkler 기초 파라메타(Winkler foundation

parameter)를 나타낸다.

2.3 안정성해석

일반적으로 감쇠(damping)를 포함한 계의 고유치를 σ 라 하면

$$\sigma = \alpha \pm \beta i \quad (13)$$

로 나타내지며, 이때 실수부 α 는 진폭의 크기를 나타내므로 $\alpha \leq 0$ 이면 계는 진폭이 줄어들어 수렴하게 되므로 안정한 것으로 간주된다. 그러나, $\alpha > 0$ 일 때에는 진폭이 시간이 지남에 따라 증가하므로 불안정하게 된다. 허수부 β 는 고유진동수를 나타내게 되며, $\beta=0$ 이면 정적인 상태를 나타내므로, 좌굴형태의 불안정, $\beta \neq 0$ 이면 진동특성을 나타내므로 플러터 형태의 불안정이 된다.

본 연구에서는 감쇠가 없는 경우의 문제로써 고유치가 $\alpha=0$ 인 경우로서 이때 $\beta=0$ 이면 좌굴 형태의 불안정이 발생하게 된다.

3. 수치해석 결과 및 검토

본 연구의 수치해는 보 길이를 20개의 유한요소로 나누어 얻은 결과이며, 수치해의 타당성을 검토하기 위해 몇몇 경계조건이 다른 연구들([8], [10], [12-14])에서의 결과들과 비교하여 아주 근사한 결과를 나타내었다. 특히 자유진동 문제에 있어서의 무차원 파라메타들의 수치 입력값은 Yokoyama 연구[12]의 입력데이터 값을 적용하였다. 본 연구의 무차원 파라메타 값들 중, 이론적으로 보의 전단변형 파라메타 S 값이 ∞ 로, 회전관성 파라메타 R 값이 영으로 접근할수록 Euler-Bernoulli 보로 간주될 수 있으므로, 본 연구의 Euler-Bernoulli 보의 경우, $S=10^6$, $R=0.0$ 으로 입력 데이터 값을 설정하였다. Timoshenko 보의 경우 보의 전단계수 $\lambda=2/3$, 포와송비 $\nu=0.25$, $R=0.01$, $S=26.6667$ 로 입력되었다.

Table 1은 Euler-Bernoulli 보와 Timoshenko 보

의 각각에 대해, 두가지 경계조건(양단힌지, 한단힌지-타단고정)과 무차원파라메타들 K_w , K_s , Q 의 고정된 값에서 1차 모우드(first mode)부터 3차 모우드 까지의 고유진동수 값을 본 연구의 결과들과 다른 참고문헌 결과들을 비교한 것이다. Table 1에서 알 수 있듯이 엄밀해(exact solution)와의 비교에서는 모두 0.2% 이내의 오차를 나타내었고, 엄밀해가 없는 경우는 참고문헌[12]의 16요소일때의 값과 0.93% 오차내에서 근사한 일치를 보였다.

Fig.3부터 Fig.6까지는 4가지 경계조건에 대한 단기초가 없고 Winkler 기초만이 있는 경우, 무차원화된 Winkler 기초파라메타 K_w 값의 증가에 따라 좌굴하중 Q_{cr} 값의 변화를 나타낸 그림들이다. 축력만이 존재하는 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko 보의 각각에 대해 양단힌지의 경우는 $Q_{cr}/\pi^2=1.000, 0.730$, 한단고정-타단자유인 경우는 $Q_{cr}/\pi^2=0.25, 0.42$, 한단힌지-타단고정의 경우는 $Q_{cr}/\pi^2=2.046, 1.118$, 양단고정의 경우는 $Q_{cr}/\pi^2=4.000, 1.613$ 으로서 Euler-Bernoulli 보의 경우는 이미 많은 문헌에서 널리 잘 알려진 값들이다.

4가지 경계조건 모두에 있어서, 무차원화된 Winkler 기초 파라메타 값 K_w/π^4 이 증가됨에 따라 좌굴하중 Q_{cr}/π^2 값이 Euler-Bernoulli 보와 Timoshenko 보 공히 증가됨을 알 수 있고, 동일 K_w/π^4 값에 대해 좌굴하중은 양단고정 경계조건이 가장크고, 한단힌지-한단고정, 양단힌지, 한단고정-타단자유인 순이된다. 또한 Timoshenko 보의 좌굴하중 값은 Euler-Bernoulli 보의 좌굴하중 값보다 항상 작다.

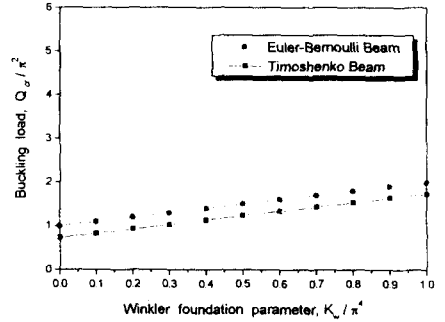


Fig.3 Buckling load depending on Winkler foundation parameter for hinged-hinged boundary condition.

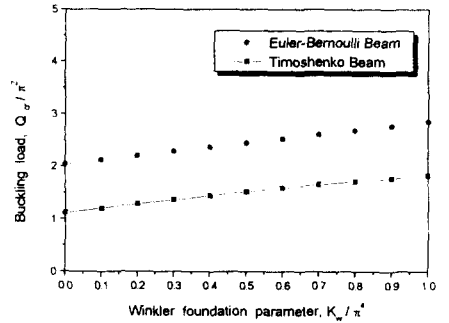


Fig.4 Buckling load depending on Winkler foundation parameter for hinged-clamped boundary condition.

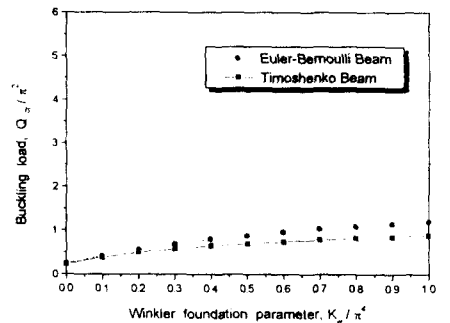


Fig.5 Buckling load depending on Winkler foundation parameter for clamped-free boundary condition.

Table 1. Comparison present results with ones in other references for nondimensional lowest three natural frequencies Ω .

Boundary Condition Beam Types Parameters		Both Hinged				Hinged - Clamped			
		† Exact	Ref. (12)	Present	† Error (%)	† Exact	Ref. (12)	Present	† Error (%)
Euler-Bernoulli Beam	$K_w/\pi^4=0.0$	9.87	9.87	9.86956	0.004	15.42	15.42	15.4180	0.01
	$K_s/\pi^2=0.0$	39.48	39.49	39.4779	0.005	49.96	49.99	49.9636	-0.007
	$Q/\pi^2=0.0$	88.83	88.94	88.8256	0.005	104.25	104.43	104.246	0.004
	$K_w/\pi^4=0.0$	6.24	6.24	6.24201	-0.03	13.01	13.01	13.0064	0.028
	$K_s/\pi^2=0.0$	36.40	36.41	36.3967	0.009	47.35	47.38	47.3526	-0.005
	$Q/\pi^2=0.6$	85.81	85.93	85.8137	-0.004	101.54	101.73	101.540	0.0
	$K_w/\pi^4=0.6$	9.87	9.87	9.86956	0.004	—	15.09	15.0868	0.02
	$K_s/\pi^2=0.0$	37.19	37.20	37.1910	-0.003	—	47.99	47.9658	0.05
	$Q/\pi^2=0.6$	86.15	86.27	86.1535	-0.004	—	102.02	101.827	0.18
	$K_w/\pi^4=0.6$	—	13.96	13.9577	0.016	—	18.48	18.4786	0.008
	$K_s/\pi^2=1.0$	—	72.11	42.1047	0.013	—	52.21	52.1930	0.03
	$Q/\pi^2=0.6$	—	91.21	91.0995	0.121	—	106.47	106.287	0.17
Timoshenko Beam	$K_w/\pi^4=0.0$	8.21	8.22	8.21469	-0.06	10.63	10.63	10.6266	0.03
	$K_s/\pi^2=0.0$	24.23	24.31	24.2281	0.008	25.62	25.71	25.6160	0.015
	$Q/\pi^2=0.0$	41.54	41.96	41.5417	-0.004	42.03	42.46	42.0314	-0.003
	$K_w/\pi^4=0.0$	3.47	3.47	3.46648	0.10	7.32	7.33	7.32426	-0.058
	$K_s/\pi^2=0.0$	19.22	19.31	19.2209	-0.005	20.93	21.03	20.9312	-0.006
	$Q/\pi^2=0.6$	35.08	35.48	35.0793	0.002	35.70	36.16	35.7459	-0.129
	$K_w/\pi^4=0.6$	8.21	8.22	8.21469	-0.057	10.46	10.49	10.4806	-0.197
	$K_s/\pi^2=0.0$	20.59	20.67	20.5896	0.002	22.20	22.30	22.2068	-0.03
	$Q/\pi^2=0.6$	35.86	36.25	35.8568	0.009	36.50	36.90	36.5041	-0.011
	$K_w/\pi^4=0.6$	—	12.64	12.6382	0.014	—	14.42	14.4188	0.008
	$K_s/\pi^2=1.0$	—	28.10	28.0258	0.26	—	29.34	29.2476	0.315
	$Q/\pi^2=0.6$	—	46.34	45.9210	0.904	—	46.71	46.2772	0.93

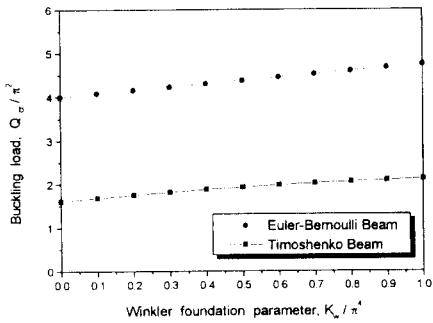


Fig.6 Buckling load depending on Winkler foundation parameter for clamped-clamped boundary condition.

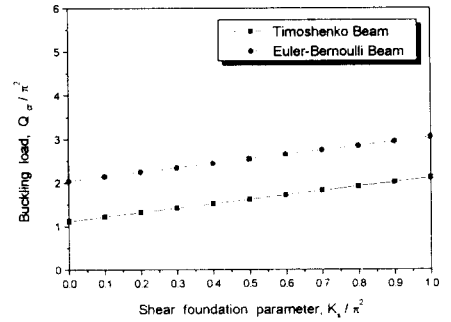


Fig.8 Buckling load depending on shear foundation parameter for hinged-clamped boundary condition

Fig.7부터 Fig.10까지는 Winkler기초가 없고 전단기초만이 존재하는 경우 4가지 경계조건에 대한 좌굴하중 변화를 나타낸 그림들이다. 이 경우도 무차원화된 전단기초파라메타 K_s 값이 증가됨에 따라 좌굴하중은 증가됨을 알 수 있고, 4가지 경계조건 모두 K_s/π^2 값이 0.1씩 증가됨에 따라 Q_{cr}/π^2 값도 0.1씩 증가된다는 것이 특징이다.

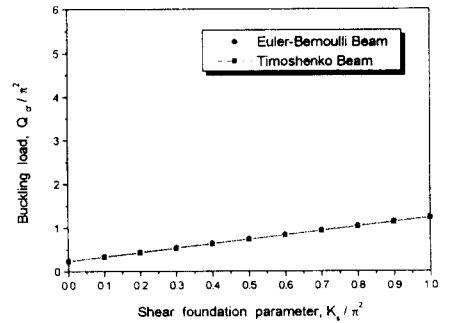


Fig.9 Buckling load depending on shear foundation parameter for clamped-free boundary condition.

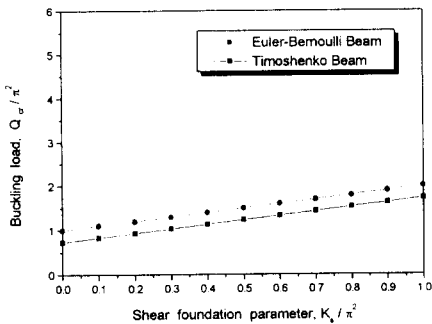


Fig.7 Buckling load depending on shear foundation parameter for hinged-hinged boundary condition.

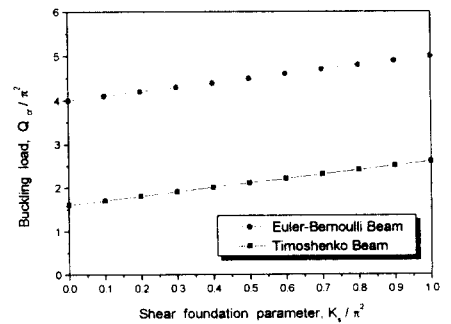


Fig.10 Buckling load depending on shear foundation parameter for clamped-clamped boundary condition.

Fig.11부터 Fig.14까지는 두 파라메타 탄성기초층(Winkler기초층과 전단기초층)으로 가정된 기초를 갖는 보에 축력이 작용되는 경우, Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보에 대한 좌굴하중을 나타낸 그림들이다. 두 파라메타로 가정된 경우에는 Winkler기초 또는 전단기초층 중 어떤 하나의 층으로만 가정된 Fig.3-Fig.10까지의 그림들에서 보다 좌굴하중 값이 증가됨을 알 수 있다. 이미 Fig.7부터 Fig.10까지에서 지적된 바와 같이 무차원화된 전단기초 파라메타 값 K_s/π^2 의 증가량 만큼 좌굴하중 값 Q_{cr}/π^2 이 증가됨을 알 수 있었던 것처럼, 두 파라메타구조로 가정된 Fig.11-Fig.14까지의 좌굴하중들은 고정된 Winkler기초 파라메타 값 K_w/π^4 의 좌굴하중 값에 K_s/π^2 의 증가량 만큼 더한 값이 됨을 알 수 있었다. 즉 두 파라메타 기초구조로 가정된 경우의 좌굴하중 값은 한층만으로 가정된 경우의 좌굴하중 값보다 증가됨을 알 수 있는데, 이는 전단기초층이든 Winkler기초층이든 모두 강성을 증가시켜 고유진동수를 증가시키는 것으로 생각된다.

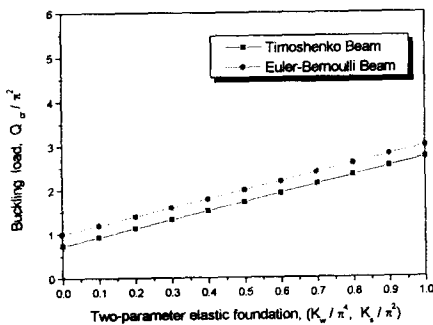


Fig.11 Buckling load depending on two-parameter elastic foundation for hinged-hinged boundary condition.

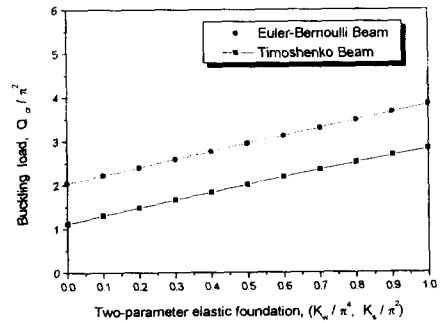


Fig.12 Buckling load depending on two-parameter elastic foundation for hinged-clamped boundary condition.

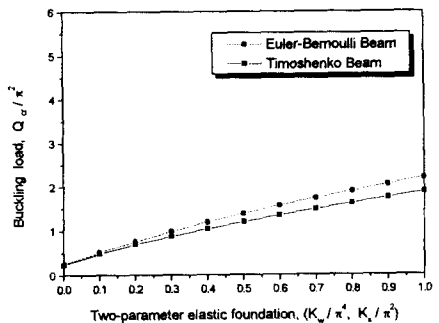


Fig.13 Buckling load depending on two-parameter elastic foundation for clamped-free boundary condition.

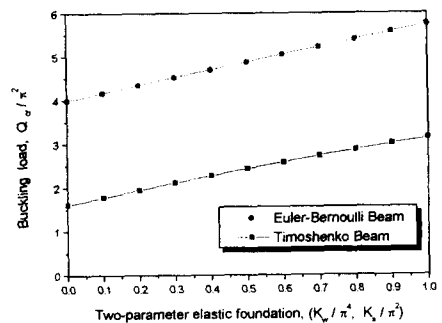


Fig.14 Buckling load depending on two-parameter elastic foundation for clamped-clamped boundary condition.

Table 2는 4개의 경계조건을 갖는 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보에 대해, 첫째 축력, 전단기초, Winkler기초가 모두 존재하지 않는 경우, 둘째 Winkler기초가 없고 축력 파라메타 Q/π^2 값과 전단기초 파라메타 K_s/π^2 값이 동일한 경우, 셋째 전단기초가 없고 축력 파라메타 Q/π^2 값과 Winkler기초 파라메타 K_w/π^4 값이 동일한 때에 있어서의 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. 여기서 알 수 있는 것은 Winkler기초가 없고 축력 파라메타 Q/π^2 값과 전단기초 파라메타 K_s/π^2 값이 동일한 경우의 1, 2, 3차 고유진동수는 축력과 기초층이 전혀없는 보의 고유진동수와 완전한 일치

보인다는 점이다. 이것은 인장축력(tensile axial force)과 같은 크기의 강성효과(stiffening effect)가 전단기초층에 의해 야기되어, 가해진 압축력(compressive axial force)과 서로 상쇄되어 버리는 결과라고 인지된다.

그러나, 전단기초층이 없고 Winkler기초와 축력만이 존재하는 경우에 있어서, 축력 파라메타 Q/π^2 값과 Winkler기초 파라메타 K_w/π^4 값이 동일한 때에는 오로지 양단힌지의 경계조건에서만 1차 고유진동수가 기초가 전혀없고 축력도 없는 계의 1차 고유진동수와 일치하고, 2, 3차 및 다른경계조건에서는 고유진동수 모두가 다른 값을 나타낸다.

Table 2. Nondimensional lowest three natural frequencies, Ω for four boundary conditions (Euler-Bernoulli & Timoshenko).

Boundary Condition		Both Hinged	Clamped-Free	Hinged-Clamped	Clamped-Clamped
Beam Types	Parameters				
Euler-Bernoulli Beam	$Q/\pi^2 = 0.0$	9.86956	3.51601	15.4180	22.3728
	$K_w/\pi^4 = 0.0$	39.4779	22.0342	49.9636	61.6705
	$K_s/\pi^2 = 0.0$	88.8256	61.6961	104.246	120.900
	$Q/\pi^2 = 0.5$	9.86956	3.51601	15.4180	22.3728
	$K_w/\pi^4 = 0.0$	39.4779	22.0342	49.9636	61.6705
	$K_s/\pi^2 = 0.5$	88.8256	61.6961	104.246	120.900
	$Q/\pi^2 = 0.5$	9.86956	5.80909	15.1443	22.0986
	$K_w/\pi^4 = 0.5$	37.5818	19.3256	48.3046	60.2035
	$K_s/\pi^2 = 0.0$	86.6046	58.9387	102.234	119.069
Timoshenko Beam	$Q/\pi^2 = 0.0$	8.21469	3.18869	10.6266	13.0748
	$K_w/\pi^4 = 0.0$	24.2281	13.8755	25.6160	26.6924
	$K_s/\pi^2 = 0.0$	41.5417	29.9222	42.0314	42.6488
	$Q/\pi^2 = 0.5$	8.21469	3.18869	10.6266	13.0748
	$K_w/\pi^4 = 0.0$	24.2281	13.8755	25.6160	26.6924
	$K_s/\pi^2 = 0.5$	41.5417	29.9222	42.0314	42.6488
	$Q/\pi^2 = 0.5$	8.21469	5.15705	10.5122	12.9933
	$K_w/\pi^4 = 0.5$	21.2404	11.3125	22.8103	23.9795
	$K_s/\pi^2 = 0.0$	36.8673	26.0099	37.4859	38.1856

4. 결론

축력을 받고 두 파라메타 탄성기초층(전단기초층과 Winkler기초층)위에 놓인 다양한 경계조건을 갖는 보의 진동과 안정성 해석을 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

- (1) 지반기초(soil-foundation)를 Winkler기초만으로 가정한 경우에 비해 전단층을 포함한 두 파라메타 구조로 가한 경우의 좌굴하중 값은 증가된다.
- (2) 동일한 Winkler기초 파라메타 값과 전단기초 파라메타 값에 대해 Euler-bernoulli보의 경우가 Timoshenko보의 경우에 비해 좌굴하중 값이 더 크게 된다.
- (3) 무차원 전단기초 파라메타 K_s/π^2 값과 무차원 축력 파라메타 Q/π^2 값이 동일하고 Winkler기초가 없는 경우, Euler-Bernoulli보 및 Timoshenko보의 어떤 경계조건에서도 고유진동수는 기초가 전혀없고 축력도 작용하지 않는 보의 고유진동수와 완전히 일치한다. 또한 전단기초가 없고 축력 파라메타 Q/π^2 값과 Winkler기초 파라메타 K_w/π^4 값이 동일한 경우는, 양단힌지의 경계조건에 1차 고유진동수만이 기초와 축력이 전혀없는 계의 1차 고유진동수와 일치할 뿐이다.
- (4) 본 연구에서 제시된 20개 유한요소 수치해는 엄밀해와 비교하여 아주 근사한(0.9%이내) 결과를 나타내었다.

참고문헌

- [1] Dodge, A., "Influence Functions for Beams on Elastic Foundations," Journal of Structure Division, ASCE, Vol.90, (1964), pp.63-101.
- [2] Franklin, J.N. and R. F. Scott, "Beams Equation with Variable Foundation Coefficient," ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division, Vol.105, (1979), pp.811-827.
- [3] Clastornik, J., M. Eisenberger, D. Z. Yankelevsky and M. A. Adin, "Beams on Variable Winkler Elastic Foundation," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.53, (1986), pp.925-928.
- [4] Eisenberger, M. and J. Clastornik, "Vibrations and Buckling of a Beam on a Variable Winkler Elastic Foundation," Journal of Sound and Vibration, Vol.115, (1987), pp.233-241.
- [5] Franciosi, C. and A.Masi, "Free Vibrations of Foundation Beams on Two-Parameter Elastic Soil," Computers and Structures, Vol.47, (1993), pp.419-426.
- [6] Wang, T.M. and J. E. Stephens, "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundations," Journal of Sound and Vibration, Vol.51, (1977), pp.149-155.
- [7] Wang, T.M. and L. W. Gagnon, "Vibrations of Continuous Timoshenko Beams on Winkler-Pasternak Foundations", Journal of Sound and Vibration, Vol.59, (1978), pp.211-220.
- [8] Timoshenko, S., D. H. Young and W. Weaver, Jr, Vibration Problems in Engineering, 4th edition, Wiley, NewYork, 1974.
- [9] Capron, M.D. and F. W. Williams, "Exact Dynamic Stiffnesses for an Axially Loaded Uniform Timoshenko Member Embedded in an Elastic Medium," Journal of Sound and

- Vibration, Vol.124, (1988), pp.453-466.
- [10] Cheng, F.Y. and C. P. Pantelides, "Dynamic Timoshenko Beam-Columns on Elastic Media", Journal of Structural Engineering," ASCE, Vol.114(ST7) (1988), pp.1524-1550.
- [11] Yokoyama, T., "Vibrations of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations," Earthquake Engineering Structural Dynamics, Vol.20, (1991), pp.355-370.
- [12] Yokoyama, T., "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations," Computers and Structures, Vol.61, (1996), pp.995-1007.
- [13] Bokaian, A., "Natural Frequencies of Beams under Compressive Axial Loads," Journal of Sound and Vibration Vol.126, (1988), pp.49-64.
- [14] Huang, T.C., "The effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equation of Uniform Beams with Simple End Conditions," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.28, (1961), pp.579-584.

● 저자소개 ●



정승호

1984년 : 연세대학교 기계공학과 (공학사)

1985년 : 쌍용컴퓨터 연구원

1987년 : 연세대학교 기계공학과 (공학석사)

1992년 : 연세대학교 기계공학과 (공학박사)

1992년~현재 : 한국원자력연구소 선임연구원

관심분야 : Robotics, Dynamics and Vibration, Signal Processing



류봉조

1981년 : 연세대학교 기계공학과 (공학사)

1983년 : 연세대학교 기계공학과 (공학석사)

1988년 : 연세대학교 기계공학과 (공학박사)

1991년~1992년 : University of Osaka Prefecture, Visiting Scholar

1989년~현재 : 대전산업대학교 기계설계공학과 교수

관심분야 : Structural Stability, Dynamics & Vibration of Structures



이규섭

1981년 : 연세대학교 기계공학과 (공학사)

1983년 : 연세대학교 기계공학과 (공학석사)

1989년 : 연세대학교 기계공학과 (공학박사)

1987년~1991년 : 유니슨 산업주식회사 기술연구소 소장

1981년~현재 : 국방과학연구소 선임연구원

관심분야 : Dynamics, Vibration and Control of Structures



최봉문

1998년 : 대전산업대학교 기계설계공학과 (공학사)

현재 : 대전산업대학교 기계설계공학과 (석사과정)

관심분야 : Dynamics and Vibration