



유 사 이 동 론

최성욱 (연세대학교 사회환경·건축공학부 조교수)

· 차 례 ·

1. 개설
2. 유사 특성
3. 유체역학의 기본방정식
4. 유사입자의 운동
5. 소류사 이론
6. 부유사 이론

제 2 편

유체역학의 기본방정식

3. 유체역학의 기본방정식

지난 호에서는 유사이동론의 개설 및 유사의 물리적 특성에 대하여 살펴 보았다. 유수에 의한 유사의 이동은 소류사와 부유사 형태로 이루어 진다. 하상에 놓여 있는 유사입자는 유수에 의한 전단력으로 말미암아 초기 운동을 시작하기 때문에 바닥의 경계층에서 유속분포의 정확한 예측은 매우 중요하다. 또한 제 1장에서 언급한 바와 같이 유사의 이동현상과 난류는 매우 밀접한 관계가 있다. 난류 운동에너지는 세립토를 유수중에 부유상태로 유지하며 하상을 침식하고, 교각주위 국부세굴 등의 문제에서도 중요한 역할을 한다. 난류 현상을 포함한 유체 운동에 관한 수학식이 Navier-Stokes 방정식이고 이를 시간에 대해 평균한 것이 레이놀즈 방정식이다. 제2편에서는 유사이동 현

상과 관련된 유체역학적 이해를 돕고자 관련된 기본 이론을 소개하고자 한다.

(1) 경계층 좌표계

하천에 대한 수학식을 전개하는데는 아래 그림 1. 과 같은 경계층 좌표계(boundary-layer coordinate system)를 사용하는 것이 편리하다. 경계층 좌표계는 하상을 기준으로 하여, 두 개의 축은 하상에 접선 방향이며(흐름방향과 흐름의 직각방향), 나머지 하나의 축은 바닥에 수직인 방향이다. 즉,

$$\begin{aligned} x_1 = s & \quad \text{흐름 접선방향} \\ x_2 = n & \quad \text{흐름과 직각으로 접선방향} \\ x_3 = z & \quad \text{하상에 수직방향} \end{aligned}$$

제방에 인접한 곳을 제외하면 s 와 n 은 거의 수평이라고 할 수 있으며, 흐름방향으로 하상의 경사가 완만한 경우에 z 는 연직에 가깝다(quasi-vertical). 그러나 연직방향과 z 와의 차이는 때로 중요시 되기도 한다. 경계층 좌표계에서 순간 유속벡터를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$u_i = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w) \quad (1)$$

그림 1.에서와 같이 기준면에 대한 하상과 수면의 표고를 각각 η 와 ζ 로 나타내고 수심을 H 로 하면, 하상 경사가 완만한 때 다음 식이 성립한다.

$$\eta + H \cong \zeta \quad (2)$$

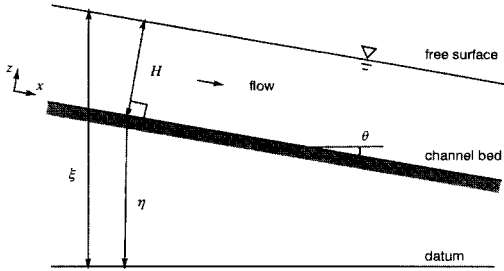


Figure 1. Boundary-Layer Coordinate System

(2) Navier-Stokes 방정식

유사의 농도가 작아 흐름에 영향을 미치지 못할 경우, 유사가 포함된 흐름(sediment-laden flow)에 다음과 같은 Navier-Stokes 방정식을 적용할 수 있다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i \quad (3)$$

마찬가지로 연속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

식(3)에서 중력가속도 벡터는 $g_i = (g_1, g_2, g_3)$ 로서 각각 s, n, z 방향으로의 중력가속도 성분을 나타낸다. x_1, x_2 , 그리고 x_3 방향의 단위 벡터를 e_1, e_2 , 그리고 e_3 라고 하고 \vec{k} 를 연직상향으로의 단위 벡터라고 하면 g_i 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$g_i = -g \vec{k} \cdot \vec{e}_i \quad (5)$$

횡단면이 수평하고 흐름방향으로는 각도 θ 만큼 기울어진 직사각형 개수로에서 하상 경사 S 는 다음과 같이 정의된다.

$$S = \tan \theta = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6)$$

식(5)에서

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{k} &= -\sin \theta \cong -S \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{k} &= 0 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{k} &= \cos \theta \cong 1 \end{aligned}$$

따라서 중력가속도 벡터 g_i 를 경계층 좌표계에서 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

$$g_i = g(S, 0, 1) \quad (7)$$

윗 식의 오른쪽에서 첫 번째 항인 gS 는 개수로에서 하류방향으로 작용하는 중력의 역할을 나타내는데, 하류방향으로 운동량을 증가시켜 유체의 운동을 유발하며 난류 운동에너지 생성의 근원이 된다.

응력 텐서(stress tensor)를 사용하여 Navier-Stokes 방정식인 식(3)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i \quad (8)$$

여기서 τ_{ij} 는 Newtonian 응력 텐서로서 다음과 같이 정의된다.

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \rho \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

여기서 δ_{ij} 는 Kronecker delta이다. 식(9)의 응력 텐서에서 i 와 j 가 같을 때는 수직응력을 나타내며 i 와 j 가 서로 다를 때는 전단응력을 나타낸다.

(3) 레이놀즈 방정식

앞절의 Navier-Stokes 방정식의 종속변수는 순간적인 흐름변수이므로 방정식을 해석하여 얻은 결과도 순간적인 흐름장(instantaneous flow field)이 된다. 이러한 예측은 실질적으로 그다지 중요하지 않으며 예측할지라도 계산결과로 인한 엄청난 양의 무작위성 데이터를 처리할 방법도 현재에는 없다. 따라서 Navier-Stokes 방정식의 직접적인 해석보다도 이를 시간평균한 레이놀즈 방정식을 해석하는 것이 공학적으로 의미가 있을 수 있다.

Navier-Stokes 방정식의 이송항을 연속방정식을 이용하여 다시 쓰면 아래와 같다.

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \quad (10)$$

위의 항들은 비선형으로서 이차형태(quadratic form)이다. 이송항을 시간평균하기 위하여 순간적인 유속성분을 평균유속(\bar{u})과 유속의 진동성분(u_i')으로 나눌 수 있다. 즉,

$$u_i = \bar{u}_i + u_i'$$

윗 식에서 overbar는 시간평균을 의미하며 평균유속과 유속의 진동성분은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= \int_0^T u_i dt \\ \bar{u}'_i &= u_i - \bar{u}_i \end{aligned}$$

위에서 적분시간 T 는 $\bar{u}'_i = 0$ 이 되도록 충분히 길어야 한다. 식(10)에 Reynolds의 평균법칙을 적용하기 위하여 $u_i u_j$ 항을 시간평균하면 다음과 같다.

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j} \quad (11)$$

위의 식으로부터 두 유속성분의 곱을 평균한 것은 각 성분의 평균의 곱과는 다르다는 것을 알 수 있다. 실제로 강한 난류 흐름에 있어서 식(11)의 우변 두 번째 항은 첫 번째항에 비하여 매우 지배적이다. 이 항에 유체의 밀도 ρ 를 곱한 $\rho \overline{u'_i u'_j}$ 는 x_j 방향으로 x_i 운동량 흐름률(momentum flux)을 의미하며 응력의 차원을 갖는다. 그리고 u'_i 와 u'_j 는 역으로 상관관계에 있으므로(Schlichting, 1955) 응력의 값을 양으로 만들기 위하여 음의 부호를 붙인 $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ 는 레이놀즈 응력 텐서를 형성한다.

Navier-Stokes 방정식, 식(8)의 각 항에 위의 시간평균 과정을 적용하면 아래와 같은 레이놀즈 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j}) + g_i \quad (12)$$

여기서

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \rho \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

식(12)를 좀더 간단히 하기 위하여 평균 응력텐서 T_{ij} 를 아래와 같이 정의하고

$$T_{ij} = \bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j}$$

위의 식을 이용하여 식(12)를 정리 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + g_i \quad (13)$$

(4) 경계에서의 전단응력

주 흐름방향(x_1)과 직각을 이루는 방향(x_2)으로

수평이고 하류방향(x_3)으로 경사 S인 광폭 직사각형 단면의 개수로를 가정하자. 흐름이 정상(steady-state)이고 등류상태(normal state)라고 하면, 측벽에 의한 영향을 받지 않는 부분에서의 유속은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{u}_i = (\bar{u}_i(x_3), 0, 0) = (u(z), 0, 0)$$

이 때 평균 응력텐서 T_{ij} 중 영이 아닌 요소는 다음과 같다.

$$T_{31} = \rho \nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \rho \overline{u'_1 u'_3} = \rho \nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \rho \overline{u' w'} \equiv \tau \quad (14)$$

$$T_{33} = -\bar{p} - \rho \overline{u'_1 u'_3} = -\bar{p} - \overline{\rho u'^2} \equiv -P \quad (15)$$

식(14)과 식(15)는 각각 난류에 의해 보정된 전단응력과 압력을 나타낸다. 따라서 위의 관계를 이용하면 레이놀즈 방정식은 다음과 같이 간단히 된다.

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dz} + gS \quad (i = 1) \quad (16a)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} - g \quad (i = 3) \quad (16b)$$

위의 두 식은 수면에서($z = H$) 전단응력과 수직응력이 소멸한다는 가정하에 적분될 수 있다. 즉,

$$\tau = \tau_b \left(1 - \frac{z}{H} \right) \quad (17)$$

$$P = \rho g H \left(1 - \frac{z}{H} \right) \quad (18)$$

식(17)에서 τ_b 는 바닥에서의 전단응력으로 다음과 같다.

$$\tau_b = \rho g H S \quad (19)$$

윗 식에 의하면 평균 전단응력은 바닥면에서 최대값을 갖고 수면에서 영이 되는 선형적 분포를 형성하며, 평균 유효 압력도 마찬가지로 정수압 분포를 보임을 알 수 있다. 임의의 단면 형상을 가진 개수로에서도 흐름이 등류상태인 경우 레이놀즈 방정식으로부터 다음과 같이 전체 운변에 대해 평균한 전단응력을 유도할 수 있다(Garcia, 1992).

$$\bar{\tau}_b = \frac{1}{P} \int_0^H \tau b \, dn = \rho g R_h S \quad (20)$$

여기서 R_h 는 수리수심이다.

(5) 일차원 부등류 방정식

광폭의 구형 수로의 점변류(gradually varied flow)를 생각하자. 만약 하류방향으로의 흐름의 변화율이 수심방향에 비해 매우 작고 이와 관련된 특성시간이 H/\bar{u} 보다 훨씬 크다고 가정하면 경계층 근사(boundary-layer approximation)가 유효하다. 난류 평균된 레이놀즈 방정식에 경계층 근사를 적용하고, 이를 수심방향으로 적분하면 아래와 같은 일차원 개수로의 연속 방정식과 운동량 방정식을 각각 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial UH}{\partial s} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} = -g \frac{\partial}{\partial s} (\eta + H) - \frac{1}{\rho} \frac{\tau_b}{H} \quad (22)$$

여기서 U 는 수심적분된 s -방향의 유속으로 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{H} \int_0^H \bar{u} \, dz$$

정상상태 등류라는 조건을 이용하면 식(22)으로부터 식(19)를 쉽게 유도할 수 있다. 또한 식(22)를 이용하면 부등류의 하상에서 전단응력의 변화를 예측할 수 있다. 예를들어, 댐에 의해 형성된 배수곡선(M1)의 수면형을 생각하자. 하상 경사가 일정한 상태에서 하류방향으로 갈수록 수심이 증가하므로 유속은 상대적으로 감소하게 된다. 유속의 감소는 유체역학적으로 전항력계수를 줄이고 이는 하상에서 전단응력의 감소를 초래한다(이것은 등류상태에서 식(19)에 의해 예측할 수 있는 정반대의 결과이다). 하상 전단응력의 감소는 상류 부분과 댐 근처인 하류부분에서 하천의 유사이동 능력에 차이를 유발하여 저수지 퇴사문제(reservoir sedimentation)가 야기되는 것이다(그림 2. 참조).

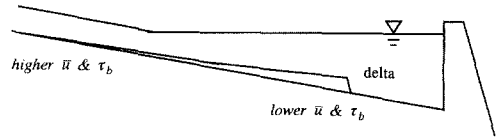


Figure 2. Reservoir Sedimentation

(6) 난류흐름의 유속분포

식(14)는 전단응력이 유체의 점성과 레이놀즈 응력 두 가지 요소로 구성되어 있고, 식(17)에 의하면 전단응력이 깊이방향으로 선형분포이며 수면에서는 영이고 바닥에서 최대값을 갖고 있음을 보여준다. 아래의 그림 3은 수심방향으로 전단응력의 분포를 나타내며, 유체점성과 난류에 의한 분할을 보여주고 있다. 유체 점성에 의한 전단응력(τ_i)은 주로 경계층 부근에서 지배적이고 위로 올라갈수록 난류에 의한 영향이 지배적임을 알 수 있다. 난류에 의한 전단응력(τ_t)은 바닥에서는 영이지만 급격히 증가하여 경계층 두께(δ) 부근에서는 최대값을 보이며 서서히 감소함을 알 수 있다. 유체역학의 전단유속 개념을 도입하면 하상의 전단응력을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\rho u_*^2 = \tau_b \quad (23)$$

위의 식을 이용하여 식(14)와 식(17)을 연결하면 다음과 같다.

$$\tau = \rho \nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \rho \overline{u'w'} = \rho u_*^2 \left(1 - \frac{z}{H} \right) \quad (24)$$

난류 점성개념(eddy viscosity concept)을 도입하면 레이놀즈 응력을 평균유속의 경사로 표현할 수 있다. 즉,

$$\rho \overline{u'w'} = -\rho \nu_t \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (25)$$

1925년에 Prandtl은 차원해석을 통하여 식(25)의 와 점성계수를 다음과 같이 제안했다.

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right| \quad (26)$$

여기서 l 은 혼합거리(mixing length)로서 벽근처의 흐름인 경우 다음 식으로 주어진다.

$$l = xz \quad (27)$$

위에서 x 는 von Karman 상수로서(성층화되지 않은) 균질한 물에서 조도높이가 수심에 비해 매우 작을 경우 0.4라는 일정한 값을 갖는다. 그러나 유사가 포함된 흐름의 경우 von Karman 상수의 값도 변화하며, 유사의 농도가 증가할수록 x 의 값도 줄어드는 것이 실험을 통해 밝혀졌다(Yalin, 1977; Fischer et al., 1979).

잘 발달된 난류흐름의 경우 바닥부근에서는 식

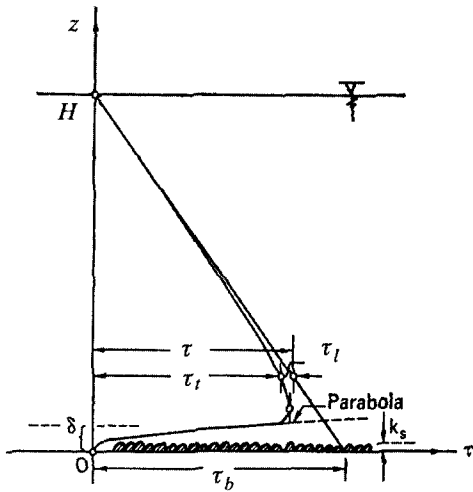


Figure 3. Shear Stress Distribution

(24)의 z/H 를 무시할 수 있다. 이 때 유체 점성에 의한 전단응력보다 레이놀즈 응력이 지배적이라고 가정하면(언뜻보면 상반된 것으로 보이지만 실제로는 매우 타당한 가정이다), 식(25)는 다음과 같이 된다.

$$x^2 z^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right) = u_*^2 \quad (28)$$

위의 식을 적분하면

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{x} \ln z + \text{constant} \quad (29)$$

위의 식은 바닥 부근에서의 유속분포가 대수형이라는 것으로 벽법칙(the law of the wall)이라고 불리운다.

바닥 표면의 거칠기가 매우 매끈할 경우(sufficiently

smooth), 바닥 부근의 매우 얇은 층에서 난류는 억제되고 반면에 유체 점성에 의한 영향이 지배적이다. 이러한 층을 점성저층(viscous sublayer)이라고 하며 점성저층내에서는 다음과 같이 선형의 유속 분포를 보인다.

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_*}{\nu} z \quad (30)$$

이 때 점성저층의 두께는 $z = 10\nu/u_*$ 임이 밝혀졌다(Kays and Crawford, 1980). 이를 무차원의 벽단위(wall unit) $z^+ (\equiv z u_* / \nu)$ 를 사용하여 나타내면 점성저층의 두께 δ_v^+ 는 다음 식에 의해 주어진다.

$$z^+ = 10 \quad (31)$$

$z = \delta_v$ 에서 식(29)과 식(30)에 의한 유속이 동일하다는 조건에서부터, 식(29)의 적분상수를 구할 수 있다. 따라서 매끈한 바닥조건인 경우 유속분포는 다음과 같다.

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{x} \ln z + 5.5 \quad (30)$$

바닥 표면의 거칠기가 매우 거칠은 경우(sufficiently rough) k_s 를 조도높이라고 하면, $k_s > \delta_v$ 일 때 점성저층은 존재하지 않는다. 이 때의 유속분포는 다음과 같다(Schlichting, 1955).

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{z}{k_s} \right) + 8.5 \quad (30)$$

그림 4는 난류 경계층에서 바닥조건이 매끈할 경우 식(30)과 식(32)에 의한 유속분포를 실험값(원형 심볼)

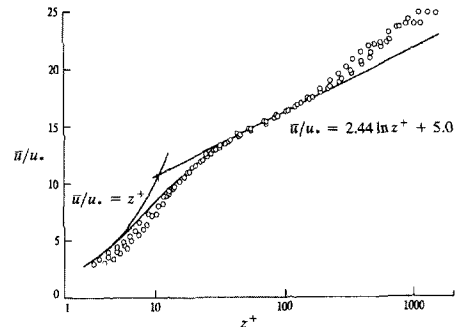


Figure 4. Turbulent Boundary-Layer Profile (Kays and Crawford, 1966)

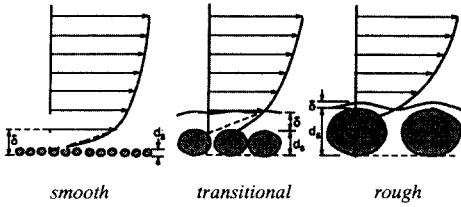


Figure 5. Hydraulically Smooth and Rough Boundaries (Julien, 1995)

과 함께 도시한 것이다. 식(32)와 그림의 식에 약간의 차이가 있는 것은 Kays와 Crawford(1980)가 $x = 0.41$ 과 $\delta_v = 10.8$ 의 값을 사용하였기 때문이다.

수리학적으로 바다의 거칠기를 점성저층의 두께와 유사입자의 직경을 가지고 판단한다. 그림 5.에서와 같이 유사입자의 입경에 비해 점성저층의 두께가 훨씬 크다면 이러한 하상을 “수리학적으로 매끈하다(hydraulically smooth)”고 한다. 반대로 유사입자의 크기가 커서 점성저층의 두께를 무시할 수 있을 때에 하상을 “수리학적으로 거칠다(hydraulically rough)”라고 한다.

(7) 바닥조건에 따른 흐름저항

대부분 실제 하천의 하상은 수리학적으로 거칠다. 앞 절에서 유도한 식(33)은 하상에 수직방향의 유속 분포를 나타내므로 이를 적분하면 공학적으로 유용하

게 사용될 수 있다. 대수함수는 바닥면($z = 0$)이 수학적으로 특이점(singular point)이므로, 조도높이인 $z = k_s$ 부터 식(29)를 적분하면 다음과 같다.

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{x} \ln\left(11 \frac{H}{k_s}\right) \quad (34)$$

여기서 U 는 수심적분된 유속이며 위의 관계식은 거친 표면에서 Keulegan의 저항법칙으로 알려져 있다. Keulegan의 저항법칙을 Manning-Strickler의 멱급수 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{U}{u_*} = 8.1 \left(\frac{H}{k_s}\right)^{1/6} \quad (35)$$

식(23)를 사용하여 하상에서 전단응력을 수심평균된 유속의 함수로 나타내면 아래와 같다.

$$\tau_b = \rho C_f U^2 \quad (36)$$

여기서 C_f 는 흐름저항계수(flow resistance coefficient)로서 식(30)을 사용하면 다음과 같음을 보일 수 있다.

$$C_f = \left[\frac{1}{x} \ln\left(11 \frac{H}{k_s}\right) \right]^{-2} \quad (37)$$

위의 식은 흐름저항계수를 수심과 조도높이의 함수로 나타낸 것이다. 따라서 식(36)에 의한 하상의 전단응력은 등류 및 부등류 조건에서 레이놀즈 응력의 폐합 식으로 사용될 수 있다. ●

(참고 문헌)

- Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J., and Brooks, N.H. (1979). *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, London, England.
- Garcia, M. (1992). *Sediment Transport*. CE459 Lecture Note, University of Illinois, Urbana, IL.
- Julien, P.Y. (1995). *Erosion and Sedimentation*. Cambridge University Press, New York, NY.
- Kays, W.M., and Crawford, M.E. (1980). *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill Book Company, New York, NY.
- Schlichting, H. (1955). *Boundary Layer Theory* (Seventh edition). McGraw-Hill Book Company, New York, NY.
- Yalin, M.S. (1977). *Mechanics of Sediment Transport* (Second edition). Pergamon Press, Oxford, England.