

비보존성 오염물질에 대한 종확산 방정식의 수치해법

A Numerical Method for Longitudinal Dispersion Equation for Nonconservative Contaminants

유 명 관* / 전 경 수**

Yu, Myoung Kwan / Jun, Kyung Soo

Abstract

A fractional step finite difference model for the longitudinal dispersion of nonconservative contaminants is developed. It is based on splitting the longitudinal dispersion equation into a set of three equations each to be solved over a one-third time step. The fourth-order Holly-Preissmann scheme, an analytic solution, and the Crank-Nicholson scheme are used to solve the equations for the pure advection, the first-order decay, and the diffusion, respectively. To test the model, it is applied to simulate the longitudinal dispersion of continuous source released into a nonuniform flow field as well as the dispersion of an instantaneous source in a uniform flow field. The results are compared with the exact solution and those computed by an existing model. Compared to the existing model which uses Euler method for the first-order decay equation, the present model yields more accurate results as the decay coefficient increases.

keywords: Longitudinal dispersion, Nonconservative contaminants, Fractional step finite difference method, Numerical model

요 지

비보존성 오염물질의 종확산에 관한 수치모형을 개발하였다. 계산기법으로는 종확산 방정식을 이송, 감쇠 및 확산 방정식으로 분리하고, 이들 방정식을 1/3 시간 간격에 대하여 번갈아 계산하는 단계분리 유한차분기법을 사용하였다. 이송방정식에 대해서는 Holly-Preissmann 기법을, 감쇠방정식에 대해서는 해석적 방법을, 확산방정식에 대해서는 Crank-Nicholson 기법을 각각 사용하였다. 오염물질이 불균일 흐름 내로 연속적으로 유입되는 경우 및 균일 흐름 내로 순간적으로 부하되는 경우에 대한 종확산 문제에 모형을 적용하여 계산결과를 정확해와 비교함으로써 모형을 검증하였다. 또한 감쇠방정식의 수치해법으로서 Euler 방법을 사용하는 기존의 모형에 계산결과를 비교하였다. 감쇠계수가 커질수록 본 모형이 기존의 모형에 비하여 더욱 정확한 계산결과를 나타내었다.

핵심어 : 종확산, 비보존성 오염물질, 단계분리 유한차분법, 수치모형

* 성균관대학교 토목공학과 대학원(졸)

Formerly, Grad. Student, Dept. of Civil Engrg., Sungkyunkwan Univ., Suwon 440 746, Korea

** 성균관대학교 토목공학과 부교수

Associate Prof., Dept. of Civil Engrg., Sungkyunkwan Univ., Suwon 440 746, Korea

1. 서 론

하천수질오염 문제로서 생활하수, 공장폐수, 축산폐수 등 평상시의 지속적인 오염원의 발생에 의한 것과 사고 등으로 인한 독성물질 등의 일시적 방류에 따른 것이 있다. 평상시에는 유역 내 점오염원 및 비점오염원과 하천의 수질관리가 공학적인 관심의 대상인 반면, 수질사고 시에는 사고지점 하류에서의 가능한 피해상황을 정확하고 신속하게 예측함으로써 그에 대한 대책을 수립하는 것이 중요한 문제가 된다.

수질오염 문제의 성격에 따라 적용되는 수질모형의 특성 또한 크게 달라진다. 전자의 경우, 즉 평시의 수질문제에서 관심의 대상이 되는 것은 주로 BOD, COD, DO, 유기질소, 암모니아 질소, 질산성 질소 등의 질소 순환요소 및 유기인, 용출인 등의 인 순환요소 등 전형적인 수질항목들로서, 이 경우의 수질모형은 이들 수질항목의 종류와 그들의 상호반응을 나타내는 반응식으로 이루어지는 반응모형의 구조 및 그에 따른 반응계수의 값들이 수질모형을 결정하는 중요한 요소라 할 수 있다. 이 경우 관심이 되는 수질변동의 시간 단위는 비교적 커서 월별, 계절별 또는 연별 수질을 정상상태로 모의하게 된다. 즉, 각 계절 또는 연별로 모형의 경계조건을 인정하게 하여 정상상태의 수질을 계산하게 되므로 종확산, 즉 전단류 확산이 차지하는 비중은 거의 없게 된다. 반면에 우발적인 사고 등으로 단시간에 배출된 오염원에 따른 하천수질의 계산모형에 있어서는 물리적 확산에 의해서 시간에 따라 급격히 변화하는 비정상 농도의 계산이 요구되므로 확산모형이 매우 중요한 부분을 차지하게 된다.

장기적인 수질변화를 모의하기 위한 계산모형에 관한 연구는 매우 활발하여 국외에서는 QUAL2E (Brown과 Barnwell, 1987), WQRRS(HEC, 1978) 등 하천수질 모형이 이미 개발되어 널리 사용되고 있으며, 국내에서도 이러한 수질모형들의 국내 주요하천에의 적용에 관한 연구가 행하여져 왔다(崔興植과 손吉成, 1987; 田庚秀와 손吉成, 1993a; 1993b). 그러나 실제 하천에 대하여 단기간의 급격한 수질변동을 모의하기 위한 계산모형에 관한 연구는 많지 않은데, 이는 우발적인 수질사고가 자주 발생하는 것이 아니므로 그 활용성이 상대적으로 적기 때문이기도 하지만 시간에 따라 급격히 변화하는 비정상 수질을 정확히 계산하기 위해서는 정교한 확산모형의 개발이 요구되기 때문이기도 하다.

하천에서의 비정상 확산을 정확히 모의하기 위해서는 1차원 종확산 방정식에 대한 적절한 수치모형이 요구된다. 고정된 계산격자를 사용하는 대부분의 수치기법들(Eulerian methods)이 쌍곡선성 즉 정보전달의 방향성을 적절히 반영하지 못함으로써 실제의 물리적 현상과는 거리가 먼 수치진동이나 수치분산 현상을 수반하는데 반하여, 이러한 계산오차들을 최소화할 수 있는 단계분리 또는 연산자 분리 유한차분 기법들에 관한 연구가 수행되어 왔다(Holly와 Preissmann, 1977; Holly와 Usseglio-Polatera, 1984; 전경수와 이길성, 1994). Holly와 Preissmann(1977)에 의하여 처음 개발된 연산자 분리방법 및 이후의 유한 연구들은 대부분 보존성 물질의 종확산에 관한 것들이다. 이를 비보존성 오염물질의 종확산 계산에 적용할 수 있도록 확장한 계산모형으로 비정상 수질모형인 CE-QUAL-RIV1(Environmental Laboratory, 1990)을 들 수 있으나, 그 적용성에 관해서는 분석이 수행된 바 없다. 본 연구에서는 CE-QUAL-RIV1 모형의 감쇠항에 대한 계산 방법을 개선한 모형을 수립하고 이를 정확해가 존재하는 비보존성 오염물질의 종확산 문제들에 적용하여, 그 결과를 정확해 및 CE-QUAL-RIV1 모형에 의한 계산결과와 비교함으로써 모형의 검증을 수행하였다.

2. 수학적 모형

2.1 지배방정식

1차원 수로에서 흐름면적에 대하여 완전 혼합된 비보존성 오염물질에 관한 종확산 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(AC)}{\partial t} + \frac{\partial(UAC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[DA \frac{\partial C}{\partial x} \right] - kAC \quad (1)$$

여기서 U는 단면평균 유속, D는 종확산계수, C는 오염물질의 농도이며, k는 생·화학적 반응에 관한 감쇠계수(decay coefficient)이다. 식 (1)의 우변 제 2항 $-kC$ 는 비보존성 물질에 관한 감쇠 항으로서 선형감쇠를 가정한 것이다. 식 (1)의 각 미분항을 전개하고 수로 흐름에 관한 연속방정식을 적용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - kC \quad (2)$$

여기서

$$u = U - \left[\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{D}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \right] \quad (3)$$

식 (2)는 u 가 영이면 포물선형의, D 가 영이면 쌍곡선형의 편미분 방정식이 된다. 식 (2)에는 포물선형과 쌍곡선형이 동시에 내재되어 있는데 이들 방정식이 갖는 물리적, 수학적 성질 및 그에 따른 적합한 수치해법 또한 다르므로, 각 항을 별도로 취급하여 해를 구하려는 것이 단계 분리, 또는 연산자 분리에 의한 접근방법이다. 즉, 식 (2)를 이송, 감쇠 및 확산에 관한 방정식인 다음식 (4), (5) 및 (6)으로 각각 분리하고, 이들 각각에 적합한 수치기법을 각각 $1/3$ 시간 간격에 대하여 적용하여 순차적으로 계산하게 된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + 3\bar{u} \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad n\Delta t \leq t \leq (n + \frac{1}{3})\Delta t \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -3kC, \quad (n + \frac{1}{3})\Delta t \leq t \leq (n + \frac{2}{3})\Delta t \quad (5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 3\bar{D} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (n + \frac{2}{3})\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \quad (6)$$

여기서 \bar{u} 및 \bar{D} 는 시간준위 n 과 $n+1$ 사이에서의 u 와 D 의 평균치를 각각 나타낸다. 즉 이송, 감쇠 및 확산과정이 각각 $1/3$ 시간간격에 대해서만 일어나는 것으로 하되, 이들 과정의 강도를 각각 실제의 세배로 함으로써, 결국 전체 시간간격(one time step)에 대해서는 실제와 같은 이송, 감쇠 및 확산이 일어나도록 하는 결과가 된다.

그림 1은 이러한 연산자 분리에 의한 계산과정을 나타내는 모식도이다. 시간준위(time level) n , 공간 격자점 i 에서의 농도를 C_i^n 이라 하였을 때, 이들 기지 값으로부터 식 (4)에 대한 수치해법에 의하여, 즉 이송만이 일어난다고 가정할 경우에 대하여 계산된, $\Delta t/3$ 시간 후의 농도값이 $C_i^{n+1/3}$ 이다. $C_i^{n+2/3}$ 은 이를 기지의 값으로 하여 식 (5)를 $\Delta t/3$ 시간간격에 대하여 풀어서 구한 농도값이며, 이로부터 확산방정식 (6)을

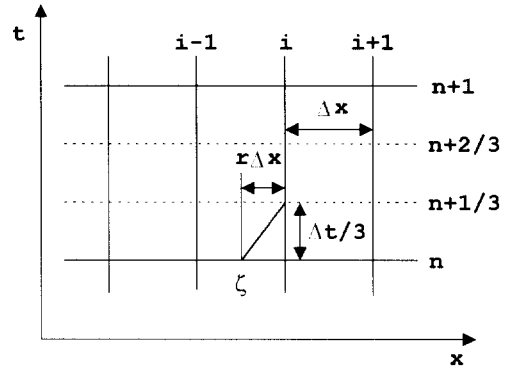


그림 1. 증확산 계산모형에 관한 모식도

역시 $\Delta t/3$ 시간간격에 대하여 풀어 계산된 결과와

C_i^{n+1} 로서 다음 시간준위 ($n+1$)에서의 농도값이 된다. 본 연구에서는 이송에 관한 방정식 (4)에 대해서는 특성곡선을 고려한 수치기법인, Holly-Preissmann 기법을, 감쇠에 관한 방정식 (5)에 대해서는 해석적 방법을, 확산에 관한 방정식 (6)에 대해서는 Crank-Nicholson 기법을 각각 사용하여 연산자 분리에 의한 계산을 수행하였다.

2.2 이송방정식에 대한 수치해법

이송방정식 (4)는 다음과 같이 쓸 수 있으며, 특성곡선 ($dx/dt = 3\bar{u}$)을 따라서 농도가 일정하다는 의미를 갖는다.

$$\frac{dC}{dt} = 0, \quad \text{along the characteristic line}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\bar{u} \quad (7)$$

이를 차분식의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$C_i^{n+1/3} = C_\zeta^n \quad (8)$$

여기서 (ζ, n)은 격자점 ($i, n+1/3$)을 지나가는 특성곡선의 시간준위 n 에서의 위치로서 다음식과 같이 나타낼 수 있다(그림 1 참조).

$$\zeta = i - r \quad (9)$$

여기서 r 은 다음과 같이 정의되는 Courant 수이다.

$$r = \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} \quad (10)$$

시간준위 n 과 $(n+1)$ 간에서의 u 의 평균치 \bar{u} 는 다음과 같다

$$\bar{u} = \frac{1}{2} (u_i^{n+1} + u_i^n) \quad (11)$$

여기서 u_i^n 은 Courant 수가 1 이하일 경우 대하여 u_{i-1}^n 과 u_i^n 으로부터 선형 보간하여 구하면 다음과 같다.

$$u_i^n = ru_{i-1}^n + (1-r)u_i^n \quad (12a)$$

$$= \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^n + (1 - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}) u_i^n \quad (12b)$$

식 (12b)를 (11)에 대입하여, \bar{u} 에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$\bar{u} = \frac{u_i^{n+1} + u_i^n}{2 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)} \quad (13)$$

식 (13)을 식 (10)에 대입하면 r 이 결정된다.

C_i^n 의 값은 격자점 $(i-1, n)$ 과 (i, n) 에서의 값들로부터 보간하여 구할 수 있는데, fourth-order Holly-Preissmann 기법의 경우, 다음과 같은 3차의 Hermite 보간 다항식을 사용한다.

$$C_i^{n+1/3} = C_i^n(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 \quad (14)$$

보간 다항식 (14)는 4개의 계수를 갖는데 이들은 $(i-1, n)$ 및 (i, n) 에서의 농도(C) 및 농도의 공간 1계 미분 값(C_x)들로부터 주어지는 네 개의 경계조건으로부터 구할 수 있다(전경수와 이길성, 1994). 이들 계수의 값을 구하여 식 (14)에 대입하여 다시 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_i^n(r) = a_1(r) C_{i-1}^n + a_2(r) C_i^n + a_3(r) C_x^n + a_4(r) C_x^n \quad (15)$$

여기서 a_1 , a_2 , a_3 및 a_4 는 r 의 함수로서 구체적인

인 함수형태는 전경수와 이길성(1994)에 기술되어 있다. 결국 식 (15)의 적용을 위해서는 각 격자점에서의 C 값뿐만 아니라 C_x 값이 주어져야 하는데, 이에 대해서는 2.5 절에서 기술하기로 한다.

이송 방정식에 사용된 수치해법은 특성곡선(characteristic line)을 고려한, 즉 이전 시간준위에서의 특성곡선 통과점의 양측의 격자점에서의 값을 사용하여 C 및 C_x 를 근사하는 방법으로서 무조건 안정하다(Holly와 Usseglio-Polatera, 1984).

2.3 감쇠방정식에 대한 수치해법

시간준위 $(n+1/3)\Delta t$ 에서의 농도가 $C_i^{n+1/3}$ 이므로, 이를 감쇠과정의 초기조건으로 하여 식 (5)의 해를 국소적으로 구할 수 있으며, 이로부터 $(n+2/3)\Delta t$ 에서의 농도 $C_i^{n+2/3}$ 을 구하면 다음과 같이 된다.

$$C_i^{n+2/3} = C_i^{n+1/3} e^{-k\Delta t} \quad (16)$$

CE-QUAL-RIV1 모형의 경우에는 감쇠방정식 (5)에 대한 수치해법으로서 다음과 같이 Euler 방법을 사용하며

$$\frac{C_i^{n+2/3} - C_i^{n+1/3}}{\Delta t} = -k C_i^{n+1/3} \quad (17)$$

따라서 $C_i^{n+2/3}$ 은 다음식 (18)에 의하여 계산된다.

$$C_i^{n+2/3} = (1 - k\Delta t) C_i^{n+1/3} \quad (18)$$

2.4 확산방정식에 대한 수치기법

확산방정식 (6)에 대한 수치기법으로는 포물선형 방정식에 대한 수치기법으로서 널리 사용되고 있는 다음과 같은 Crank-Nicholson 기법을 사용한다.

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n+2/3}}{\Delta t} = \frac{D}{2(\Delta x)^2} [(C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}) + (C_{i+1}^{n+2/3} - 2C_i^{n+2/3} + C_{i-1}^{n+2/3})] \quad (19)$$

여기서 $C_i^{n+2/3}$ 은 이송 및 감쇠방정식에 대한 계산 결과로서 주어지는 기지 값이므로 식 (19)는 상류단 및 하류단의 경계조건과 함께 시간준위 $(n+1)$ 에서의

각 격자점 농도값들을 미지수로 하는 선형 시스템을 이룬다. 또한, 이 선형 시스템에 대한 계수행렬은 삼중 대각 행렬을 이루어 Thomas 알고리즘을 이용하여 해를 구할 수 있다.

확산 방정식을 풀기 위해서는 상류단 ($i = 0$) 및 하류단 ($i = I_{max}$) 경계조건을 필요로 한다. 이송 및 감쇠과정이 종료된 후에도 상류단의 농도조건에는 변화가 없으므로 상류단 경계조건은 이송방정식에서와 마찬가지로의 조건을 부여하면 되나, 하류단에서는 이송에 따른 농도변화가 있으므로 이송 및 감쇠방정식에 대한 계산결과를 이용하여 다음과 같이 경계조건을 각각 부여하도록 하였다.

$$C_{I_{max}}^{n+1} = C_{I_{max}}^{n+2/3} \quad (20)$$

확산방정식의 수치해법으로 사용된 Crank-Nicholson 기법은 무조건 안정하다(Richtmyer와 Morton, 1967). 따라서 이송, 감쇠 및 확산방정식의 해법으로 구성되는 전체적인 모형은 무조건 안정성을 갖는다.

2.5 농도 경사 C_x 의 계산

2.2 절에서 기술된 바와 같이 fourth-order Holly-Preissmann 기법의 적용을 위해서는 각 격자점에서의 농도 1계 미분치 C_x 의 값들이 계산되어야 한다. 농도 C 에 대한 지배방정식 (2)를 x 에 관하여 미분하면 C_x 에 관한 방정식 다음식 (21)을 얻게 된다.

$$\frac{\partial C_x}{\partial t} + u_* \frac{\partial C_x}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C_x}{\partial x^2} - k_* C_x \quad (21)$$

여기서

$$u_* = u - \frac{\partial D}{\partial x} \quad (22)$$

$$k_* = k + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (23)$$

C_x 에 관한 지배방정식 (21)은 결국 C 에 관한 지배방정식 (2)와 동일한 형태를 가지며, 따라서 동일한 수치기법을 적용하여 해를 구할 수 있다. 식 (21)을 C 에 관한 지배방정식인 식 (2)의 경우와 마찬가지로 시간

분리하면 다음식 (24)-(26)과 같이 된다.

$$\frac{\partial C_x}{\partial t} + 3\bar{u}_* \frac{\partial C_x}{\partial x} = 0, \quad n\Delta t \leq t \leq (n + \frac{1}{3})\Delta t \quad (24)$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial t} = -3k_* C_x, \quad (n + \frac{1}{3})\Delta t \leq t \leq (n + \frac{2}{3})\Delta t \quad (25)$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial t} = 3\bar{D} \frac{\partial^2 C_x}{\partial x^2}, \quad (n + \frac{2}{3})\Delta t \leq t \leq (n + 1)\Delta t \quad (26)$$

따라서 이송방정식 (24)의 해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_{x_i}^{n+1/3} = C_{x_i}^n \zeta_i \quad (27)$$

여기서

$$\zeta_i = i - r_* \quad (28)$$

$$r_* = \frac{\bar{u}_* \Delta t}{\Delta x} \quad (29)$$

$$\bar{u}_* = \frac{u_{*i}^{n+1} + u_{*i}^n}{2 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{*i}^n - u_{*i-1}^n)} \quad (30)$$

$C_{x_i}^n$ 은 식 (14)로부터 식 (15)와 유사하게 다음과 같은 형태로 유도될 수 있다.

$$C_{x_i}^n(r_*) = \beta_1(r_*)C_{i-1}^n + \beta_2(r_*)C_i^n + \beta_3(r_*)C_{i-1}^{n-1} + \beta_4(r_*)C_{i-1}^{n-1} \quad (31)$$

여기서 식 (31)의 유도과정 및 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 의 구체적인 함수형태는 진경수와 이길성(1994)에 기술되어 있다. C_x 에 대한 감쇠방정식 (25) 및 확산방정식 (26)에 대한 수치해법은 C 에 대한 지배방정식인 식 (5) 및 (6)에 대한 수치해법과 각각 동일하다.

2.6 2단계 분리 계산모형

앞에서 기술된 바와 같이 이송, 감쇠 및 확산과정

등 3개 과정을 각 단계별로 1/3 시간 간격에 대하여 모의하는 3 단계 분리 계산모형 외에, 이송 및 감쇠/확산의 2개 과정으로 분리하는 2 단계 분리 계산모형을 수립하였다. 즉, 식 (2)를 이송에 관한 방정식인 다음식 (32)와 감쇠 및 확산에 관한 방정식인 다음식 (33)으로 각각 분리하고, 이들 각각에 적합한 수치기법인 Holly-Preissmann 기법과 Crank-Nicholson 기법을 각각 1/2 시간 간격에 대하여 적용하여 순차적으로 계산하게 된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + 2\bar{u} \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad n\Delta t \leq t \leq (n + \frac{1}{2})\Delta t \quad (32)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 2\bar{D} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - 2kC, \quad (n + \frac{1}{2})\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \quad (33)$$

이송 방정식 (32)에 관한 수치해법은 3 단계 분리 계산모형의 경우와 동일하다. 확산 및 감쇠에 관한 방정식 (33)에 Crank-Nicholson 기법을 적용하면 다음식 (34)와 같이 되며, 식 (19)의 경우와 마찬가지로 Thomas 알고리즘에 의하여 해를 구할 수 있다.

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n+1/2}}{\Delta t} = \frac{\bar{D}}{2(\Delta x)^2} [(C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}) + (C_{i+1}^{n+1/2} - 2C_i^{n+1/2} + C_{i-1}^{n+1/2})] - k\left(\frac{1}{2}C_i^{n+1} + \frac{1}{2}C_i^{n+1/2}\right) \quad (34)$$

3. 모형의 검증

본 연구에서는 정확해가 존재하는 두 가지 경우, 즉 불균일 흐름내로 연속적으로 유입되는 오염물질의 종확산 및 균일 흐름내로 순간적으로 유입된 오염물질의 종확산 문제에 모형을 적용하여, 그 모의 결과를 CE-QUAL-RIV1의 종확산 모형 및 정확해와 비교함으로써 모형의 검증을 수행하였다.

3.1 불균일 흐름 내로 연속적으로 유입되는 오염물질의 종확산

통수 단면적은 일정하되 유속 및 종확산계수가 공간

적으로 변화하는 경우에 대한 보존성 물질의 종확산에 관한 지배방정식은 다음과 같다(식 (1) 참조).

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial [C(x,t)U(x)]}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(x) \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \right] \quad (35)$$

유속 및 종확산계수가 각각 선형 및 2차 분포를 갖는다고 가정하면, 즉 $U = U_0x$ (U_0 는 상수),

$D = D_0x^2$ (D_0 는 상수)로 가정하면 식 (35)는 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (U_0x - 2D_0x) \frac{\partial C}{\partial x} = D_0x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - U_0C \quad (36)$$

통수단면적이 일정하면서도 유속이 선형적으로 증가하는 것은 연속적인 측방유입(distributed lateral inflow)이 있는 경우 가능하며, 결국 하도내의 유량은 일정한 것이 아니라 하류 측으로 갈수록 증가하게 되며, 따라서 오염물질 자체는 보존성이되 유량의 증가에 따른 농도의 감소효과를 나타낸다. 즉, 식 (36)의 우변 마지막항 (U_0C)은 이러한 효과를 나타낸다. 또한 이러한 흐름은 하상경사가 x^2 에 비례하도록 연속적으로 변한다면 가능하다. 식 (36)은 식 (2)에서 $u = U_0x - 2D_0x$, $D = D_0x^2$, $k = U_0$ 인 경우에 해당한다.

초기 농도가 어디서나 영이고, 지점 $x = x_0$ 에서 오염원이 연속적으로 방류되는 경우에 대한 초기 및 경계조건은 각각 다음과 같이 된다.

$$C(x, 0) = 0 \quad \text{for } x > x_0 \quad (37)$$

$$C(x_0, t) = C_0 \quad \text{and} \quad C(\infty, t) = 0 \quad (38)$$

식 (35), (37) 및 (38)로 구성되는 종확산 문제에 대한 정확해는 다음과 같다(Zoppou와 Knight, 1997).

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left\{ \frac{x_0}{x} \operatorname{erfc} \left[\frac{\ln(x/x_0) - t(U_0 + D_0)}{2\sqrt{D_0t}} \right] + \exp \left[\frac{U_0 \ln(x/x_0)}{D_0} \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{\ln(x/x_0) + t(U_0 + D_0)}{2\sqrt{D_0t}} \right] \right\} \quad (39)$$

Zoppou와 Knight(1997)에서와 마찬가지로 $U_0=1$, $D_0=0.02$, $C_0=100$, $x_0=1$ 인 경우에 대하여 3단계 분리기법을 적용하여 계산을 수행하였다.

보존성 물질($k=0$)이 동일한 농도로 연속적으로 유입되는 문제의 경우에는 C_x 에 관한 상류단 ($x=x_0$) 경계조건은 $C_x=0$ 이다. 본 연구에서도 우선 이를 경계조건으로 하여 계산을 수행하였으나, 이와 같이 하여 계산된 결과는 정확해와 상당한 차이를 나타냄을 알 수 있었다. 따라서 다음과 같이 C_x 에 관한 상류단 경계조건을 개선하여 계산을 수행하였다. 우선 $x=x_0$ 에서 농도의 시간변화는 없으므로 $\partial C/\partial t=0$ 이다. 또한 2계 미분항인 확산항을 무시하면 식 (2) 및 (36)으로부터 다음과 같은 상류단 경계조건을 얻을 수 있다.

$$C_x(x_0, t) = \frac{\partial C(x_0, t)}{\partial x} = -\frac{kC(x_0, t)}{u(x_0, t)} = -\frac{U_0}{U_0 - 2D_0} C_0 \quad (40)$$

계산모형의 전반적인 정확성을 평가하기 위하여 Noye(1987)에 의하여 제시된 다음과 같은 무차원 척도들을 사용하였다.

$$E_1 = |C - CE|_{\max} / CE_{\max} \quad (41)$$

$$E_2 = \frac{\sum_{i=1}^{\max} |C_i - CE_i|}{\sum_{i=1}^{\max} CE_i} \quad (42)$$

여기서 C 와 CE 는 수치모형에 의한 계산치와 정확해를 각각 나타낸다.

$\max = 20$, $\Delta x = 1.0$, $\Delta t = 0.5$ 로 하여 계산을 수행하였다. 그림 2는 $t=5$ 에서의 계산결과를 정확해와 함께 나타낸 것으로서 C_x 에 관한 상류단 경계조건을 영으로 한 경우와 식 (40)에 따라 부여한 경우에 대한 계산결과를 함께 나타내고 있다. 각 경우에 대한 오차 척도 E_1 의 값은 0.00239 및 0.0865, E_2 의 값은 각각 0.0103 및 0.152로 나타났다. C_x 에 관한 상류단 경계조건이 계산결과에 정확성에 상당히 큰 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

그림 3은 본 연구에서 개발된 모형에 의한 계산결과와 CE-QUAL-RIV1의 정확산 모형에 의한 계산결과를 비교하여 나타내고 있다. 두 경우 모두 상류단 경

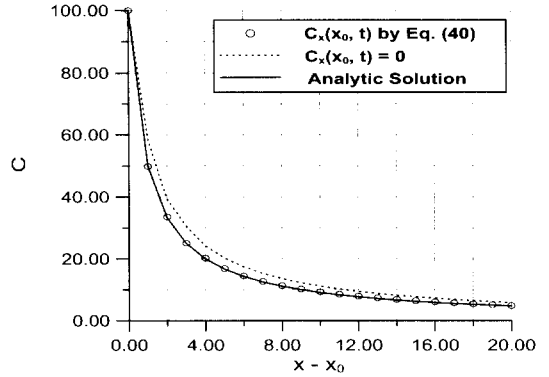


그림 2. 상류단 경계조건에 따른 계산결과와의 비교

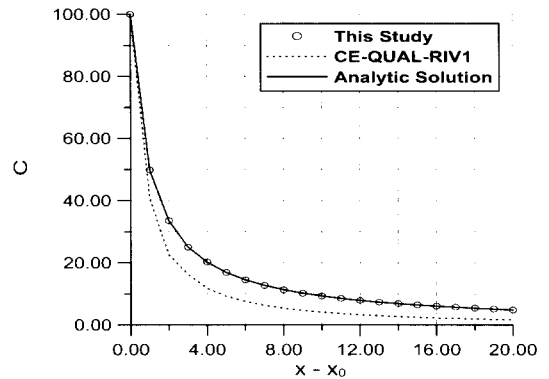


그림 3. CE-QUAL-RIV1 모형에 의한 계산결과와의 비교

계조건은 식 (40)으로서 부여하였다. CE-QUAL-RIV1 모형의 계산결과로부터 구간 E_1 및 E_2 의 값은 각각 0.108 및 0.304로서 본 모형에 비하여 정확성이 현저히 떨어짐을 알 수 있다.

3.2 균일 흐름 내로 순간적으로 부하된 오염원의 정확산

초기조건으로서 시각 $t=0$ 에서 다음과 같은 Gauss형 농도분포가 순간적으로 부하된 경우에 대한 계산을 수행하였다.

$$C(x, 0) = \frac{M}{\sqrt{4\pi D_0 t_0}} e^{\left[-\frac{x - U_0 t_0}{4D_0 t_0} \right]} \quad (43)$$

식 (43)은 유속 U_0 , 종확산계수 D_0 로 일정한 흐

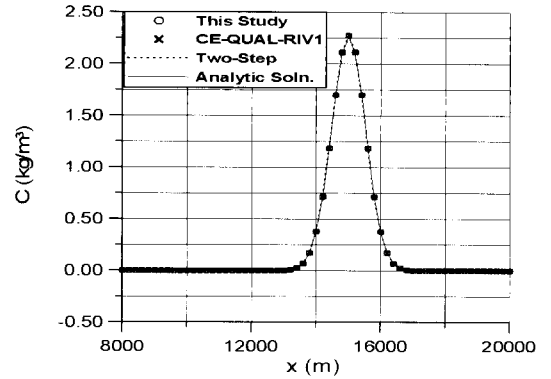
름에 단위 흐름면적당 질량 M 이 $x=0$ 에서 순간적으로 방류되어 t_0 시간이 경과된 후의 농도분포로서 $x_0 = U_0 t_0$ 에서 첨두값을 갖는 Gauss형 분포를 나타낸다. C_x 에 관한 초기조건은 식 (43)의 1계 공간미분 함수로부터 주어진다. 식 (43)과 같은 초기조건에 대한 식 (2)의 정확해는 식 (44)와 같다.

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi D(t+t_0)}} e^{\left[-\frac{\{x-U(t+t_0)\}^2}{4D(t+t_0)} - kt \right]} \quad (44)$$

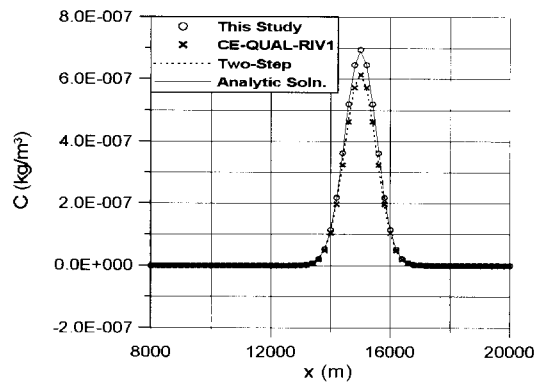
이송방정식 및 확산방정식에 대한 상류단 ($i=0$)에서의 경계조건으로는 C_0 및 C_{x_0} 을 모두 영으로 하였다. $\Delta x=200$ m, $I_{max}=100$ 으로 하였고, $\Delta t=200$ 초로 하여 10000 초까지 계산을 수행하였다. x_0 는 10000 m, t_0 는 4000 초, M 은 3000 kg/m^2 로 하였다. 이송항 및 확산항과 관계된 무차원 수인 Courant 수 및 Diffusion 수에 따른 변화 경향에 대해서는 전경수와 이길성(1994) 등에 의하여 이미 많은 연구가 수행된 바 있다. 따라서 본 연구에서는 감쇠계수와 관련된 무차원 수인 $k\Delta t$ 에 대한 변화 경향을 분석하였다. 이를 위하여 U 는 0.5 m/s, D 는 10 m^2/s 로 하고 k 를 0부터 0.0025 s^{-1} 까지 0.0001 간격으로 증가시켜 가며, 즉 $k\Delta t$ 를 0부터 0.5까지 0.02 간격으로 증가시켜 가며 각 경우에 대한 계산을 수행하였다. 본 모형은 불분 CE-QUAL-RIV1의 종확산 모형 및 2단계 분리모형을 각각 적용하여 그 결과를 비교하였다.

그림 4는 $k\Delta t=0.1, 0.3$ 또는 0.5인 경우에 대하여 각 방법에 의하여 계산된 농도분포를 해석해와 함께 비교하여 나타낸 것이다. 또한 표 1은 각 방법에 의한 계산결과로부터 구한 E_1 및 E_2 의 값을 요약한 것이며, 그림 5는 이를 도시한 것으로서, $k\Delta t$ 에 따른 변화 경향을 나타내고 있다.

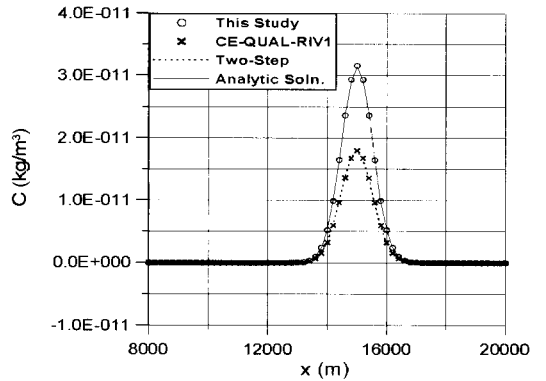
CE-QUAL-RIV1 종확산 모형의 계산 결과와 2단계 분리모형에 의한 결과는 거의 일치하는 것으로 나타났다. $k=0$ 인 경우, 즉 보존성 오염물질의 경우에 대한 모의결과는 사용된 모형에 관계없이 정확해와 잘 일치함을 알 수 있다. 본 모형의 경우에는 감쇠계수가 증가하는 경우에도 계산의 정확성이 유지되는 반면, CE-QUAL-RIV1의 종확산 모형에 의한 계산결과와는



(a) $k\Delta t = 0.0$



(b) $k\Delta t = 0.3$



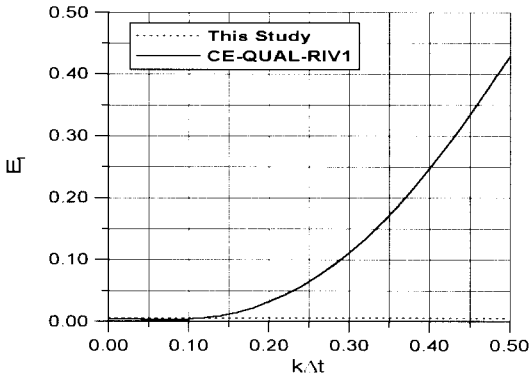
(c) $k\Delta t = 0.5$

그림 4. $k\Delta t$ 에 따른 농도분포의 계산결과 ($t = 10000$ sec)

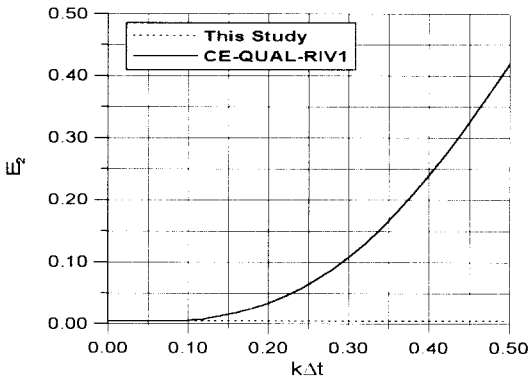
감쇠계수가 증가할수록 정확해와 큰 차이를 나타내고 있다. 이는 본 모형이 감쇠방정식의 해법으로서 해석적 방법을 사용하여, 즉 식 (16)과 같이 국소적인 해석해

표 1. $k\Delta t$ 값의 변화에 따른 무차원 오차 척도의 계산결과($t = 10000 \text{ sec}$)

$k\Delta t$	CE-QUAL-RIV1		This Study	
	E_1	E_2	E_1	E_2
0.0	0.0051	0.0045	0.0051	0.0045
0.1	0.0047	0.0051	0.0051	0.0045
0.2	0.0319	0.0336	0.0051	0.0045
0.3	0.1109	0.1080	0.0051	0.0045
0.4	0.2468	0.2392	0.0051	0.0045
0.5	0.4289	0.4180	0.0051	0.0045



(a) E_1



(b) E_2

그림 5. $k\Delta t$ 에 따른 무차원 오차척도의 변화

를 적용함에 따라 감쇠과정에 대한 계산오차가 전혀 없는 반면, Euler 방법, 즉 식 (18)을 사용할 경우 $k\Delta t$ 의 값이 증가할수록 절단오차가 증가하기 때문이다.

4. 결 론

중확산 방정식을 이송, 감쇠 및 확산 방정식으로 분리하고, 이들 방정식을 각각 1/3 시간 간격에 대하여 번갈아 계산하는, 비보존성 오염물질의 중확산에 관한 단계분리 유한차분 모형을 개발하였다. 이송방정식에 대해서는 Holly-Preissmann 기법을, 감쇠방정식에 대해서는 해석적 방법을, 확산방정식에 대해서는 Crank-Nicholson 기법을 각각 사용하였다. 불균일 흐름 내로 연속적으로 유입되는 오염물질의 중확산 및 균일 흐름 내로 순간적으로 부하된 비보존성 오염물질의 중확산 개발된 문제에 모형을 적용하여 계산결과를 정확해 및 CE-QUAL-RIV1의 중확산 모형에 의한 계산결과와 비교하였다.

불균일 흐름내로 연속적으로 유입되는 오염원의 중확산 문제에 대하여 농도경사에 관한 적절한 상류단 경계조건을 도입함으로써 계산의 정확성을 유지할 수 있었다. 즉, 식 (40)을 상류단 경계조건으로 하는 경우에 대한 계산 결과가 단순히 C_x 를 영으로 하는 경우에 비하여 정확해와 잘 일치함을 알 수 있었다. 감쇠방정식의 수치해법으로서 해석적 방법을 사용하는 본 모형은 감쇠계수에 관계없이 정확해와 잘 일치함을 보인 반면, Euler 방법을 사용하는 CE-QUAL-RIV1의 중확산 모형의 경우에는 감쇠계수가 커질수록 정확성이 감소하는 경향을 뚜렷이 나타내었다.

감사의 글

본 연구는 1997년 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비 지원에 의하여 수행되었다.

참 고 문 헌

전경수, 이길성 (1993a). "QUAL2E 모형의 한강수

- 계 적용.” 한국상하수도학회지, 한국상하수도학회, 제6권, 제2호, pp. 43-56.
- 전경수, 이길성 (1993b). “영향계수를 이용한 QUAL2E 모형의 반응수계 추정.” 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제13권, 제4호, pp. 163-176.
- 전경수, 이길성 (1994). “중확산 방정식에 대한 Eulerian-Lagrangian 연산자 분리방법.” 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제14권, 제1호, pp. 131-141.
- 최홍식, 이길성 (1987). “QUAL II 모형의 금강수계에의 적용.” 한국상하수도학회지, 한국상하수도학회, 제1권, 제2호, pp. 20-33.
- Brown, L.C., and Barnwell, T.O. (1987). “The enhanced stream water quality models QUAL2E and QUAL2E-UNCAS: Documentation and user manual.” EPA/600/3-87/007, U.S. Envir. Protection Agency, Envir. Res. Lab., Athens, GA.
- Environmental Laboratory (1990). *CE-QUAL-RIVI: A Dynamic, One-Dimensional (Longitudinal) Water Quality Model for Streams*. Instruction Report E 90-1, U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi.
- Holly, F.M., Jr., and Preissmann, A. (1977). “Accurate calculation of transport in two dimensions.” *J. Hydr. Div.*, ASCE, Vol. 103, No. 11, pp. 1259-1277.
- Holly, F.M., Jr., and Usseglio-Polatera, J.M. (1984). “Pollutant dispersion in tidal flow.” *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol. 110, No. 7, pp. 905-926.
- Hydrologic Engineering Center (1978). *WQRRS: Water Quality for River-Reservoir Systems*. U.S. Army Corps of Engineers, Davis, CA.
- Noye, J. (1987). “Numerical methods for solving the transport equation.” *Numerical modelling: Applications to marine systems*, J. Noye, ed., Elsevier, Amsterdam, pp. 195-229.
- Richtmyer, R.D., and Morton, K.W. (1967). *Difference methods for initial-value problems*, 2nd ed., Interscience.
- Zoppou, C., and Knight, J.H. (1997). “Analytic solutions and advection-diffusion equations with spatially variable coefficients.” *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol. 123, No. 2, pp. 144-148.

(논문번호:99-011/접수:1999.02.08/심사완료:1999.08.25)