韓國水資源學會論文集
第32卷 第5號 · 1999年 10月
pp. 565~577

하천의 프랙탈 특성을 고려한 지형학적 순간단위도의 개발(I)

Development of a GIUH Model Based on River Fractal Characteristics

홍 일 표* / 고 재 웅**
Hong, Il Pyo / Ko, Jae Ung

Abstract

The geometric patterns of a stream network in a drainage basin can be viewed as a "fractal" with fractal dimensions. Fractals provide a mathematical framework for treatment of irregular, ostensively complex shapes that show similar patterns or geometric characteristics over a range of scale. GIUH (Geomorphological Instantaneous Unit Hydrograph) is based on the hydrologic response of surface runoff in a catchment basin. This model incorporates geomorphologic parameters of a basin using Horton's order ratios. For an ordered drainage system, the fractal dimensions can be derived from Horton's laws of stream numbers, stream lengths and stream areas. In this paper, a fractal approach, which is leading to representation of a 2-parameter Gamma distribution type GIUH, has been carried out to incorporate the self-similarity of the channel networks based on the high correlations between the Horton's order ratios. The shape and scale parameter of the GIUH-Nash model of IUH in terms of Horton's order ratios of a catchment proposed by Rosso(1984) are simplified by applying the fractal dimension of main stream length and channel network of a river basin.

Keywords: fractal, Fractal GIUH, Horton's ratio, Nash-model, self-similarity

요 지

프랙탈 기하학은 불규칙적이고 복잡한 자연 현상을 수학적으로 나타낼 수 있는 방법을 제시해 줄 수 있으며, 자기상사성을 가지고 있는 하천의 형상을 비롯한 하도망의 구성은 프랙탈 차원을 가지고 있는 프랙탈 현상이라 할 수 있다. GIUH란 유역의 수문학적 응답인 IUH에 하천의 지형학적인 특성을 적용한 강우-유출 모형으로, Horton의 차수비를 이용하여 지형학적인 특성을 반영할 수 있으며 하천 유역에서 프랙탈 차원은 길이비, 면적비, 분기비 등 Horton의 차수비를 이용하여 산정할 수 있다. 본 연구에서는 2변수 Gamma 분포 함수를 기본으로 유역의 자기상사성에 근거한 하천의 프랙탈 특성을 이용하여 프랙탈 GIUH 모형을 제시하였다. 프랙탈 GIUH 모형은 Rosso(1984)가 제시한 GIUH-Nash 모형의 형상계수와 규모계수 등의 매개변수 산정시 유역의 자기상사성을 대변할 수 있는 프랙탈 차원을 직접 적용하였으며, 하천의 길이비와 분기비 만의 함수로 나타내었다.

핵심용어 : 프랙탈, 프랙탈 GIUH 모형, Horton의 차수법칙, Nash 모형, 자기상사성

* 한국건설기술연구원 수자원환경연구부 선임연구원
Senior Researcher, Water Resources and Environmental Research Div., Korea Institute of Construction Technology, Koyang, Kyonggi, 411-410, Korea
** 건국대학교 공과대학 토목공학과 명예교수
Emeritus Professor, Dept. of Civil Engrg., Kon-kuk Univ., Seoul, 143-701, Korea

1. 서 론

유역에서 강우에 따른 유출 현상 및 그 과정에 대한 정량적인 이해와 예측은 수문학에 있어서 가장 기본적이고 중요한 분야로서 이에 대한 많은 연구가 이루어져 왔다. 강우에 대한 유역의 반응은 그 유역을 구성하고 있는 많은 요소들의 상호 작용에 기인하는 것으로, 각 구성 요소들의 개별적인 특성뿐만 아니라 총체적인 특성에 의해서 결정되며, 수로와 사면에서 물의 움직임을 나타내는 것이다.

자연 하천 유역은 무수한 수의 사면으로 구성되어 있으며, 사면은 다양한 특성의 토양과 식생으로 이루어져 있다. 단일 사면에서의 미세한 거동에 대한 이론적인 전개도 필요하고 중요하다고 할 수 있으나, 사실상 그 자체만으로는 유역의 수문학적인 반응에 대한 사면의 역할을 이해할 수 없다(Gupta 등, 1986). 따라서 유역내 토양과 식생의 제반 물리적인 특성이 균일하다고 가정하고 단순화시켜서 강우에 대해 사면이 반응하는 물리적인 과정을 규명하려는 많은 연구들이 끊임없이 이루어져 왔다(Kirkby, 1978).

일반적으로 강우-유출 모형이란 유역에서 하도망과 사면 시스템의 강우에 대한 반응을 모의하는 것이라 할 수 있으며, 유역에서 하도망의 역할은 강우와 출구에서의 표면 유출을 연관지어 주는 매개체로 볼 수 있다.

전체적인 하도망은 일정한 규칙성을 가지고 있으며, 하천 유역은 지형학적인 요소로 이루어진 질서가 있고 다양한 형태와 형상을 가지고 있는, 즉 균형을 이루고 있는 시스템이라고 할 수 있다. 이러한 질서를 수문학적인 반응 특성과 관련을 짓는 것은 매우 중요한 부분으로, 유역의 지형학적인 법칙과 수문학적인 응답간의 어떤 연관을 찾고자 하는 데는 유역의 수문학적 응답 구조를 나타내는 방법이 필요하다.

유역의 수문학적 응답구조를 나타내는 것 중의 대표적인 것은 순간단위유량도(Instantaneous Unit Hydrograph, IUH)로서 유역의 단위 충격 반응 함수(unit impulse response function)라고 할 수 있는데, 유역의 수문학적인 응답은 유역의 지형학적인 구조와 연계하여 고려되어야 한다.

Rodridguez-Iturbe와 Valdes(1979)는 하도망의 구조적인 특성을 대변하는 Horton의 차수법칙을 이용하여, 유역의 지형학적인 특성을 수문학적인 응답과 연계한 지형학적 순간단위도(Geomorphological Instantaneous Unit Hydrograph, GIUH) 모형을 처음으로 제시하였다.

Nash(1957)는 유역의 IUH를 Gamma 분포 함수를 이용해 나타냈으며, Rosso(1984)는 Nash 모형을 Horton의 지형법칙과 결합하여 그 적합성을 보인 바가 있다. 그는 Nash 모형의 매개변수 산정시, 유역의 전체적인 지형 특성을 나타내는 Horton의 차수법칙을 이용하였으며 동수역학적 인자로 평균 유속을 도입하여 GIUH 모형을 구성하였다. 그러나 Horton의 차수비인 면적비, 분기비, 길이비는 서로 상관성이 있음에도 불구하고 이에 대한 검토가 이루어지지 않은 채 사용되어 왔으며, 이로 인해 발생하는 다중공선성(multi-collinearity)에 의해서 모형이 불안정하게 되는 등의 문제점이 제기될 수 있다.

일반적으로 유역의 구조가 독특한 지역을 제외하고는, 비록 수계가 다르다 하여도 유출 특성을 비롯한 하천이 갖는 전반적인 특성이 비슷한 경우가 많으며, 이와 같은 유역의 상사성에 대해서는 많은 연구가 있었다(조홍제와 이상배, 1990; 이상배, 1992; 성기원 1997).

한국건설기술연구원(1992)은 200개 이상의 소유역 자료를 분석하여 중소하천의 유역면적과 유로연장의 관계를 하나의 회귀식으로 제시한 바 있는데, 이는 전 하천이 유사한 특성을 가질 수 있다는 점을 보여주는 것이다. 또한 수문학적으로 유출의 상사성을 가지고 있는, 하천 수계를 구성하는 각각의 소유역들이 지형학적으로 서로 동일한 특성을 가지고 있는 것을 많이 볼 수 있다.

Horton(1945)은 하천 유역의 구조를 하천 차수, 분기비, 길이비, 면적비, 하천 밀도 등 지형학적인 특성치를 이용하여 정량적인 법칙으로 나타냈다. Horton의 법칙은 유역내 하천과 하도망의 지형학적인 구성에 대한 특성을 반영하는 것으로, 1980년대 후반부터 Horton의 차수법칙을 이용하여 유역의 프랙탈 특성을 나타내는 연구가 활발히 진행된 바 있다.

Mandelbrot(1983)는 지형도의 축척에 따라서 하천 길이의 측정 결과가 다르다는 것을 이용하여 프랙탈 이론을 제안하였으며, 하천 길이와 유역면적의 관계를 프랙탈 차원을 이용하여 나타내었다. Feder(1988), La Barbera와 Rosso(1987; 1989; 1990), Tarboton 등(1990), Rosso 등(1991)은 하천 길이와 하도망의 프랙탈 차원을 Horton의 차수법칙을 이용하여 나타내고 분석하였다. Nikora(1994)는 Horton의 차수법칙에

근거하여 하천 유역의 자기상사성과 자기유사성(self-affinity)에 관한 특성을 일반적인 방법으로 나타내어, 유역의 평면적인 상사성뿐만 아니라 유역의 고도를 고려한 상사성까지 검토할 수 있도록 한 바 있다.

강우에 의한 유역의 수문학적인 반응을 나타내는 유역의 IUH를 산정할 때 Gamma 분포 함수의 형태로 나타내는 모형에는 여러 가지가 있는데, Nash 모형이 가장 대표적이라고 할 수 있다. 이와 같이 유역의 IUH를 Gamma 분포 함수를 이용하여 나타내는 배경에는 IUH가 Gamma 분포 함수와 일치하는 특성이 있으며, 단지 2개의 매개변수만으로 유출 형태를 유연하게 반영하는 특성이 있기 때문이다. 그러나, Nash 모형에서 이들 매개변수는 실측자료 없이는 추정이 불가능한 경우도 있고, 경험적인 공식들이 이용되기는 하지만 이들 방법을 자료가 불충분한 미계측 지역에 적용하는 것은 곤란하다.

본 연구에서는 2변수 Gamma 분포 함수 모형을 유역의 순간단위도로 이용하고자 하며, 본 연구에서 이 매개변수가 갖는 형태는 기존의 Gamma 분포 함수를 이용한 모형과 크게 다르지 않다. 그러나, 그 추정 방법이나 해석에 있어서는 많은 차이가 있으며, 하천 길이와 하도망의 프랙탈 차원을 이용함으로써 물리적으로 새로운 개념을 도입하였다.

본 연구의 목적은 유역의 프랙탈 특성을 분석·검토하고, Horton의 차수비와 유역 특성 인자로 구성된 GIUH-Nash 모형(이후 'Rosso의 모형'과 혼용하여 사용)의 매개변수를 유역의 프랙탈 차원을 이용하여 기존 모형보다 간단하게 산정할 수 있는 프랙탈 GIUH (Fractal GIUH; FGIUH) 모형을 제시하고자 하는 것이다.

2. 프랙탈 기하학과 프랙탈 차원

프랙탈의 일반적인 특성은 자기상사성으로, 프랙탈 특성을 가지고 있는 사물은 그 위치나 규모가 변해도 원형이 가지고 있는 일반적인 기하학적 특성이 계속 유지된다는 성질을 말한다. 또한, 통계적으로 볼 때 자기상사성이란 그 대상을 나타내는 확률 분포가 규모에 따라 변화가 없다는 것을 의미한다. 예를 들어서 전체에 대한 어느 일부분의 평균적인 특성은 전체의 특성과 같다는 것이다.

수문학자나 지형학자의 관심을 끄는 정밀한 자기상사성의 대상으로 Mandelbrot(1983)는 1904년 스웨덴의 수학자인 Holze Van Koch가 제안한 Koch 곡선을 예로 들었다. Koch 곡선이란 그림 1과 같이 직선을 삼등분하여 가운데 부분을 밑변으로 하는 정삼각형을 만드는 것으로, 처음 직선이 단위 길이라면 결과적으로 생기는 선의 길이는 4/3가 된다. 한번 더 반복해서 생성되는 선의 길이는 $(4/3)^2$ 이 된다. 이러한 과정을 무한히 반복하면 자기상사성이 있는 무한한 길이를 갖는 연속된 길이가 되며, 이러한 성질을 프랙탈이라고 한다.

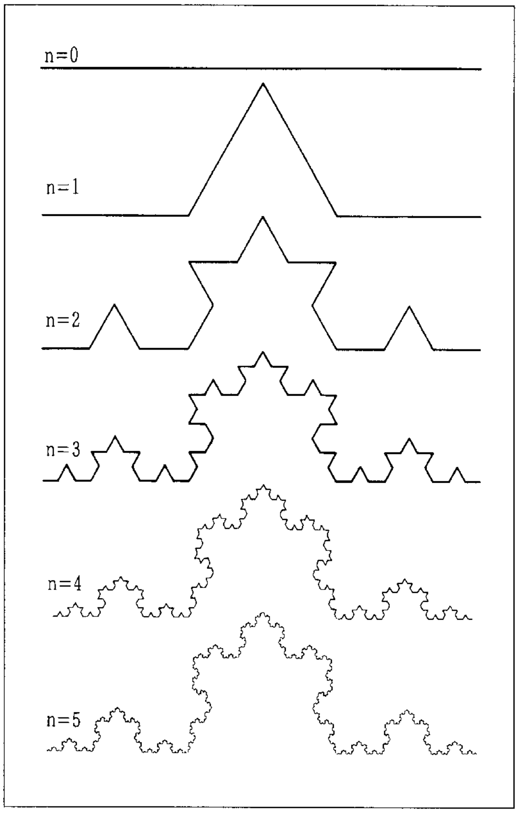

그림 1. Koch 곡선의 예 1 (Mandelbrot, 1983)

또한 다른 형태의 Koch 곡선으로 세 변의 길이가 모두 같은 정삼각형의 경우를 예로 들 수 있다. 정삼각형에서 한 변의 1/3이 되는 지점에서 한 변의 1/3을 새로운 한 변으로 하는 정삼각형을 만드는 경우, 그림 2에서 보는 것처럼 정삼각형을 대상으로 이러한 과정을 한번 거치면 별 모양이 되며, 두 번, 세 번, 계속해서 무한히 이러한 과정을 반복할 수 있다. 그러나, 어떠한 경우라도 처음 삼각형의 세 꼭지점의 위치는 움직이지 않았고, 두 번째 경우에서 추가로 만들어진 별

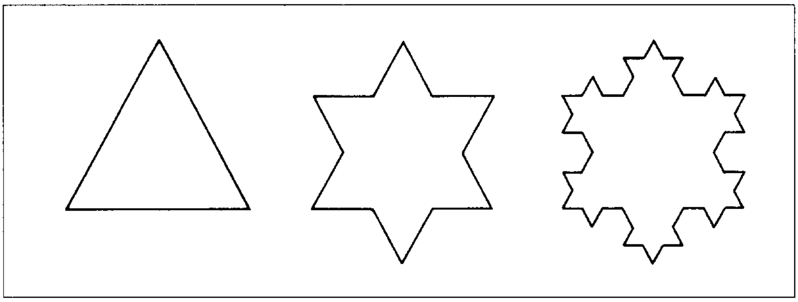

그림 2. Koch 곡선의 예 2 (Mandelbrot, 1983)

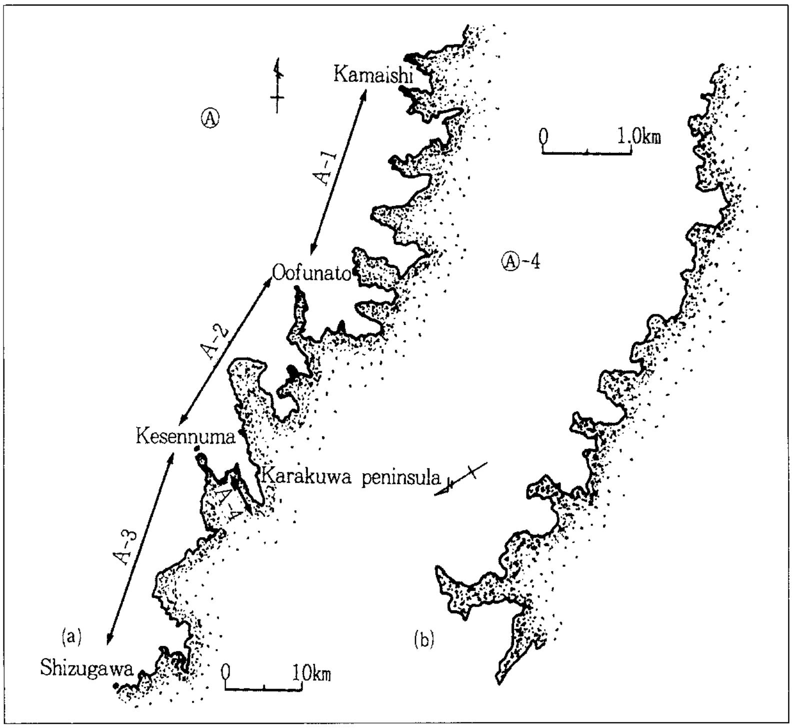

그림 3. 일본 해안선의 상사성(Rodriguez-Iturbe와 Rinaldo, 1997)
(a) :일본 북부의 리아시스식 해안선, (b) :A-4 부분의 확대

모양의 나머지 9개의 꼭지점들도 그 위치가 변하지 않았으며, 각각의 부분들은 처음의 정삼각형 형태를 그대로 유지하고 있다.

그림 3은 또 다른 프랙탈의 실제적인 예를 보여주는 것으로 (a)는 일본 북부의 리아스식 해안선이다. 여기서 (b)는 해안선의 작은 일부분을 크게 확대한 것인데 그 형태가 놀랄 정도로 닮은 것을 확인 할 수 있다 (Rodriguez-Iturbe와 Rinaldo, 1997).

일반적으로 프랙탈의 특성에 대해서 설명하고자 할 때 가장 이해가 쉬운 것은 해안선의 길이를 예로 들 수 있는데, 해안선의 길이를 양끝에서 잡아 늘였다고 생각할 때 해안선의 길이는 적어도 양단을 직선으로 연결한 길이와 같거나 길다고 할 수 있다.

곡선의 길이는 단위길이가 r인 직선자를 이용하여 근사적으로 측정할 수 있다. 이 때 곡선의 측정길이는 $L(r)=Nr$로 나타낼 수 있으며, N은 측정 횟수를 나타낸다. 곡선의 만곡도가 심할수록 길이를 정확하게 측정하기 위해서는 단위길이 r이 작은 자를 이용하여

야 하며, 식 (1)과 같이 r이 0에 접근할수록 정확한 길이 L을 측정할 수 있다.

$$L = \lim_{r \to 0} L(r) = \lim_{r \to 0} Nr \tag{1}$$

Richardson(1961)은 해안선의 길이에 대한 연구에서 위의 극한값은 종종 존재하지 않는다고 하였다. 그 이유는 r이 0으로 접근할 때 무한히 많은 작은 조각들로 구성되므로 Nr 값이 발산하기 때문이다. 그런데, 어떤 특정한 지수 ($D>1$)에 대해서는 Nr^D이 일정한 값을 갖는다는 것이다. 여기서 L이 발산하지도 않고 0으로 수렴하지도 않으며 어떤 상수값을 갖도록 하는 경계가 되는 D가 존재하게 된다면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\lim_{r \to 0} N(r)\ r^D = \text{constant} \tag{2}$$

여기서, $N(r)$은 단위자의 길이인 r에 따른 측정 횟수를 나타내는 것으로 N과 동일하다. 식 (2)는 r이 작은 경우에 다음과 같은 식이 성립한다는 것을 의미한다.

$$N(r) \propto r^{-D} \quad \text{또는} \quad L(r) \propto r^{1-D} \tag{3}$$

여기서 나타나는 지수 D는 프랙탈 차원의 가장 일반적인 정의이다. 이 프랙탈 차원 D는 Hausdorff 차원(D_H)이라고도 하는데, 일반적으로 프랙탈 차원과 Hausdorff 차원을 동일하게 사용할 수 있다. 식 (3)은 측정자의 단위길이 r을 이용하여 측정한 길이와, 자의 단위길이를 전대수지상에 도시하여 구할 수 있는 관계이며, 이 때 프랙탈 차원은 "1 — 기울기" 이다.

이와 마찬가지 개념으로 지형도를 이용하여 해안선의 길이를 측정하고자 할 때, 이용하는 지형도의 축척에 따라 그 결과는 매우 다르게 나타날 수 있다. 다시 말해서 지형도의 축척이 커질수록 소축척 지형도에는 나타나지 않는 좁은 만이나 협곡 등이 자세하게 표시되므로 측정되는 길이가 길어지게 된다.

그림 4는 Richardson(1961)이 각 면의 길이(side length)가 일정한 다각형으로 이루어진 구장기를 이용하여 해안선의 길이를 측정할 때 다각형의 길이에 따른 측정 결과를 비교한 것이다. 해안선의 길이를 측정한 경우 측정 길이는 대체적으로 안정적이지 않고, 구

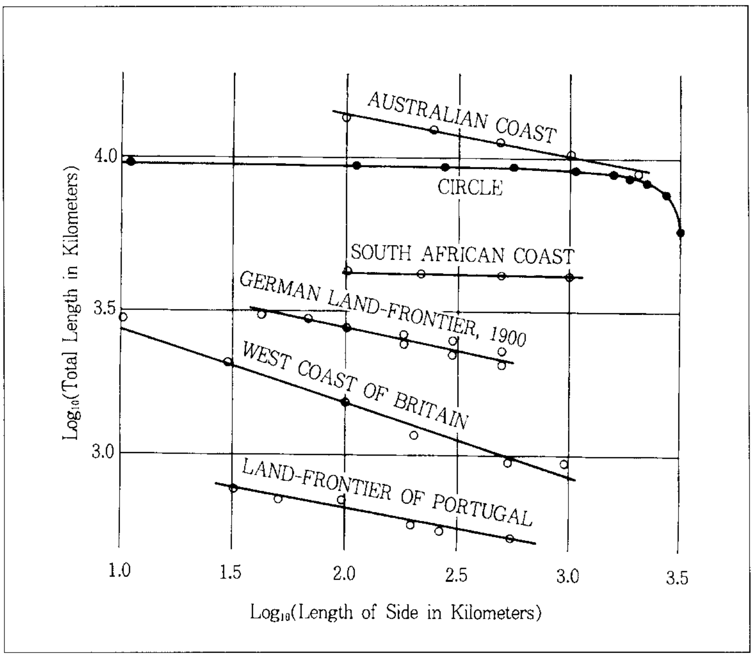

그림 4. 측정자의 크기에 따른 해안선의 길이 (Mandelbrot, 1983)

장기 다각형의 길이가 0에 접근할수록 대수지 상에서 그 길이가 약 2배가 되는 것을 볼 수 있으며, 전체적으로 일정한 경향의 기울기를 갖는 것으로 나타났다.

당시 Richardson은 이 관계에 대한 이론적인 해석은 실시하지 않고, 단지 각각의 기울기에 대한 경향을 제시하였을 뿐이었다. 그는 측정길이 $L(r)$과 측정자의 단위길이 r 사이에는 식 (4)와 같은 관계가 있다고 하였다.

$$L(r) = F\, r^{1-D} \tag{4}$$

그러나, Mandelbrot(1983)는 해안선의 길이를 프랙탈이라 하고, 그림 4에서 직선의 기울기를 "$1-D$"라고 하였다. 여기서, F는 상수이고 D는 해안선의 프랙탈 차원을 의미한다.

해안선과 마찬가지로 하천에서도 지형도의 축척에 따라서 하천의 굴곡을 고려하여 길이를 측정할 수 있으므로 하천 길이에 대한 프랙탈 차원도 동일한 방법으로 구할 수 있다.

프랙탈 차원 D는 다음과 같이 측정자의 길이와 측정자로 인해 나누어지는 조각의 개수와의 관계를 이용하여 구할 수 있다(Mandelbrot, 1983).

$$D = \lim_{r \to 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \tag{5}$$

그림 1의 Koch 곡선에서 $r = (1/3)^n$ 이며 조각의 개수 $N = 4^n$ 이므로 프랙탈 차원은 식 (6)과 같다.

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619 \tag{6}$$

평면상에서 선의 유클리디안 차원은 1.0이고, 면적의 차원은 2.0이다. 그러나, 식 (6)에서 보듯이 선으로 나타내지는 Koch 곡선의 프랙탈 차원은 1.2619이며, 이처럼 프랙탈 차원이 정수가 아니라는 것은 프랙탈의 전형적인 특성이다. Mandelbrot가 처음으로 사용한 프랙탈이란 용어는 대상물의 기하학적인 구조를 반영하는 것으로, 해상도를 크게 하여 관찰하면 자기상사성을 가진 작은 요소들의 조각들이라고 할 수 있다.

프랙탈의 또 다른 특성으로 자기유사성(self-affinity)을 들 수 있는데, 자기상사성과 자기유사성의 차이는 프랙탈 특성을 가지고 있는 형상이 등방성(isotropic) 또는 이방성(anisotropic)의 상사성을 가지고 있는 것에 따르는 것이다. 예를 들어서 산맥을 우주에서 내려다 본다면 평평하게 나타나지만, 가까이서 우리의 시각으로 본다면 산봉우리의 높고 낮음을 분별할 수 있을 것이다. 산맥의 형상을 재현하고자 할 때 횡축과 종축의 축척을 달리하여 확대한다면 그 모양들을 동일하게 재현할 수 있을 것이다. 따라서 자기상사성의 축척은 하나의 수로 나타낼 수 있지만, 이방성의 축척이 필요한 자기유사성의 특성을 가지고 있는 대상은 둘 또는 그 이상의 축척을 이용하여 해석하여야 한다.

3. 하천의 지형특성과 프랙탈

하천 유역은 하도와 그 주위의 사면으로 나눌 수 있으며, 하천은 유역 출구로 흘러 내려가고, 주하천 주위의 작은 지천들로 이루어진 나뭇가지와 같은 형태로 발달되어 있다.

이러한 하도망은 일정한 규칙을 이루면서 구성되어 있는데 하천의 형상을 비롯한 하도망의 구성은 프랙탈 차원을 가지고 있는 프랙탈 현상으로 해석할 수 있다. 이는 프랙탈 기하학이 자기상사성을 가지고 있는 하천의 지형학적인 특성뿐만 아니라, 불규칙적이고 복잡한 자연 현상을 수학적으로 나타낼 수 있는 방법을 제시해 줄 수 있기 때문이다.

하천 유역은 등고선을 이용하여 분할할 수 있다. 여기서 지형도를 이용하여 구분한 하천 유역의 등고선은 앞에서 언급한 해안선의 특성과 매우 유사하다고 할 수 있다. 예로 댐에서 수역의 경계는 해안선과 같다고 생각할 수 있으며, 이러한 상사성을 고려할 때 등고선도 프랙탈 차원의 항으로 그 특성을 나타낼 수 있는 자기상사성이 있는 대상이라는 것도 타당성이 있다.

그림 5의 각기 다른 고도의 등고선을 대상으로 프랙탈 차원을 산정한 결과를 보면 등고선들은 일정한 프랙탈 차원을 이용해서 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

유역의 구조가 독특한 지역을 제외하고는, 수계가 다르다 하여도 일반적으로 유출 특성을 비롯한 하천이 갖는 전반적인 특성이 비슷한 경우가 많다.

4. 프랙탈과 수문지형법칙

자연 하천 유역의 구성과 하도망의 형태는 Horton의 차수법칙을 이용하여 정량적으로 나타낼 수 있는데, 이는 하천 차수에 의해서 하도를 분류하여 하도의 개수, 하도 길이 및 유역면적 등의 관계를 규정한 것으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

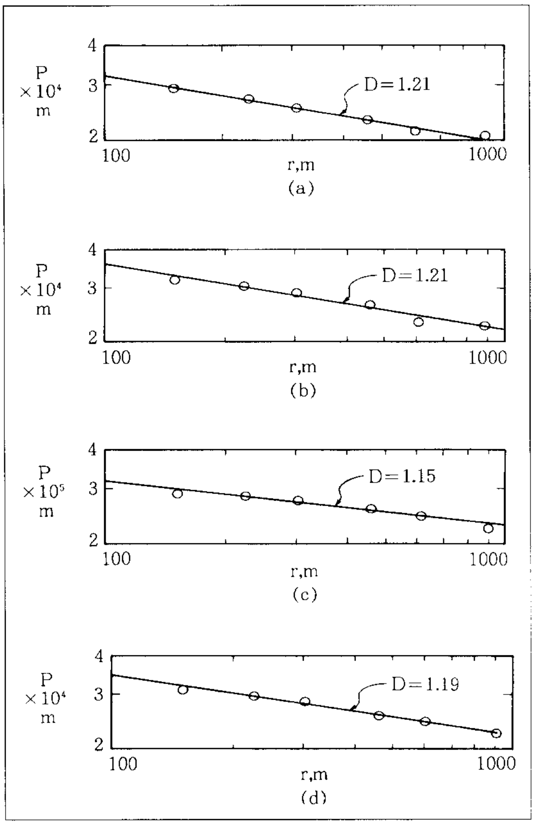

그림 5. 고도별 등고선의 프랙탈차원 (Rodriguez-Iturbe와 Rinaldo, 1997)
(a) 미국 캘리포니아 Cobblestone산, 고도 3,000ft
(b) 미국 워싱톤 Cascade산, 고도 5,400ft
(c) 미국 콜로라도 Rocky산, 고도 10,000ft
(d) 미국 뉴욕 Adirondack산, 고도 1,000ft

◦ 하천 분기비 $$R_B = \frac{N_{\omega-1}}{N_\omega} \tag{7}$$

◦ 하천 길이비 $$R_L = \frac{\overline{L_\omega}}{\overline{L_{\omega-1}}} \tag{8}$$

◦ 하천 면적비 $$R_A = \frac{\overline{A_\omega}}{\overline{A_{\omega-1}}} \tag{9}$$

여기서, N_ω는 차수가 ω인 하천의 갯수이고, $\overline{L_\omega}$는 차수가 ω인 하천의 평균길이이며, $\overline{A_\omega}$는 차수가 ω인 하천의 평균유역면적이다.

하천에서 유로연장과 유역면적의 관계는 매우 중요한 지형학적 인자 중의 하나로 일반적으로 식 (10)과 같이 나타낸다. Mesa와 Gupta(1987)는 하도 링크의 길이가 지수 확률 분포를 따르는 무작위(random)모형이라고 하여 이와 같은 관계를 해석적으로 나타낸 바가 있다.

$$L = kA^a \tag{10}$$

여기서, L은 본류 유로연장, A는 유역면적, k와 a는 상수이다.

하천의 길이가 프랙탈이라고 제안한 Mandelbrot (1983)는 $a > 0.5$ 라는 가정하에 하천 길이의 프랙탈 차원(d)을 $d = 2a$인 프랙탈로 볼 수 있다고 하였으며, Gray(1961)가 제시한 지수 0.568을 약 0.6으로 간주하고 하천 길이의 프랙탈 차원을 1.2라고 하였다. Mandelbrot는 이와 같이 유로연장과 유역면적의 관계를 이용하여 프랙탈 차원을 구하는 방법을 식 (11)과 같이 제안하였다. 이러한 결과는 모든 하천과 그 유역은 서로 상사성이 있다는 가정하에서 도출된 것이다.

$$L = k A^{\frac{d}{2}} \tag{11}$$

여기서, L은 본류 유로연장, A는 유역면적, k는 상수, d는 하천 길이의 프랙탈 차원이다.

Hjelmfelt(1988)는 미국 미조리주의 8개 하천을 대상으로 하천 길이를 측정하여 하천 길이의 프랙탈 차원이 1.136이라는 Mandelbrot(1983)의 가설을 증명한 바 있다. 그는 하천 길이의 프랙탈 차원은 1.036~1.291의 범위에 있으며 평균값은 1.158이라고 하였는데, 이 수치는 Mandelbrot(1983)가 제안한 1.136과 거의 일치하는 값이다.

유역에 적용되는 프랙탈 분석은 하도와 전체 하도망에 대하여 따로 적용하는 것이 일반적이다. 하도에 적용하는 분석은 하도의 굴곡 정도를 조사하는 것이며, 전체 하도망에 적용하는 분석은 유역내 하도망의 분기 특성을 파악하는 것이다.

GIUH 모형에 이용되는 Horton의 차수비는 프랙탈 분석을 통해서 연관지을 수 있다. Feder(1988)는 하천 길이의 프랙탈 차원을 식 (12)와 같이 Horton의 길이비와 분기비를 이용하여 구하였다.

$$d = 2\,\frac{\log R_L}{\log R_B} \tag{12}$$

또한, Horton의 지형법칙에 의거하여 La Barbera

와 Rosso(1987; 1989)는 하도망의 프랙탈 차원을 식 (13) 및 식 (14)와 같이 분기비와 길이비의 함수로 나타냈다.

$$D = \frac{\log R_B}{\log R_L}, \quad R_B > R_L \tag{13}$$

$$D = 1, \quad R_B < R_L \tag{14}$$

따라서, 하도망의 프랙탈 차원은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D = \min\ [2,\ \max[1,\ \log R_B / \log R_L]] \tag{15}$$

Nikora(1994)에 의하면, 그는 많은 하천을 대상으로 분석하여 식 (15)를 증명하였다고 하였으며, 자연하천을 대상으로 조사된 R_B와 R_L의 범위에 대해서 식 (15)를 이용하여 하도망의 프랙탈 차원을 1.0부터 2.0까지 산정하였다. 그의 결과에 따르면 하도망의 프랙탈 차원 D는 일반적으로 1.5~2.0 범위에 분포하며, 그 평균값은 약 1.67이다.

유역내 하천의 총 길이 Z와 유역면적 A와의 관계는 일반적으로 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$Z = k A^b \tag{16}$$

여기서, k와 b는 상수인데, Gregory와 Walling(1973)은 실측자료를 대상으로 분석하여 b값은 지역에 따라서 0.5~1.0 범위에서 변화하며 평균값은 0.83이라 하였다. Mandelbrot(1983)는 하천 길이는 유역면적의 $D/2$승에 비례한다고 하였으므로 $b = D/2$가 되며, 식 (16)은 다음과 같이 하도망의 프랙탈 차원을 이용하여 나타낼 수 있다.

$$Z = k A^{\frac{D}{2}} \tag{17}$$

따라서, 하도망의 전형적인 프랙탈 차원은 1.6~1.7 정도라 할 수 있다. Nikora(1994)에 의하면, 이 값은 그가 실제 하천을 대상으로 분석한 하도망 프랙탈 차원의 평균값인 1.67과 같은 값이라고 할 수 있으므로, Mandelbrot(1983)의 가정이 실제로 타당함을 보여준다. 자연적인 하천 유역의 하도망에서 하천들이 전체 유역을 덮지 않는 이상 프랙탈 차원은 2.0보다 작다.

또한, 유역내 하천의 총 길이와 유역면적의 비로 정의되는 배수밀도(D_d)는 유역면적의 $(D/2-1)$승에 비례하여 감소하며, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$D_d \sim A^{\frac{D}{2}-1} \tag{18}$$

Taborton 등(1990)은 Feder(1988) 및 La Barbera와 Rosso (1989)가 제시한 식 (12)와 식 (15)의 관계를 이용하여 개별 하도망의 분기 특성이 Horton의 지형법칙과 관련이 있음을 보이고, 하도망의 프랙탈 차원(D)과 하천 길이의 프랙탈 차원(d)과의 관계를 식 (19)와 같이 제시하였다.

$$\frac{D}{d} = \frac{\log R_B}{\log R_L} \tag{19}$$

또한, La Babera와 Rosso(1990)는 하도망의 프랙탈 차원 산정에 대하여 식 (20)을 제안하였다.

$$D = \frac{1}{2-d}\frac{\log R_B}{\log R_L} \tag{20}$$

그러나, 일반적으로 실제 자연 하천에서 하천 길이의 프랙탈 차원이 갖는 값을 약 1.2(Mandelbrot, 1983)라 할 경우, 식 (19)와 식 (20)은 매우 근사한 결과를 나타낸다고 볼 수 있다. 따라서, 식 (19)와 식 (20)은 하도망의 프랙탈 현상을 적정하게 나타낸다고 할 수 있으며, 여기서 식 (19)를 이용할 경우 식 (15)는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$D = \min[2,\ \max[1, d\ \frac{\log R_B}{\log R_L}]] \tag{21}$$

Rosso 등(1991)은 식 (22)와 같이 하천 길이의 프랙탈 차원은 유역의 하천 길이비와 면적비의 함수로 나타낼 수 있다고 하였으며, 지형도를 분석하여 구한 하천 길이의 프랙탈 차원과 비교하여 공식의 적합성을 증명하였다. 또한, 하도망의 프랙탈 차원을 식 (23)과 같이 분기비와 면적비의 함수로 나타내었다.

$$d = \max[1,\ 2\ \frac{\log R_L}{\log R_A}] \tag{22}$$

$$D = \min[2,\ 2\ \frac{\log R_B}{\log R_A}] \tag{23}$$

기존 발표된 하천 길이의 프랙탈 차원과 하도망의

표 1. 하도망과 하천 길이의 프랙탈 차원 산정 공식

프랙탈 차원	프랙탈 공식	연 구 자
하도망 프랙탈 차원 (D)	$\min[2, \max(1, \log R_B/\log R_L)]$	La Barbera와 Rosso(1987)
	$d\ \log R_B/\log R_L$	Tarboton 등 (1990)
	$\frac{1}{2-d}(\log R_B/\log R_L)$	La Barbera와 Rosso(1990)
	$\min[2,\ 2\log R_B/\log R_A]$	Rosso 등 (1991)
하천길이 프랙탈 차원 (d)	$2\log R_L/\log R_B$	Feder (1988)
	$\max[1, 2\log R_L/\log R_A]$	Rosso 등 (1991)

프랙탈 차원을 구하는 공식들을 정리하면 표 1과 같다.

표 1과 같이 연구자들에 따라서 하천 길이의 프랙탈 차원과 하도망의 프랙탈 차원이 각기 다른 형태로 나타나는 것은 Horton의 차수비를 수학적으로 전개하는 방법의 차이에서 오는 것이라 할 수 있다.

Tarboton 등(1990)이 제시한 하도망과 하천 길이의 프랙탈 차원을 Horton의 차수비로 표현한 식 (19)를 $R_B \geq R_L$ 인 범위에 대해서 다시 정리하면 식 (26)과 같이 분기비와 길이비는 서로 하도망과 하천 길이의 프랙탈 차원을 이용하여 나타낼 수 있다. 즉, 하도망과 하천 길이의 프랙탈 차원은 길이비와 분기비로 결정될 수 있으며, 이것으로 하천에서 프랙탈 차원은 유역면적에 대해서는 독립적이라는 것을 알 수 있다. 또한, 동일한 방법으로 길이비와 면적비의 관계를 하천 길이의 프랙탈 차원을 이용해서 식 (27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_B = R_L^{D/d} \tag{26}$$

$$R_L = R_A^{d/2} \tag{27}$$

여기서, 식 (26)과 식 (27)을 결합하면 식 (28)과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_B = R_A^{D/2} \qquad (R_A \geq R_B \geq R_L) \tag{28}$$

위의 식 (26)~식 (28)은 면적비와 길이비, 분기비의 복합적인 관계가 하도망의 규모 특성(scaling property)에 따른 상사성의 특성을 나타내고 있음을 보여주고 있는 것으로, 하도망과 하천 길이의 프랙탈 특성은 유역이 Horton의 차수법칙을 따르는 경우 이를 이용하여 나타낼 수 있다.

5. 프랙탈 GIUH 모형의 유도

GIUH 모형이란 강우-유출 과정의 물리적인 특성에 영향을 미치는 유역의 지형학적 특성과 수문학적 응답을 접목시킨 모형으로, 규칙성을 가지고 있는 유역의 하천 및 하도망의 구조적인 특성을 잘 나타내는 Horton의 차수법칙을 이용하여 IUH를 유도하는 것이다.

5.1 GIUH 모형의 개요

Rodriguez-Iturbe 등(1979)은 Markov-Process를 기본 형태로 하여 유역의 수문학적 응답인 IUH와 지형학적 특성을 결합시켰으며, 유역에 내린 강우 입자들의 유역 출구에서의 도달시간 분포를 추계학적으로 정의하여 GIUH를 제안하였다.

GIUH는 하도망에서 강우 입자의 움직임을 시·공간적으로 해석함으로써 구할 수 있으며, 차수가 Ω 인 하천 유역에서, Rodriguez-Iturbe와 Valdes(1979)의 GIUH는 식 (29)와 같이 유도된다.

$$g(t) = (a_\Omega t + b_\Omega)\ \exp(-2vL_\Omega^{-1}\ t) + \sum_{i=1}^{\Omega-1} b_i \exp(-2vL_\Omega^{-1} t\ R_L^{\Omega-1}) \tag{29}$$

여기서 g : GIUH
v : 평균 유속
L_Ω: 최고차수 하천의 평균 길이
a_Ω : R_A, R_B, R_L, λ_i (평균대기시간)의 함수
b_Ω : R_A, R_B, R_L, λ_i 의 함수
R_L : 길이비

Rodriguez-Iturbe와 Valdes(1979)는 3차 하천에서 $i=1, \cdots, \Omega$에 대해서 a_Ω와 b_i를 산정하는 공식들을 제시한 바 있으며, 이러한 관계를 이용하면 임의의 차수 유역에 대한 GIUH를 산정할 수도 있다. 그러나, 식 (29)는 형태가 복잡하여 적용하기에 어려운 점이 많이 있다. 그래서 회귀분석을 통해서 GIUH의 첨두치인 q_p 및 첨두도달시간 t_p와 Horton의 차수비인 R_A, R_B, R_L 및 유속(v)과 유로연장(L)과의 관계를 구하여 GIUH의 첨두유량과 첨두도달시간을 식 (30) 및 식 (31)과 같이 Horton의 지형법칙에 따른 지형인자와 유출속도의 함수로 나타냈으며, 식 (30)과 식 (31)을 곱하여 유역의 지형학적인 특성만의 함수로 이루어진 식 (32)와 같은 무차원 식으로 나타내었다(Rodriguez-Iturbe와 Valdes, 1979).

$$q_p = 0.364\ R_L^{0.43}\ v\ L_\Omega^{-1} \tag{30}$$

$$t_p = 1.584(R_B/R_A)^{0.55}\ R_L^{-0.38}\ v^{-1} L_\Omega \tag{31}$$

$$G_* = q_p t_p = 0.58(R_B/R_A)^{0.55}\ R_L^{0.05} \tag{32}$$

여기서 G_* : 무차원 GIUH

q_p : GIUH의 첨두유량

t_p : GIUH의 첨두발생시간

R_A, R_B, R_L : Horton의 차수비(면적비, 분기비, 길이비)

v : 평균 유속

L_Ω : 최고차 하천의 유로연장

5.2 GIUH-Nash 모형

전 유역에 걸쳐서 고르게 내리는 유효강우로 인한 유역 출구에서의 직접유출을 나타내는 IUH의 고전적인 이론은 "집중형 매개변수 모형, 선형 모형, 시불변 모형"과 같은 3가지의 기본적인 가정에 기초를 두고 있다. 일반적으로 IUH에 대해서 보편적이고 널리 이용되는 해석적인 형태는 식 (33)과 같이 2변수 Gamma 분포형 함수로서 유역이 N개의 선형저수지로 직렬 연결되어 있다고 가정한 Nash(1957)의 모형이다.

$$h(t) = \frac{1}{K\,\Gamma(N)} \left(\frac{t}{K}\right)^{N-1} e^{-\frac{t}{K}} \tag{33}$$

여기서 사용된 변수의 정의는 다음과 같다.

$h(\cdot)$: IUH의 종거(T^{-1})

$\Gamma(\cdot)$: Gamma 함수

N : 저수지 개수

K : 저수지 상수

Nash 모형의 매개변수인 N과 K값은 IUH의 원점($t=0$)에 대한 1차 모멘트 m_1과 2차 모멘트 m_2에 의해서 나타낼 수 있다.

$$m_1 = NK \tag{34}$$

$$m_2 = N(N+1)K^2 \tag{35}$$

Nash(1960)는 자신의 모형을 미계측 유역에 적용할 수 있도록 하기 위해서 영국의 90개 유역에 대한 자료를 분석하여 매개변수 N, K값이 유역면적, 경사, 길이 등과 밀접한 관계가 있음을 밝히고, IUH의 무차원 1차 모멘트 m_1과 무차원 2차 모멘트 m_2와의 관계를 다음 식과 같이 제시한 바가 있다.

$$m_1 = NK \tag{36}$$

$$m_2 = \frac{1}{N} \tag{37}$$

또한, m_1과 m_2를 유역의 지형학적 특성과 연관시켜 다음과 같은 관계를 도출하였다.

$$m_1 = 27.6\ A^{0.3}\ S_0^{-0.1} \tag{38}$$

$$m_2 = 0.41\ L^{-0.1} \tag{39}$$

여기서, S_0는 격자평균법으로 계산한 유역경사(1/10,000을 1로 한다), A는 유역면적 (mi^2), L은 유로연장 (mile)을 나타낸다.

Rosso(1984)는 Nash 모형에서 IUH의 첨두치와 첨두 발생시간의 무차원 곱(H_*)을 식 (40)와 같이 Nash 모형의 형상계수만으로 나타냈다.

$$H_* = (N-1)^N \exp(1-N)/\Gamma(N) \tag{40}$$

위의 식을 식 (32)와 연계하여 $H_* = G_*$ 라고 가정하면 식 (41)과 같은 형태가 된다.

$$(N-1)^N \exp(1-N)/\Gamma(N) = 0.58(R_B/R_A)^{0.55} R_L^{0.55} \quad (41)$$

식 (41)에서 독립변수 N과 종속변수 R_A, R_B, R_L의 관계는 다중회귀분석을 이용하여 식 (42)와 같이 구할 수 있으며, K에 대해서도 같은 방법으로 식 (43)과 같이 구할 수 있다.

여기서, Horton 차수비는 각각 $2.5 \le R_A \le 5.0$, $3.0 \le R_B \le 6.0$, $1.5 \le R_L \le 4.1$ 범위이며, 이 수치들은 일반적으로 자연하천에서 나타나는 값들이다 (Rosso, 1984).

$$N = 3.29\ (R_B/R_A)^{0.78}\ R_L^{0.07} \quad (42)$$

$$K = 0.70\ [R_A/(R_B R_L)]^{0.48}\ v^{-1}\ L_\Omega \quad (43)$$

여기서 N : Rosso에 의한 Nash 모형의 형상계수
K : Rosso에 의한 Nash 모형의 규모계수
R_A, R_B, R_L : Horton의 차수비
v : 유속
L_Ω : 최고차 하천의 유로연장

Nash 모형은 강우-유출의 역학적인 관계는 선형이고 시간불변이며, 각기 사상이 다른 호우에 대해서 유속이 일정하다는 기본 가정 하에 유도된 것이다. 그러나, IUH는 각기 다른 호우사상에 대해서 시간에 따라 변하는 특성을 가지고 있으므로, 이를 설명하는 주 변수로는 유효우량의 강도에 따라서 시간과 공간적으로 변하는 흐름의 유속이 적합하다. 따라서 식 (42)와 식 (43)의 형태는 Horton의 차수비와 지형인자인 유로연장과 동수역학적 변수인 유속의 항을 도입한 것으로 강우-유출의 동적인 현상을 고려했다고 할 수 있으며, 위와 같은 Rosso 모형은 시간에 따라 불변이고 선형이라는 가정을 신축적으로 적용할 수 있도록 하였다.

5.3 프랙탈 GIUH 모형의 배경

본 연구에서 제안하는 하천의 프랙탈 특성을 고려한 GIUH 모형은 유역의 IUH를 Gamma 분포 함수의 형태로 표현하는 기존 Nash 모형을 근간으로 하였다.

Rosso의 모형은 Horton의 차수법칙에 따른 면적비, 분기비, 길이비를 식 (42)와 식 (43)의 형태와 같이 매개변수 산정에 이용하고 있다. 그런데 이들 차수비는 각각 유역내 하천과 하도망의 구조적인 특성을 나타내는 것으로, 서로 상관성이 높기 때문에 다중공선성이 발생할 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 하천의 프랙탈 특성을 이용하여 Horton의 차수비를 프랙탈 차원의 함수로 유도하였으며, 그 결과를 GIUH 모형의 매개변수 산정시 이용할 수 있도록 하였다. 즉 유역의 자기상사성을 나타내는 하천과 하도망의 프랙탈 차원을 직접 수문 모형에 적용하여 GIUH 모형의 매개변수를 추정하였다.

5.4 프랙탈 GIUH 모형의 제시

Nash가 제안한 Gamma 분포 함수를 이용한 순간단위도는 앞에서 언급하였듯이 식 (33)과 같으며, Rosso(1984)는 Nash 모형의 형상계수와 규모계수를 Horton의 차수비와 홍수파의 유속, 유로연장 등을 이용하여 식 (42) 및 식 (43)과 같이 제시하였다.

여기서, Rosso가 제시한 N값은 지형 특성치인 Horton의 차수비만의 함수로 결정되며, 이는 한 유역에 대하여 일정한 값을 가지고 있음을 알 수 있다. 또한, K값은 지형 특성치와 더불어 동수역학적 인자인 유속으로 구성됨을 알 수 있다. 그런데, Rosso가 제시한 식 (42)와 식 (43)에 이용되는 R_A, R_B, R_L은 식 (26)~식 (28)과 같이 하천 길이 및 하도망의 프랙탈 차원과 연관지어 생각할 수 있다.

위의 관계를 이용하여 Rosso(1984)가 제안한 Nash 모형의 매개변수 N을 프랙탈 차원을 이용하여 분기비 및 길이비의 함수로 나타내면 식 (44) 및 식 (45)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N &= 3.29\ \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^{0.78}\ R_L^{\ 0.07} \\ &= 3.29\ \left(\frac{R_B}{R_B^{\frac{2}{D}}}\right)^{0.78} \left(R_B^{\frac{d}{D}}\right)^{0.07} \\ &= 3.29\ \left(R_B^{\ \frac{D-2}{D}}\right)^{0.78}\ R_B^{\ 0.07\frac{d}{D}} \quad (44) \\ &= 3.29\ R_B^{\ 0.78(\frac{D-2}{D}) + \frac{0.07d}{D}} \\ &= 3.29\ R_B^{\ \frac{1}{D}(0.78D + 0.07d - 1.56)} \end{aligned}$$

$$N = 3.29\left(\frac{R_B}{R_A}\right)^{0.78} R_L^{0.07}$$

$$= 3.29\left(\frac{R_L^{\frac{D}{d}}}{R_L^{\frac{2}{d}}}\right)^{0.78} R_L^{0.07} \tag{45}$$

$$= 3.29\left(R_L^{\frac{D-2}{d}}\right)^{0.78} R_L^{0.07}$$

$$= 3.29\ R_L^{\frac{0.78D+0.07d-1.56}{d}}$$

식 (44)와 식 (45)는 Rosso가 제안한 N값을 유역의 하도망 및 하천 길이의 프랙탈 차원과 분기비 및 길이비의 함수로 재구성한 것이다. 또한 식 (43)의 K도 분기비와 길이비의 함수로 유도하면 각각 식 (46) 및 식 (47)과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = 0.70\left(\frac{R_A}{R_B R_L}\right)^{0.48} v^{-1} L_\Omega$$

$$= 0.70\left(\frac{R_B^{\frac{2}{D}}}{R_B\, R_B^{\frac{d}{D}}}\right)^{0.48} v^{-1} L_\Omega \tag{46}$$

$$= 0.70\left(R_B^{\frac{2-D-d}{D}}\right)^{0.48} v^{-1} L_\Omega$$

$$K = 0.70\left(\frac{R_A}{R_B R_L}\right)^{0.48} v^{-1} L_\Omega$$

$$= 0.70\left(\frac{R_L^{\frac{2}{d}}}{R_L^{\frac{D}{d}}\, R_L}\right)^{0.48} v^{-1} L_\Omega \tag{47}$$

$$= 0.70\left(R_L^{\frac{2}{d}}\, R_L^{-\frac{D+d}{d}}\right)^{0.48} v^{-1} L_\Omega$$

$$= 0.70\left(R_L^{\frac{2-D-d}{d}}\right)^{0.48} v^{-1} L_\Omega$$

6. 결 론

Horton의 차수비를 이용하여 Rosso가 제안한 Nash 모형의 매개변수를 하천 길이와 하도망의 프랙탈 차원을 이용하여 길이비 또는 분기비만으로 제시하여, 매개변수 산정을 보다 간단하게 할 수 있도록 하였다. 이는 개개 지형인자 간에 존재하는 상호간의 복잡한 관계를 단일화시킨 것이며, 하천 길이와 하도망의 프랙탈 차원을 직접 강우-유출 모형의 매개변수로 활용한 것이다.

본 연구에서는 Horton 차수비들 상호간에 존재하는 상관성의 원인이 유역의 프랙탈 특성에 근거한 자기상사성이란 것을 보였으며, Rosso(1984)가 제안한 Nash 모형의 매개변수를 하천의 프랙탈 특성을 이용하여 산정할 수 있도록 하고, 이를 프랙탈 GIUH 모형이라 하였다.

프랙탈 GIUH 모형은 비교적 간단한 절차를 통해서 유도되었으나, 하천의 프랙탈 특성, 즉 하천 유역이 가지고 있는 자기상사성의 기준 지표라 할 수 있는 프랙탈 차원을 강우-유출 모형의 매개변수로 활용한다는 점에서 큰 의미가 있다고 할 수 있다.

참 고 문 헌

성기원 (1997). "수문지형특성 및 시간응답특성의 상사성을 이용한 Nash 모형의 해석." 한국수자원학회논문집, 한국수자원학회, 제30권, 제2호, pp. 97-106.

이상배 (1992). 수문학적 상사성을 고려한 순간단위도 유도에 관한 연구. 박사학위논문, 울산대학교.

조홍제, 이상배 (1990). "유역 응답의 수문학적 상사성해석에 관한 연구(I)." 한국수문학회지, 한국수문학회, 제23권, 제3호, pp. 421-434.

한국건설기술연구원 (1992). 수문모형 평가에 관한 연구, 건기연92-WR-111-1.

Feder, J. (1988). Fractals. Plenum, New York.

Gregory, K. J. and Walling, D. E. (1973). *Drainage basin form and process*. Edward Arnold, London.

Gupta, V. K., Waymire, E. and Rodriguez-Iturbe, I. (1986). "On scales, gravity and network structure in basin runoff." *Scale Problems in Hydrology*, Edited by Gupta, V. K., Rodriguez-Iturbe, I., Wood, E. F., and Dordrecht, D. R., pp. 159-184.

Hjelmfelt, A. T. (1988). "Fractals and river length-catchment area ratio." *Water Resources Research*, Vol. 24, No. 2, pp. 455-459.

Horton, R. E. (1945). "Erosional development of streams and their drainage basins: Hydrolophysical approach to quantitative morphology." *Geological Society of American Bulletin*, Vol. 56, pp. 275-370.

Kirkby, M. J. (1978). *Hillslope Hydrology.* Willey, New York.

La Barbera, P. and Rosso, R. (1987). "Fractal geometry of river networks." *EOS Trans.* American Geophysical Union, Vol. 68, No. 44, pp. 1276.

La Barbera, P. and Rosso, R. (1989). "On the fractal dimension of stream networks." *Water Resources Research*, Vol. 25, No. 4, pp. 735-741.

La Barbera, P. and Rosso, R. (1990). "Reply." *Water Resources Research*, Vol. 26, pp. 224-228.

Mandelbrot, B. B. (1983). *Fractals: Form, chance and dimension.* W. H. Freeman, New York.

Mesa, O. J. and Gupta, V. K. (1987). "On the main channel length-area relationship for channel networks." *Water Resources Research*, Vol. 23, No. 11, pp. 2119-2122.

Nash, J. E. (1957). "The form of the instantaneous unit hydrograph." *International Association of Science Hydrology*, Pub. 45, Vol. 3, pp. 114-121.

Nash, J. E. (1960) "A unit hydrograph study with particular reference to British catchments." *Proceedings of Institution of Civil Engineers*, Vol. 17, pp. 249-289.

Nikora, V. I. (1994). "On self-similarity and self-affinity of drainage basins." *Water Resources Research*, Vol. 30, No. 1, pp. 133-137.

Richardson, L. F. (1961). "The problem of contiguity, an appendix of statistics of deadly quarrels." *General Systems Yearbook 6.* pp. 139-187.

Rodriguez-Iturbe, I. and Valdes, J. B. (1979) "The geomorphologic structure of hydrologic response." *Water Resources Research*, Vol. 15, No. 6, pp. 1409-1420.

Rodriguez-Iturbe, I., Devoto, G. and Valdes, J. B. (1979). "Discharge response analysis and hydrologic similarity: The interrelation between the geomorphologic IUH and the storm characteristics." *Water Resources Research*, Vol. 15, No. 6, pp. 1435-1444.

Rodriguez-Iturbe, I. and Rinaldo, A. (1997). *Fractal River Basins (Chance and Self-Organization).* Cambridge University, Cambridge.

Rosso, R. (1984) "Nash model relation to Horton order ratios." *Water Resources Research*, Vol. 20, No. 7, pp. 914-920.

Rosso, R., Bacchi, B. and La Barbera, P. (1991). "Fractal relation of mainstream length to catchment area in river networks." *Water Resources Research*, Vol. 27, No. 3, pp. 381-387.

Tarboton, D. G., Bras, R. L. and Rodriguez-Iturbe, I. (1990). "Comment on 'On the fractal dimension of stream networks.' by La Barbera, P. and Rosso, R." *Water Resources Research*, Vol. 26. No. 9, pp. 2243-2244.

(논문번호:99-037 접수:1999.05.10/심사완료:1999.08.12)