

## 강소성 유한요소법에서 비압축성조건의 비교 연구

이상재\* · 조종래\*\* · 배원병\*\*\*

(1998년 7월 7일 접수)

# A Comparative Study of the Incompressibility Constraint on the Rigid Plastic Finite Element Method

Sang-Jae Lee, Jong-Rae Cho and Won-Byong Bae

### Abstract

The governing functional in plastic deformation has to satisfy the incompressibility constraint. This incompressibility constraint imposed on velocity fields can be removed by introducing either Lagrange multiplier or the penalty constant into the functional. In this study, two-dimensional rigid plastic FEM programs using these schemes were developed. These two programs and DEFORM were applied in a cylinder upsetting and a closed die forging to compare the values of load, local mean stress and volume loss. As the results, the program using Lagrange multiplier obtained a more exact and stable solution, but it took more computational time than the program using the penalty constant. Therefore, according to user's need, one of these two programs can be chosen to simulate a metal forming processes.

**Key Words** : Rigid-Plastic Finite Element Method, Incompressibility Constraint, Lagrange Multiplier, Penalty Constant, Forging

### 1. 서 론

소성가공(metal forming)은 소성변형과 탄성변형을 이용하여 소재의 손실을 최소화하면서 목적하는 형상으로 가공 성형하는 과정을 말하는 것인데, 그 중에서 단조는 가장 오래된 금속성형 방법중의 하나이며 금형 사이에 재료를 압축하여 성형하는 개방형 단조와 유동을 많이 구속하는 밀폐형 단조로 나뉜다. 냉간 단조는 재결정 온도 이하에서 가공하는 방법으로 주로 실온에서 가공하며 제품의 치수 정밀도가 높아 소재에 대한 마무리 공정으로 사용

하며, 또한 자동차, 기계 부품 등의 부속품과 같은 작고 정밀도를 요하는 생산품의 제작에 직접 사용된다. 이러한 단조공정 해석을 위한 수치적 방법 중에서 잘 알려진 방법으로는 균일변형에너지 방법, 슬랩법(slab method), 미끄럼 선장법, 하계해법, 상계요소법(upper bound element method)등<sup>(1,2)</sup>이 있다.

그러나 이러한 방법들은 어떤 제한된 범위에서만 해를 구할 수 있고 재료 내부와 표면의 국소적인 정보를 알 수 없는 것이 단점이다. 그래서 적용범위가 넓고, 특히 복잡한 경계와 성질이 다른 여러 재료를 다룰 수 있고 재료 내

\* 한국중공업(주) 터빈설계실  
\*\* 한국해양대학교 기계공학부  
\*\*\* 부산대학교 기계공학부, 정밀금형 및 금형가공 연구센터

부의 속도, 변형 형상, 응력과 변형률 분포, 온도, 접촉부의 압력 분포 등을 알 수 있기 때문에 강력한 수치해법으로 유한요소법(finite element method)이 널리 쓰이고 있다.

유한요소법을 이용한 금속성형 방법에는 탄소성해석, 강소성해석(rigid-plastic analysis), 유효 변형률속도를 고려하여 열간 가공 해석에 이용할 수 있는 점소성해석(viscoplastic analysis) 등이 있는데 탄소성 해법은 비교적 정확한 응력과 변형양상을 얻을 수 있지만 매 변형해석의 단계마다 요소가 항복상태에 도달하였는지 검사해야 하며 비정상상태의 문제 해석시 변형증분량을 한번에 많이 늘릴 수 없는 단점이 있다. 따라서 탄성변형량이 소성 변형량보다 무시 할 만큼 작은 단조나 압출 같은 소성문제에서는 강소성해법이 쓰인다. 이 방법은 벌크(bulk) 성형 해석에 있어서 해석의 정확도가 뛰어나고 계산효율이 우수한 것으로 알려져 있다.

강소성해법은 1973년 Lee<sup>(3)</sup>가 강소성 유한요소법의 기초를 마련한 후 금속성형 해석에 많이 적용되었다. 그리고 비압축성조건을 고려하는 방법으로 Lee<sup>(3)</sup>가 라그랑주 승수(Lagrange multiplier)를 도입하여 수식화를 하였으며, 1975년 Zienkiewicz<sup>(4)</sup>는 벌칙함수(penalty function)를 도입하였다. 그 후 S.N.Shah<sup>(5)</sup>와 C.C.Chen<sup>(6)</sup> 등이 볼트 헤드(bolt heading), 후방압출, 링압축, 평면변형도 형단조등을 해석하였다. 그리고 강체부분의 처리기법,<sup>(7,8)</sup> 마찰경계조건,<sup>(9,10)</sup> 초기 속도장 생성,<sup>(10)</sup> 가공경화조건을 고려하는 방법,<sup>(11)</sup> 과도한 변형에 적용하는 격자재구성방법<sup>(12-14)</sup> 등의 향상에 많은 발전을 하여왔다. 또한 유한요소방정식에 비압축성조건을 고려할 때 주로 라그랑주 승수와 벌칙함수를 이용하는 방법을 사용하는데, 이 두 방법을 명확하게 비교한 결과가 발표된 적이 없다. 벌칙함수를 사용하는 방법이 일반적으로 계산시간이 짧고 프로그램을 개발하는 데 편리하기 때문에 현재 대부분의 유한요소 프로그램에서는 이 방법을 채택하고 있는 실정이다.

본 논문에서는 이 두 가지 방법으로 프로그램을 작성하고, 소성가공 해석에 널리 이용되며 벌칙함수를 사용하는 상용 프로그램인 DEFORM으로 해석된 값을 비교하여, 정밀 밀폐형단조의 수치해석에서 정확한 변형양상 예측과 다이 접촉부의 압력값을 계산하는 방법을 찾고 공정에 따라서 적합한 해석 방법을 제시하는데 그 목적이 있다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 강소성 유한요소법의 비압축성 고려

체적이 V이고 표면 S로 둘러싸인 강-소성체에서 이 물체가 준정적상태에서 미소변형을 일으키고 관성의 효과와 체적력을 무시하고 지배방정식과 경계조건을 만족할 때 변분방정식은 식(1)과 같다.

$$\delta\pi = \int_V \bar{\sigma} \delta \dot{\epsilon} dV - \int_{S_f} T_i \delta v_i dS \quad (1)$$

여기서  $T_i$ 는 표면  $S_f$ 에서 정의되는 접촉력(traction)이고,  $\bar{\sigma}$ 과  $\dot{\epsilon}$ 는 유효 응력과 변형률 속도를 나타내며,  $\delta v_i$ 는 경계 조건을 만족하는 속도장에 대한 임의의 변분량이다. 변분 방정식(1)과 비압축성조건을 만족하는 속도장을 구하면 실제 해와 근사한 해가 된다.

유한요소 방정식에 비압축성조건을 고려하는데 있어서 주로 범함수에 라그랑주 승수나 벌칙함수를 도입함으로써 해결된다. 이렇게 하면 구속조건을 만족하는 속도장 중에서의 최소치문제가 구속 조건을 따로 만족하지 않아도 되는 정류치 문제(stationary value problem)로 바뀌게 되어 문제를 다루기 쉽게 된다.

식(1)을 각각 벌칙함수와 라그랑주 승수를 이용하여 수정하여보면 다음과 같다.

$$\delta\pi = \int_V \bar{\sigma} \delta \dot{\epsilon} dV + K \int_V \dot{\epsilon}_v \delta \dot{\epsilon}_v dV - \int_{S_f} T_i \delta v_i dS \quad (2a)$$

$$\delta\pi = \int_V \bar{\sigma} \delta \dot{\epsilon} dV + \int_V \lambda \delta \dot{\epsilon}_v dV + \int_V \dot{\epsilon}_v \delta \lambda dV - \int_{S_f} T_i \delta v_i dS \quad (2b)$$

$v_i$ 는 속도 경계조건은 만족하나 비압축성조건은 만족할 필요가 없는 임의의 속도장이고  $\lambda$ 는 라그랑주 승수이고 K는 벌칙상수이다. 식(2a)에서 각 항의 물리적인 의미는 첫 번째 항은 내부 변형 에너지, 두 번째항은 체적변화 에너지이고 세 번째 항은 외부 입력 에너지를 나타낸다. 식(2)에서 속도  $v_i$ 가 실제적인 속도와 일치할 때 라그랑주 승수와 벌칙상수에 대한 평균응력  $\sigma_m$ 의 관계가 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \lambda = \left( \frac{K}{2} \right) \dot{\epsilon}_v \quad (3)$$

라그랑주 승수를 이용한 방법은 부가적인 미지수  $\lambda$ 가 범함수에 더해져서 요소방정식에서 전체 유한요소 방정식의

로 강성행렬을 구성할 때 큰 밴드폭을 요구하므로 방정식을 푸는 데 많은 계산시간을 요구한다.

### 2.2 유한요소 분할화

식(2)는 전체 체적 V에서 성립한다. 그리고 이식은 평형방정식이 국부적으로도 만족해야 하기 때문에 전체 체적내 임의의 요소에 대해서도 만족해야 한다.

체적 V를 N개의 절점으로 이루어진 M개의 요소로 나누면 식(2)는 각각의 요소에 대해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta\pi^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon} dV + K \int_{V^{(m)}} \dot{\epsilon}_V \delta \dot{\epsilon}_V dV - \int_{S^{(m)}} T_i \delta v_i dS \quad (3a)$$

$$\delta\pi^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon} dV + \int_{V^{(m)}} \lambda \delta \dot{\epsilon}_V dV + \int_{V^{(m)}} \dot{\epsilon}_V \delta \lambda dV - \int_{S^{(m)}} T_i \delta v_i dS \quad (3b)$$

식(3a)는 절점의 속도  $V_\alpha$ 에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta\pi = \frac{\partial\pi}{\partial V_\alpha} \delta V_\alpha = 0 \quad (4)$$

식(4)는 임의의  $\delta V_\alpha$ 에 대해서 항상 성립하려면 다음 식이 만족되어야 한다.

$$\frac{\partial\pi}{\partial V_\alpha} = 0 \quad (5)$$

식(5)는 비선형 방정식이므로 테일러 급수전개로 선형화시켜 고차항은 무시하고 전개하여 결합하면 다음과 같은 행렬 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left[ \frac{\partial^2\pi}{\partial V_\alpha \partial V_\beta} \right]_{(n-1)} \{ \Delta V_\beta \}_{(n)} = - \left\{ \frac{\partial\pi}{\partial V_\alpha} \right\}_{(n-1)} \quad (6)$$

식(6)의 각 항은 다음과 같이 구성된다.

선형사각형 요소의 한 요소에 하나의 라그랑주 승수  $\lambda$ 가 할당된다. 그리고  $\lambda$ 는 독립변수이므로 식(3b)는 절점 속도  $V_\alpha$ 와  $\lambda$ 에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta\pi = \frac{\partial\pi}{\partial V_\alpha} \delta V_\alpha + \frac{\partial\pi}{\partial \lambda^{(\gamma)}} \delta \lambda^{(\gamma)} = 0 \quad (7)$$

식(7)이 임의의  $\delta V_\alpha$ 와  $\delta \lambda^{(\gamma)}$ 에 대해 항상 성립하려면 다음 조건을 동시에 만족하여야 한다.

$$\frac{\partial\pi}{\partial V_\alpha} = 0 \quad (8a)$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial \lambda^{(\gamma)}} = 0 \quad (8b)$$

식(8a)와 (8b)는 비선형 방정식이므로 고차항을 무시하고 전개하여 결합하면 다음과 같은 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\pi}{\partial V_\alpha \partial V_\beta} & \frac{\partial^2\pi}{\partial V_\alpha \partial \lambda^{(\delta)}} \\ \frac{\partial^2\pi}{\partial \lambda^{(\gamma)} \partial V_\beta} & \frac{\partial^2\pi}{\partial \lambda^{(\gamma)} \partial \lambda^{(\delta)}} \end{bmatrix}_{(n-1)} \begin{Bmatrix} \Delta V_\beta \\ \lambda^{(\delta)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial\pi}{\partial V_\alpha} \\ \frac{\partial\pi}{\partial \lambda^{(\gamma)}} \end{Bmatrix}_{(n-1)} \quad (9)$$

식(6)과 식(9)에서  $\Delta V_\beta$ 는 보통 가우스 소거법을 이용하여 구하며 n번째 반복 계산에서 수정된 속도장  $\Delta V_{(n)}$ 는 다음식에 의해 구해진다.

$$V_{(n)} = V_{(n-1)} + \beta \Delta V_{(n)} \quad (10)$$

여기서,  $\beta$ 는 해의 발산을 막기 위한 감속계수( $0 \leq \beta \leq 1$ )이다.

식(10)의 계산은 다음조건이 만족할 때까지 반복 수행된다.

$$\| \Delta V_{(n)} \| / \| V_{(n)} \| \leq \epsilon \quad (11)$$

여기서,  $\| \cdot \|$ 는 유클리디언 벡터 놈(Euclidean vector norm)이고  $\epsilon$ 는 매우 작은 상수이며 본 연구에서는  $1 \times 10^{-5}$ 으로 두었다.

### 3. 유한요소해석 및 비압축성조건의 비교

벌칙함수와 라그랑주 승수를 이용하여 개발된 프로그램을 가지고 일반 냉간 단조공정을 해석하는 예제로 가장 간단한 형태인 실린더 단순 업세팅과 강체영역이 많이 존재하는 밀폐형 단조공정에 적용하여 비교하였다.

### 3.1 실린더 업세팅

실린더 업세팅 해석의 초기 격자모양은 Fig.1과 같다. 좌우가 축대칭이고 상하 대칭이기 때문에 오른쪽 상단부 분만 해석하였다. 피성형체의 재료는 Al2024와 ANSI1015를 선정하고 크기가 높이 \* 지름이 20 \* 20(mm)인 모재에 적용하여 보았다. 프로그램의 수행조건은 Table 1에 나와있다. 유동응력식은 기존 논문<sup>(15,16)</sup>에서 나와있는 식을 이용하였다.

높이 감소율 80%까지 해석하였고(Fig.2) 해석된 결과 중 마찰계수  $m=0.15$ ,  $m=0.7$ 에 대하여 높이 감소율에 따른 하중의 변화, 국부적인 평균응력, 체적감소율을 데이터로 정리하여 그래프로 나타내 보았다(Fig.3~Fig.14). 또한 DEFORM과 벌칙함수와 라그랑즈 승수를 이용한 프로그램을 사용하여 결과를 비교하였다.

Fig.3은 Al2024에 대하여 위의 세 가지 방법으로 전산 모의해석하여 나온 높이 감소율에 따른 하중의 변화그래프이다. 세 가지 방법 모두 각각 마찰계수  $m=0.15$ 와  $m=0.7$ 에 대해서는 거의 같은 하중이 나옴을 알 수 있다. 역시 Fig.10에서 보는바와 같이 ANSI1015에 대해서도 같은 결과가 나옴을 알 수 있다.

Fig.4에서는 Al2024에 대하여 높이 감소율에 따른 국부 정수압응력을 나타내어 보았다. 여기서 국부적인 정수압응력은 실린더 상단 중앙부분 요소번호①에서 구한값이다(Fig.1). 여기서는 DEFORM( $K=10^6$ )과 라그랑즈 승수를 이용한 방법과 평균응력값이 비슷하게 나와 라그랑즈 승수를 이용한 방법은 값이 안정적으로 나옴을 알 수 있고, 벌칙함수를 이용한 방법으로 나온 평균값은 최종단

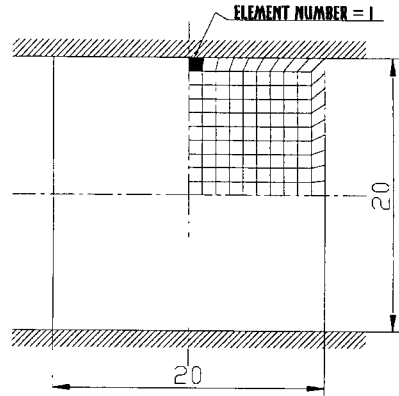


Fig. 1 Initial mesh in cylinder upsetting

계에서 과도한 값이 나옴을 알 수 있다. 80% 감소시에는 약 500MPa 값의 차이가 나고 있고 ANSI1015에서는 1000MPa 값의 차이가 남을 알 수 있다(Fig.11). 두가지 재료에서 비교해 본 결과 마찰과 재료의 유동응력과 압하율이 클수록 정수압 응력의 차이가 많이 남을 알 수 있었다.

또한 체적손실을 Fig.5에서 세 가지 방법으로 높이 감소율에 따라서 나타내어 보았다. 마찰에 따라서 체적손실이 달라짐을 알 수 있었다. 첫 시도에서 라그랑즈 승수를 이용한 방법이 벌칙함수를 이용한 방법보다 체적감소가 훨씬 적지만, 오히려 DEFORM의 결과 보다는 약간 크게 나타났다. 이것은 다이와 접촉부에서 절점과 다이표면과 접촉여부를 판별하는 과정에서 나타난 에러값이라 생각되

Table 1 Process conditions for FEM analysis of cylinder upsetting

|                      |  |            |
|----------------------|--|------------|
| workpiece material   | Al2024, ANSI1015   |            |
| flow stress          | $\bar{\sigma} = 293.853 \bar{\epsilon}^{0.2438} (MPa), \bar{\sigma} = 766.0464 \bar{\epsilon}^{0.156} (MPa)$ |            |
| process definition   | incremental  |            |
|                      | isothermal   |            |
|                      | axisymmetric   |            |
| iteration controls   | Newton-Raphson   |            |
| penalty constant     | $10^5, 10^6, 10^8, 10^{10}$  |            |
| die control          | punch speed  | 2 (mm/sec) |
| friction condition   | $m=0.15, m=0.7$  |            |
| simulation condition | step size  | 0.05, 0.01 |
|                      | total mesh number  | 99         |

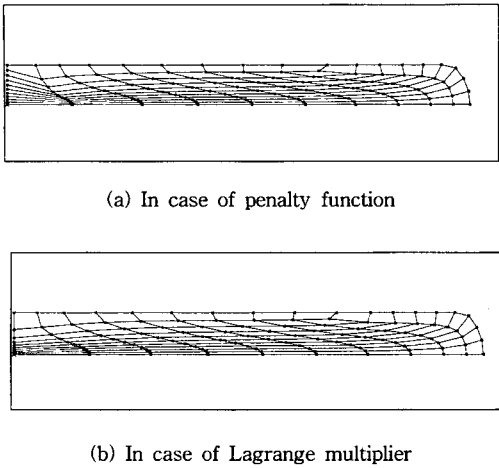


Fig. 2 Deformed mesh at 80% height reduction

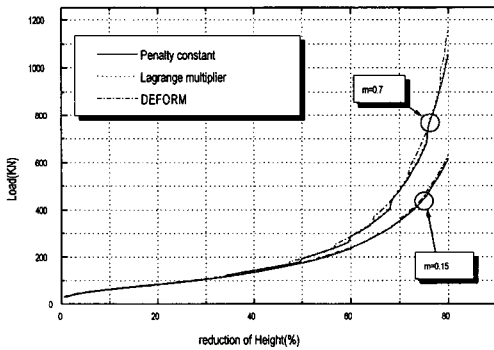


Fig. 3 The comparison of upsetting load versus height reduction for various methods (Al2024,  $m=0.15, 0.7$ )

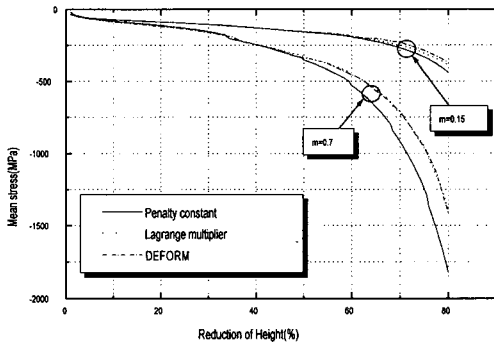


Fig. 4 The comparison of mean stress versus height reduction for various methods (Al2024,  $m=0.15, 0.7$ )

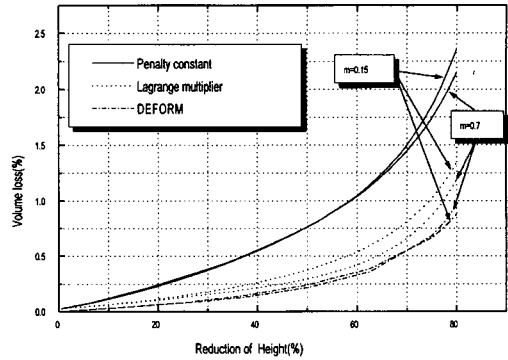


Fig. 5 The comparison of volume loss versus height reduction for various methods (Al2024,  $m=0.15, 0.7$ )

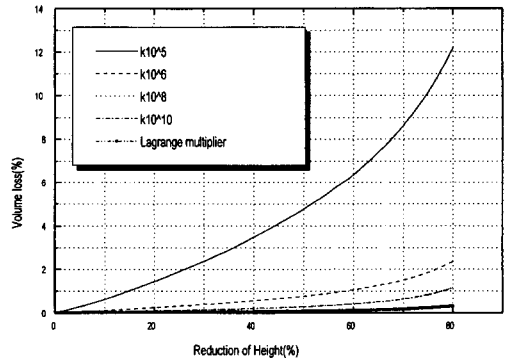


Fig. 6 The comparison of volume loss versus height reduction for various penalty constants  $K$  (Al2024,  $m=0.7$ )

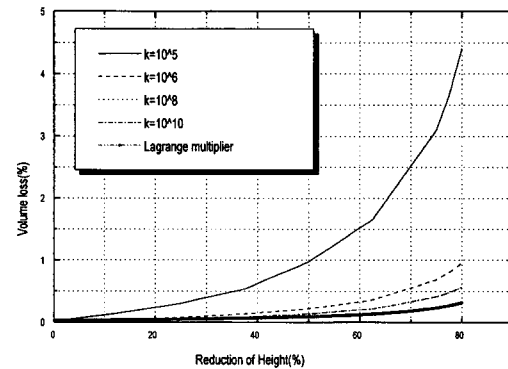


Fig. 7 The comparison of volume loss versus height reduction for various penalty constants  $K$  in DEFORM (Al2024,  $m=0.7$ )

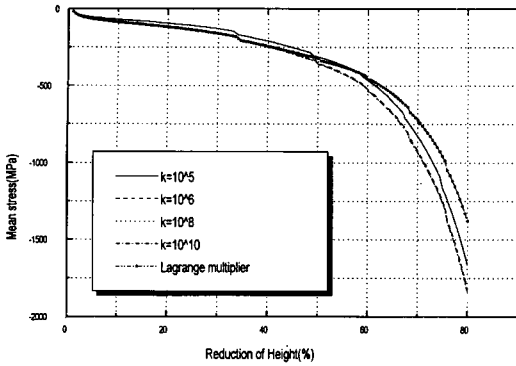


Fig. 8 The comparison of mean stress versus height reduction for various penalty constants K (Al2024, m=0.7)

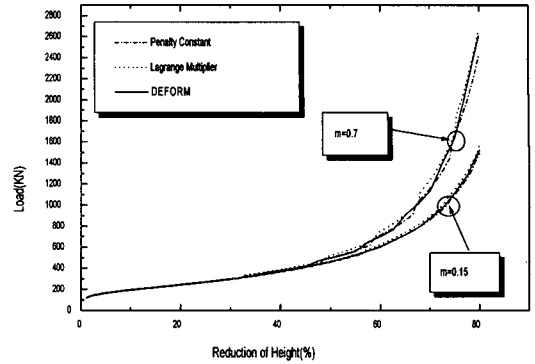


Fig. 10 The comparison of upsetting load versus height reduction for various methods (ANSI1015, m=0.15, 0.7)

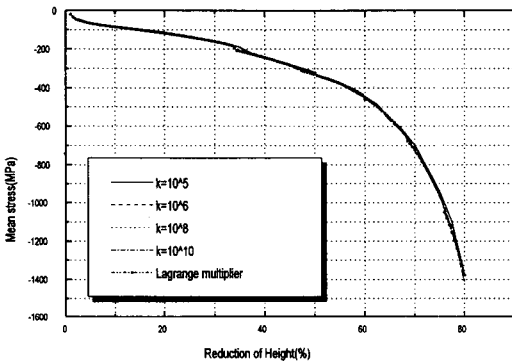


Fig. 9 The comparison of mean stress versus height reduction for various penalty constants K in DEFORM (Al2024, m=0.7)

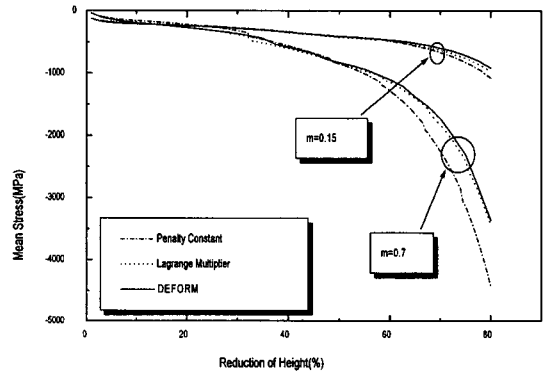


Fig. 11 The comparison of mean stress versus height reduction for various methods (ANSI1015, m=0.15, 0.7)

어 한 스텝당 압하깊이를 1/5로 줄여서 수행하여 보았다. 그 결과로 거의 체적변화가 일어나지 않음을 알 수 있다. 압하 깊이를 줄여 계산한 결과는 Fig.6과 Fig.7에서 굵은 실선으로 나타나 있다. ANSI1015에서는 라그랑즈 승수를 사용한 경우 다른 두 방법에 비해 같은 조건에서 체적 감소가 훨씬 적게(1%와 7%) 나타났다(Fig.12). 따라서 유동응력이 크고 압하율이 클수록 체적손실이 많이 일어남을 알 수 있다. 또한 Al2024에서와 마찬가지로 ANSI1015에서도 매 단계별 압하깊이를 1/5로 줄여서 수행한 결과, 라그랑즈 승수를 이용한 방법이 체적 감소가 거의 일어나지 않고 있음을 알 수 있다(Fig.13).

벌칙함수를 이용한 방법과 DEFORM에서 체적손실을 줄이기 위해 비압축성조건이 잘 만족되도록 벌칙상수값을 늘려 보았다. Fig.6에서는 벌칙함수를 이용한 프로그램을

이용하여 여러 가지 벌칙상수값에 따라서 체적손실을 비교한 것이다. 여기서 벌칙상수값 K가 증가할수록 체적손실이 감소됨을 알 수 있고 라그랑즈 승수를 이용한 결과로 접근함을 알 수 있다. 특히 K값이 105에서 106사이에는 체적손실차이가 10%정도로 크게 줄어 든다는 것을 알 수 있다. Fig.14에서도 나타나있듯이 ANSI1015에 대해서도 K값이 증가할수록 체적감소는 작아졌다. 그러나 K값이 클수록 정수압응력과 하중은 과도하게 나왔다.

Fig. 7은 DEFORM의 벌칙함수값을 바꾸어 계산한 것으로 벌칙함수값이 클수록 체적손실은 줄어들지만 106 이상이면 1% 이하로 작아진다. Fig.8에서는 높이 감소율 50%와 80%에서 K값이 클수록 정수압응력은 과도한 값이 나옴을 알 수 있다. 그러나 DEFORM에서는 정수압응력에서 별다른 차이가 나지 않았다(Fig.9). 즉,

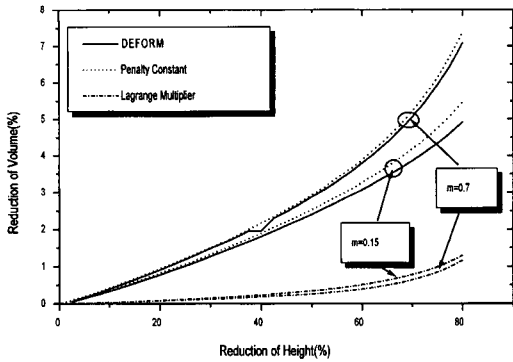


Fig. 12 The comparison of volume loss versus height reduction for various methods (ANSI1015, m=0.15, 0.7)

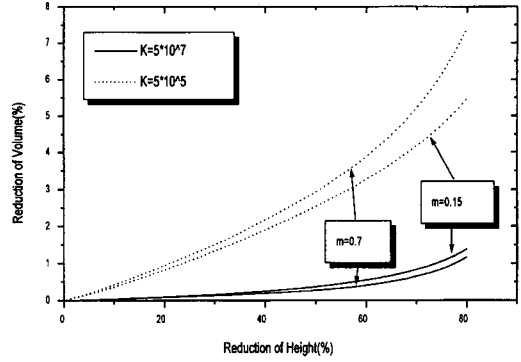


Fig. 14 The comparison of volume loss versus height reduction for various penalty constants K (ANSI1015, m=0.15, m=0.7)

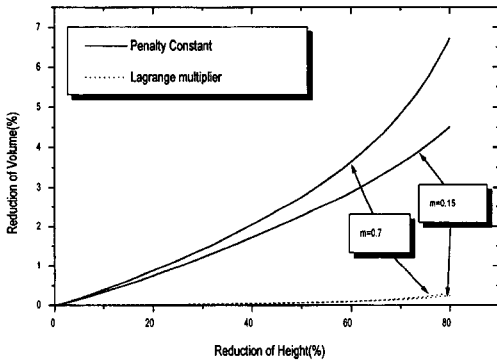


Fig. 13 The comparison of volume loss versus height reduction when a time step is 0.01 (ANSI1015, m=0.15, 0.7)

DEFORM의 경우 단조하중과 체적감소는 벌칙함수를 사용하여 개발한 프로그램과 유사한 결과를 보이지만, 정수 압응력은 라그랑즈 승수를 사용한 프로그램과 비슷한 결과를 나타내고 있다. 이것은 라그랑즈 승수를 사용하는 경우, 정수압응력은 유한요소해석에서 나오는 1차결과(속도, 정수압응력)이지만, 벌칙함수를 사용하는 경우 1차결과(속도)에서 후처리하여 구하기 때문에 그 방법에 따라서 다소 차이를 보이는 것으로 판단된다.

### 3.2 밀폐형 단조

과도한 구속이 주어지고 플래시 부분의 변형양상을 보고자 단순화된 밀폐형 단조 해석을 하였다. 초기 격자모양

Table 2 Process conditions for FEM analysis of closed die forging

|                      |   |           |
|----------------------|---|-----------|
| workpiece material   | ANSI1015  |           |
| flow stress          | $\bar{\sigma} = 766.0464 \bar{\epsilon}^{-0.156} (MPa)$ |           |
| Process definition   | incremental   |           |
|                      | isothermal  |           |
|                      | axisymmetric  |           |
| iteration controls   | Newton-Raphson  |           |
| penalty constant     | $10^5, 5 \cdot 10^5, 10^6, 10^7$                        |           |
| die control          | punch speed   | 2(mm/sec) |
| friction condition   | m=0.3   |           |
| simulation condition | step size   | 0.5       |
|                      | total mesh number                                       | 882       |

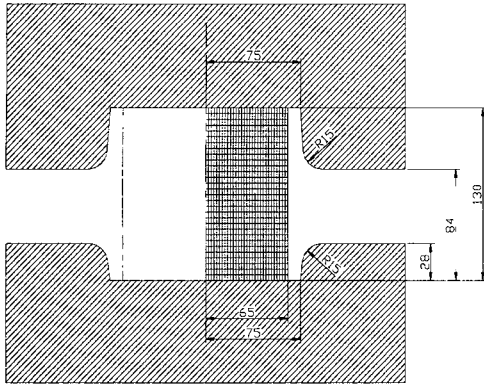


Fig. 15 Initial mesh in closed die forging

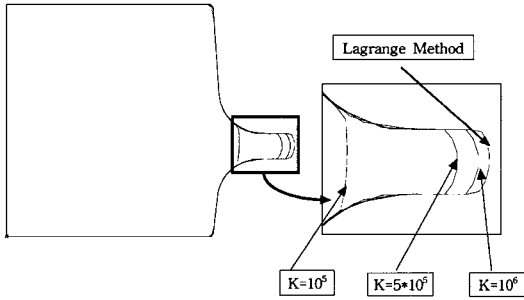


Fig. 16 Deformed shape at stroke 47mm

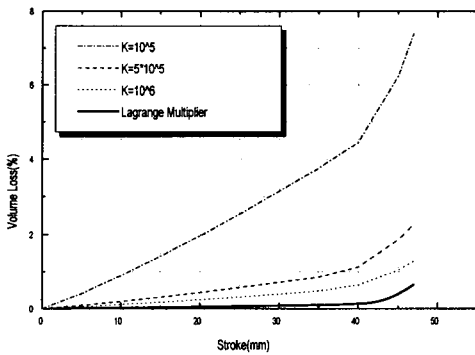
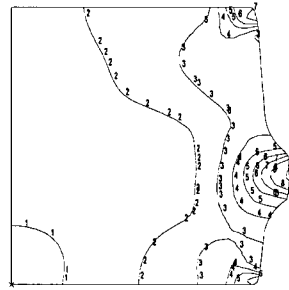


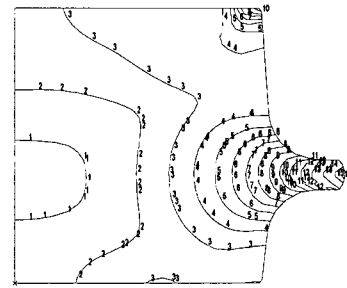
Fig. 17 The comparison of volume loss versus die stroke for various penalty constants K (ANSI1015,  $m=0.3$ )

은 Fig.15에서 나타나고 있다. 좌우가 축대칭이므로 오른쪽 부분만 해석하였다. 피성형체의 재료는 ANSI1015를 선정하고 크기가 높이 \* 지름이 130 \* 130(mm)인 모체에 적용하여 보았다. 프로그램의 수행조건은 Table 2 에



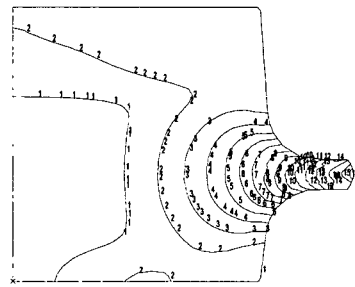
(a)  $K=10^5$

| no. | $\sigma_m$ (MPa) |
|-----|------------------|
| 1   | -1800            |
| 2   | -1600            |
| 3   | -1400            |
| 4   | -1200            |
| 5   | -1000            |
| 6   | -800             |
| 7   | -600             |
| 8   | -400             |
| 9   | -200             |



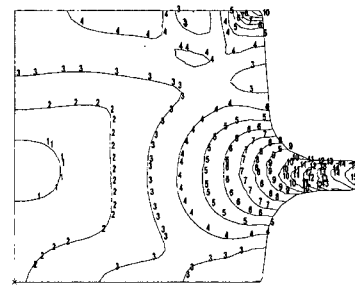
(b)  $K=5 \cdot 10^5$

| no. | $\sigma_m$ (MPa) |
|-----|------------------|
| 1   | -3000            |
| 2   | -2800            |
| 3   | -2600            |
| 4   | -2400            |
| 5   | -2200            |
| 6   | -2000            |
| 7   | -1800            |
| 8   | -1600            |
| 9   | -1400            |
| 10  | -1200            |
| 11  | -1000            |
| 12  | -800             |
| 13  | -600             |
| 14  | -400             |
| 15  | -200             |
| 16  | -100             |



(c)  $K=10^6$

| no. | $\sigma_m$ (MPa) |
|-----|------------------|
| 1   | -3000            |
| 2   | -2800            |
| 3   | -2600            |
| 4   | -2400            |
| 5   | -2200            |
| 6   | -2000            |
| 7   | -1800            |
| 8   | -1600            |
| 9   | -1400            |
| 10  | -1200            |
| 11  | -1000            |
| 12  | -800             |
| 13  | -600             |
| 14  | -400             |
| 15  | -200             |
| 16  | -100             |



(d) Lagrange Method

| no. | $\sigma_m$ (MPa) |
|-----|------------------|
| 1   | -3000            |
| 2   | -2800            |
| 3   | -2600            |
| 4   | -2400            |
| 5   | -2200            |
| 6   | -2000            |
| 7   | -1800            |
| 8   | -1600            |
| 9   | -1400            |
| 10  | -1200            |
| 11  | -1000            |
| 12  | -800             |
| 13  | -600             |
| 14  | -400             |
| 15  | -200             |
| 16  | -100             |

Fig. 18 The distribution of mean stress at die stroke 47mm



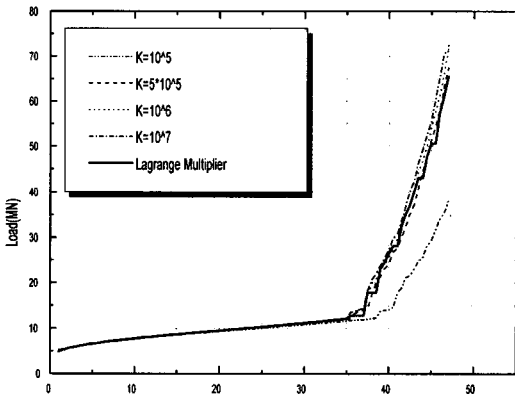


Fig. 19 The comparison of forging load versus die stroke for various methods (ANSI1015,  $m=0.1$ )

나와있다.

압하깊이가 47 mm까지 해석을 하였고 요소수는 882 개로 나누었다. 최종단계의 변형양상은 Fig.16과 같다. Fig.17은 여러 가지 벌칙함수값과 라그랑즈 승수를 이용한 방법으로 수행된 압하깊이에 따른 체적감소율을 나타낸 그래프이다. 앞에서 수행한 결과와 비슷한 양상이 나타남을 알 수 있고 과도한 구속이 많을수록 벌칙함수값에 따른 차이가 많이 남을 알 수 있다. 그러나 라그랑즈 승수를 이용한 방법에서 체적감소는 0.5%로 안정됨을 알 수 있다. Fig.16은 압하깊이 47 mm에서 플래시 부분의 체적양상을 나타낸 그림인데 라그랑즈방법이 다른 방법보다 훨씬 많이 체적이 진행됨을 알 수 있다. 그리고 Fig.18에서 평균응력분포를 비교한 결과도 라그랑즈 승수를 이용한 방법과 나머지 방법의 분포 양상이 다르게 나옴을 알 수 있다. Fig.19는 높이 감소대 하중의 결과 그래프인데 역시 라그랑즈 승수를 이용한 방법이 안정적임을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 비압축성 구속조건을 고려하는데 있어서 벌칙함수와 라그랑즈 승수를 이용한 프로그램을 개발하여, 업세팅과 밀폐형 단조 공정해석에 적용하여 수치해석된 데이터를 비교하였다. 벌칙함수를 사용하여 개발한 프로그램은 단조하중과 체적감소는 DEFORM의 경우와 유사한 결과를 나타낸다. 그러나 라그랑즈 승수를 사용하여 개발한 프로그램은 안정적인 결과를 얻을 수 있었다.

(1) 밀폐형 단조의 경우 단조하중을 라그랑즈 승수를 이용한 것과 벌칙함수를 이용한 것에서 비교한 결과 거의 차이가 없지만 벌칙함수값이 클 경우 하중이 증가한다.

(2) 국부적인 정수압응력은 두 결과에서 다르며 벌칙함수가 증가할수록 정수압응력은 증가한다. 그러나 DEFORM의 경우 정수압응력 변화는 거의 없이 일정하게 나타난다.

(3) 체적감소율은 유동응력과 벌칙함수값에 따라 차이가 난다.

(4) 벌칙함수를 이용할 때는 벌칙함수를 적절히 선택(106~108)할 필요가 있으며 라그랑즈 승수를 이용한 방법이 체적감소가 거의 없고 하중과 응력이 안정된 값이 나옴을 알 수 있다.

(5) 고도의 정밀성이 요구되는 단조와 정밀 밀폐형 단조의 공정해석에 라그랑즈 승수를 적용하는 것이 공정에 따라서는 유리한 것으로 판단된다.

#### 참 고 문 헌

- (1) R.A.C.Slater, 1977, "Engineering plasticity", The Macmillan Press, London.
- (2) Edward.M.Mielnik, 1991, "Metalworking science and engineering", McGraw-Hill, Inc., New York.
- (3) C.H.Lee, S.Kobayashi, 1973, "New solution to rigid-plastic deformation problems using a matrix method", Trans.ASME, J.of Eng. for Ind., Vol.95, pp.865~873.
- (4) O.C.Zienkiewicz, P.N.Godbole, 1975, "A penalty function approach to problems of plastic flow of metals with large surface deformation", J. of Strain Analysis, Vol.10, No.3.
- (5) S.N.Shah, 1975, "Numerical analysis of metal forming processes", Ph. D. dissertation, University of California, Berkeley.
- (6) C.C.chen, 1978, "Finite element analysis of plastic deformation in metal forming processes", Ph.D.dissertation, University, Berkeley.
- (7) K.Osakada, J.Nakano, K.Mori, 1982, "Finite element method for rigid - plastic analysis of metal forming formulation for finite deformation", Int. J. Mech. Sci., Vol.24, pp.459~468.
- (8) S.I.Oh, N.Rebelo, S.Kobayashi, 1978, "Finite

- element formulation for the analysis of plastic deformation of rate-sensitive materials in metal forming”, IUTAM Symposium, Tntzing/Germant, pp.273~291.
- (9) C.C.Chen, S.Kobayashi, 1978, “Rigid-plastic finite element analysis of ring compression”, Application of numerical methods to forming precesses, ASME, AMD, Vol.28, pp.163~174.
  - (10) S.I.Oh, 1982, “Finite element analysis of metal forming precesses with arbitrarily shaped dies”, Int. J. Mech. Sci., Vol.24, pp.479~493.
  - (11) Y.J.Kim, D.Y.Yang, 1985, “A formulation for rigid-plastic finite element method considering work-hardening effect”, Int. J. Mech. Sci, Vol.27, pp.487~495.
  - (12) C.J.Gelten, A.W.Konter, 1982, “Application of mesh-rezoning in the updated Lagrangial method to metal forming analysis”, Pittman, J.F.T.et al.(eds.), Proc. NUMIFORM, Pineriddge Press, Swansea, U.K., pp.511.
  - (13) S.I.Oh, J.P.Tang, A.Badawy, 1984, “Finite element mesh rezoning and its applications to metal forming analysis”' Advd. Tech. Plasticity, Vol.2, pp.1051.
  - (14) J.H.Cheng, N.Kiknch, 1986, “A mesh rezoning technique for finite element simulations of metal forming precesses”, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.23, pp.219.
  - (15) 정훈, 배원병, 1994, “별징 및 폴딩을 고려한 축대칭 업세팅의 상계해석”, 석사학위논문집, 부산대학교.
  - (16) D.Y.Yang, J.H.Kim, 1986, “An anaysis for three-dimensional upset forging of elliptical disks”, Int. J. Mach. Tool Des. Res. Vol.26, pp.147~156.