

< 논 문 >

모드필터방법에 의한 간접적 입력규명

Indirect Input Identification by Modal Filter Technique

김 영 렬* · 김 광 준**

Yeong Ryeol Kim and Kwang-Joon Kim

(1999년 1월 4일 접수 ; 1999년 2월 22일 심사완료)

Key Words : Indirect Input Identification(간접적 입력규명), Discrete Modal Filter(이산모드필터), Modal Analysis(모드해석)

ABSTRACT

This paper is a study on modal model method for estimating system inputs from vibration responses, which is one of indirect input identification methods in frequency domain. The method has advantages over direct inverse method especially when points of operational inputs are inaccessible so that artificial excitation forces cannot be applied to obtain frequency response functions of the complete system. Procedures of extended modal model method are proposed and checked by numerical experiment. Mechanisms of error propagation, i.e., how errors in modal parameters such as poles and mode shape vectors affect estimation of the input forces, are illustrated. Then, in order to counteract the error propagation, discrete modal filter approach is taken in this paper to compute the inversion of modal matrix in which the most serious errors seem to be generated. Further, a Reduced form of Modified Reciprocal Modal Vector (RMRMV) is proposed for estimating multiple inputs. It is shown to have smaller orthogonality error than MRMV.

1. 서 론

운전중 가진력을 받는 기계계에서 가진력을 정확히 파악하는 것은 계를 설계하거나, 제어나 진단을 할 때 매우 유용하다. 그러나 운전중 가진력을 직접 측정하는 것이 어렵거나 불가능한 경우가 많은데, 이런 경우에는 구조물의 주파수응답함수(FRF)와 운전중 진동응답으로부터 간접적으로 입력을 추정하여 사용하고 있다⁽¹⁾. 이 주파수 영역에서의 간접적 입력규명방법은 두가지로 대별된다⁽²⁾. 하나는 소위

직접역행렬방법(direct inverse method)으로서 관심 있는 각 주파수에서 FRF의 역행렬에 운전중 응답을 곱해서 입력을 구하는 방법이고, 다른 하나는 모드모형방법(modal model method)⁽³⁾으로 FRF 행렬에서 매개변수 모드모형을 구해서 이를 이용하는 방법이다.

간접적으로 입력을 규명하기 위해서는 먼저 알고 있는 입력으로 비운전상태에 있는 계를 가진하면서 응답을 측정하여 FRF행렬을 미리 파악해두어야 한다. 특히 직접역행렬방법을 적용하기 위해서는 운전시의 실제 입력점들과 선정된 응답측정점들간의 FRF행렬을 모두 정확히 측정해야 한다. 하지만 보통 운전중 입력이 가해지는 점들은 실제 그점들에서 인위적 가진을 하기가 어려운 경우가 많다. 따라서

* 한국과학기술원 동시공학설계연구센터

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

이점들에서 가진하기 위해서는 계 자체나 경계조건을 변형시켜야 하는데, 이는 계의 동특성을 변화시키게 마련이므로 추정해낸 입력의 정확도에 영향을 미치게 된다. 따라서 본 논문에서는 이러한 문제를 극복하기 위해서 모드모형방법을 확장 이용하였다. 계의 선형성을 가정하면 상보성(reciprocity)이 적용된다. 따라서, 간편하게 가진할 수 있는 점을 가진하여 계의 모드모형을 구하여 이 모형으로부터 외부가진이 어려운 운전중 입력점들과 선택된 출력점들간의 FRF를 계산하는 것이 가능하다. 그리고 이를 이용하여 운전중 입력점들에 가해지는 입력을 구할 수 있다.

그러나 모드모형방법에는 피할 수 없는 오차발생 요소가 존재한다. 이 방법은 측정된 원시FRF 데이터에서 피팅된 모드매개변수에 크게 의존하므로, 피팅시 바이어스등의 오차가 있으면 이 오차가 최종 입력 추정치에 영향을 미치게 된다. 즉, 모드매개변수의 오차가 모드행렬의 역행렬 계산 및 관련된 계산 과정에서 증폭되어 규명된 최종입력에 나타나게 된다. 본 논문에서는 모드모형방법에서의 오차전파 특성을 분석하고, 고유진동수, 감쇠비 및 모드벡터의 오차 영향을 예시하였다. 그리고 오차가 전파되는 영향을 줄이기 위해서 Shelley가 제안한 이산모드필터⁽⁴⁾를 이용하는 모드모형방법을 제안하였다. 나아가 실제로 많이 다루는 다중입력규명문제에 적용하기 위해서 축약된 형태의 이산모드필터를 도입하였으며, 원래의 모드필터와 축약된 모드필터에 의한 다중입력 규명결과를 수치실험으로 비교하였다.

2. 모드모형에 의한 입력규명방법

2.1 모드모형방법

관심 주파수대역내의 거동만 고려할 때, 선형 시불변 자기수반 연속계의 공간샘플모델(spatially sampled model)은 다음식과 같이 이 주파수 범위내에 존재하는 N_m 개의 모드의 유한함으로 근사된다.

$$\{x(\omega)\} \equiv \sum_{r=1}^{N_m} \frac{\{\phi_r\}\{\check{\phi}_r\}^T}{-M_r\omega^2 + C_rj\omega + K_r} \{f(\omega)\} \quad (1)$$

이 식에서 $\{\check{\phi}_r\}$ 은 모드벡터 $\{\phi_r\}$ 중에서 각 입력 위치에 해당하는 요소만을 갖는 절단된 모드벡터이다. 식 (1)을 행렬을 사용하여 나타내면,

$$\{x(\omega)\}_{N_0 \times 1} \equiv [\Phi]_{N_0 \times N_m} [S(\omega)]_{N_m \times N_m} [\check{\Phi}]_{N_m \times N_1}^T \{f(\omega)\}_{N_1 \times 1} \quad (2)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서, N_i 와 N_0 는 각각 입력 측정점의 개수를 나타내고, $[S(\omega)]$ 는 다음과 같은 요소를 대각요소로 갖는 대각행렬이다.

$$s_r(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{-M_r\omega^2 + C_rj\omega + K_r} & \text{for non-normalization} \\ \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega\omega_r} & \text{for mass normalization} \end{cases} \quad (3)$$

식 (2)로부터 입력 $\{f(\omega)\}$ 는 다음과 같이 각 행렬의 역행렬을 순차적으로 좌변에 곱해서 구할 수 있다.

$$(i) \text{ 모드응답의 계산 } \{\hat{\eta}(\omega)\} = [\Phi]^+ \{x(\omega)\} \quad (4)$$

$$(ii) \text{ 모드가진력의 계산 } \{\hat{f}_r(\omega)\} = [S(\omega)]^{-1} \{\hat{\eta}(\omega)\} \quad (5)$$

$$(iii) \text{ 실제가진력의 계산 } \{\hat{f}(\omega)\} = [\check{\Phi}]^{T+} \{\hat{f}_r(\omega)\} \quad (6)$$

여기서 “ $\hat{\quad}$ ”는 변수들의 추정치를 의미한다.

모드모형방법은 계규명단계에 측정된 FRF 행렬에서 피팅한 모드매개변수를 사용하여, 측정된 운전중 응답으로부터 위의 3과정의 계산을 수행하여 입력을 규명하는 방법이다. 이때 (ii)와 (iii)의 과정에서 구한 해들이 측정오차에 강건한 해가 되기 위해서는 방정식들이 과도결정(overdetermined) 되어야 하므로, 다음 식을 만족하여야 한다.

$$N_0 \geq N_m \geq N_1 \quad (7)$$

2.2 확장된 모드모형방법

간접적 입력규명방법은 운전중 실제입력들을 측정할 수 없는 경우에 적용한다. 간접적 규명방법중 직접역행렬방법이나 앞절에서 소개한 모드모형방법은, 운전중 입력점들이 접근가능하여 계의 특성규명단계에 인위가진점으로 사용할 수 있다는 전제에 기초하고 있다. 그런데 운전중 입력이 작용하는 점들은 보통 비운전상태에서 계의 가진실험을 할 때도 접근 불가능한 경우가 많다. 그러므로 실제 운전중 입력점들이 접근 불가능할 경우 이들 방법을 적용하기 위해서는 운전중 입력점들에서 인위적 가진이 가능하도록 계를 변형하여야 한다. 그러나, 계를 변형하게 되면 계의 동적특성에 영향을 미쳐 FRF 행렬이 바뀌게 되고, 이에 따라서 규명된 입력치에도 오차가 유발된다.

이런 경우에 직접역행렬방법은 아무런 대응책이 없으나, 모드모형방법의 경우는 모드모형을 확장하여 적용할 수가 있다. 즉 접근불가능한 운전중 입력점들 대신에 다른 접근가능한 점들을 선정하여 계규

명단계에 계를 가진하며, 실제 입력점들 뿐만 아니라 새로 선정된 인위 가진점들에서도 응답을 측정하여 새로운 FRF 행렬을 구한다. 그리고 계의 상반성을 이용하면, 이렇게 구한 FRF 행렬에서 운전중 입력점과 출력측정점 조합에 대한 모드매개 변수를 재구성할 수가 있다

식 (2)에서부터 FRF 행렬은 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{\{\phi_r\}\{L_r\}^T}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}, \quad (8)$$

여기서 $\{L_r\}$ 은 모드기여인자(modal participation factor, MPF)로서 각 입력점 P_i 에서의 고유함수값 $\phi_r(P_i)$ 에 비례하는 값을 갖는다.

P_i 를 실제 운전중 입력점, P_o 를 선택된 출력 측정점, P_e 를 추가로 선정한 인위 가진점이라고 할 경우, 서술한 확장된 모드모형방법을 단계별로 구분해 적으면 다음과 같다. 이의 개념도를 Fig. 1에 보였다

- (1) $\{P_i \cup P_o \cup P_e\}$ 에서의 응답과 P_e 에서의 가진력 간의 FRF를 측정
- (2) 위의 새로운 입출력점 조합에 대한 모드매개변수를 계산

$$\lambda_r(\omega_r, \zeta_r), \{\phi_r\}_{i,o,e}, \{L_r\}_i, \quad r=1, \dots, N_m$$

- (3) $\{\phi_r\}_{i,o,e}$ 의 부분집합에서 다음의 비례상수 c_r 을 계산

$$\{L_r\}_e = c_r \{\phi_r\}_e$$

- (4) 운전중 입력점 P_i 에서의 모드기여인자 $\{L_r\}_i$ 을 계산

$$\{L_r\}_i = \{L_r\}_e = c_r \{\phi_r\}_e$$

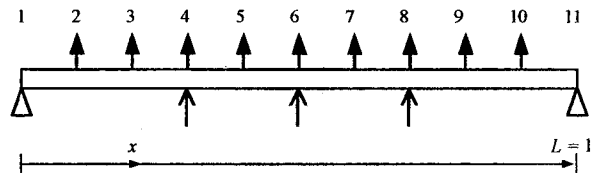
- (5) 선택된 출력점 P_o 들에서의 모드벡터 $\{\phi_r\}_o$ 를 계산

$$\{\phi_r\}_o = \{\phi_r\}_e$$

- (6) $\lambda_r, \{L_r\}_i, \{\phi_r\}_o$ 를 이용하여 운전중 입력을 계산

2.3 입력규명 수치실험

제안된 방법을 수치실험으로 예증하기 위하여 Fig. 2의 양단 ힹ지된 단순 오일러보를 시험구조물로 사용하였다. 관심 주파수 범위는 처음 4개의 굽힘모드를 포함하는 0~32 Hz로 선정하였으며, 운전



$$EI(x) = 1, \quad \rho A(x) = 1, \quad m(x) = 1, \quad \zeta_r = 0.005,$$

$$\omega_r = (r\pi)^2, \quad \phi_r = \sqrt{2} \sin(r\pi x / L)$$

Point 1 through 11 : evenly spaced

Fig. 2 Test structure : a hinged-hinged uniform Euler beam with proportional viscous damping

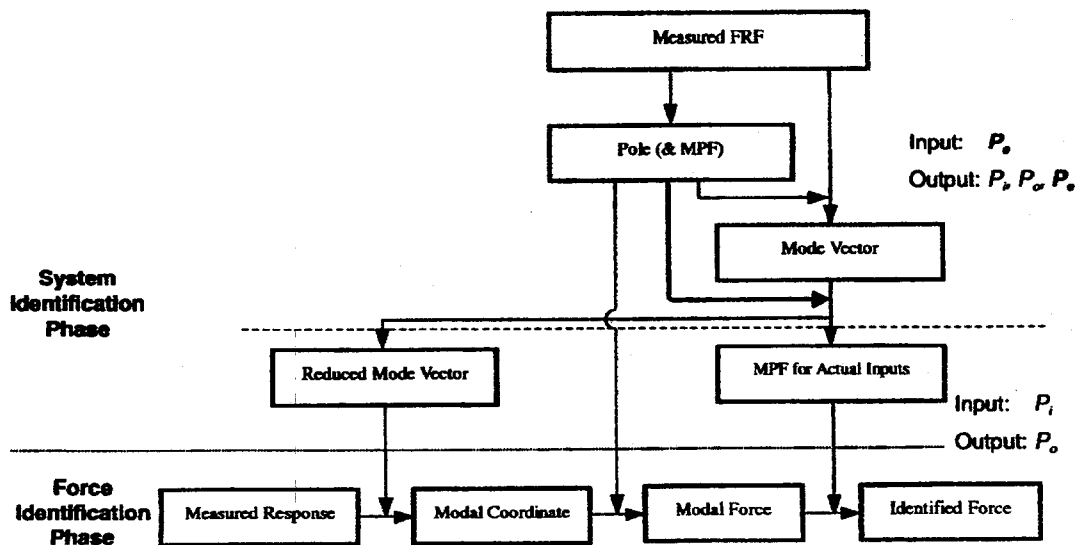


Fig. 1 Block diagram of modal model method extended to deal with inaccessible input points

중 보는 4, 6, 8의 3점에서 랜덤한 가진력을 받는 것으로 가정하였다 ($P_i = \{4, 6, 8\}$). 그리고, 응답은 점 2부터 점 10까지의 9점에서 처음 7개의 굽힘모드를 사용하여 생성하였다 ($P_o = \{2 \sim 10\}$).

이러한 구성에 대하여 다음 6가지 경우의 인위 가진점 조합을 선정하여, 계규명단계에 이들 점에서 랜덤입력을 가하며 FRF를 측정, 모드매개변수를 피팅하고, 위에 서술한 확장된 모드모형방법을 이용하여 운전중 입력을 계산하였다

- (1) $P_e = \{4, 6, 8\}$ (2) $P_e = \{4, 6\}$ (3) $P_e = \{4\}$
- (4) $P_e = \{6\}$ (5) $P_e = \{5, 7\}$ (6) $P_e = \{7\}$

결과를 비교하기 위해, 입력규명치의 전반적 오차를

다음 식으로 정의하였다.

$$e(\omega) = \frac{\|\hat{f}(\omega) - \{f(\omega)\}\|}{\|\{f(\omega)\}\|} \quad (9)$$

Fig. 3에 이 6가지 경우에 대하여 계산한 오차를 비교해 보았다. 전반적 오차 수준은 (4)의 경우만 제외하고는 입력점의 선정과는 관계없이 거의 동일한 정도를 보였다. 하나의 모드만이 지배적으로 작용하기 때문에 FRF행렬의 랭크가 부족하게 되는 공진역을 제외하고는, 모든 주파수에서 5% 이하 수준이었다. Fig. 3(4)에 보이듯이 (4)의 경우에 오차가 큰 이유는, 가진실험시 사용한 단일 가진점 6이 비대칭 모드들의 절점이기 때문에 짝수모드인 2번과

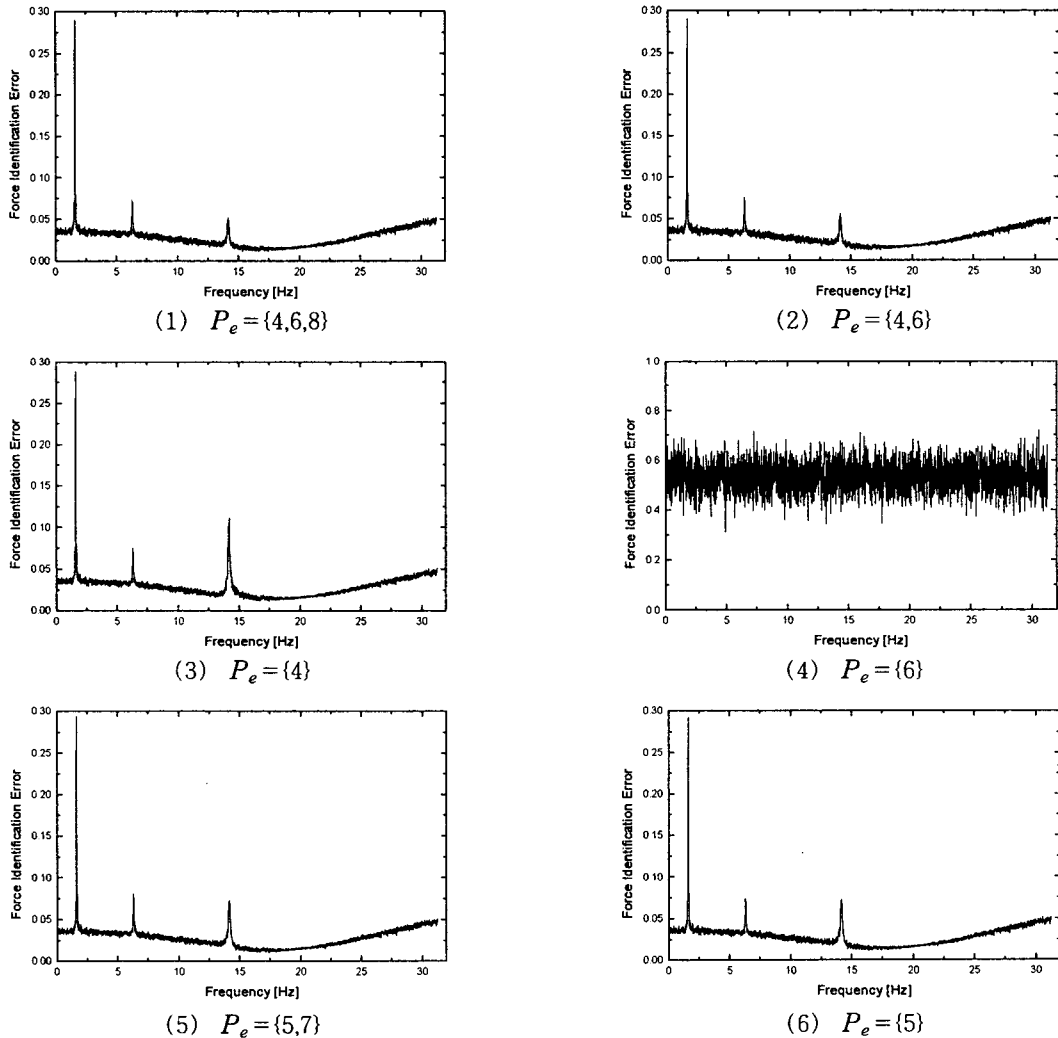


Fig. 3 Errors in force estimations in physical coordinate $e(\omega)$ by extended modal model method for various sets of excitation points

4번 모드가 전혀 가진되지 않아 모드매개변수가 바로 피팅되지 않았기 때문이다. 즉, 인위가진점을 적절히 선정하면 확장된 모드모형방법으로 운전중 입력을 간접적으로 충분히 규명가능하다는 것을 알 수 있다.

3. 모드매개변수오차의 입력규명 영향

3.1 고유치 오차 영향

k번 고유치, 즉 고유진동수와 감쇠비에 다음과 같은 오차가 있는 경우를 생각하자.

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + \delta\omega_k \quad (10)$$

$$\tilde{\zeta}_k = \zeta_k + \delta\zeta_k \quad (11)$$

이들 오차는 2.1절의 (ii) 과정, 즉 모드가진력의 추정과정에 영향을 미친다. 고유치에 오차가 없는 경우와 있는 경우의 모드가진력을 각각 $\hat{f}_{\eta,k}(\omega)$ 와 $\tilde{f}_{\eta,k}(\omega)$ 로 나타내면 다음식으로 적을 수 있으며,

$$\hat{f}_{\eta,k}(\omega) = (\omega_k^2 - \omega^2 + j2\zeta_k\omega_k\omega)\hat{\eta}_k(\omega) \quad (12)$$

$$\tilde{f}_{\eta,k}(\omega) = (\tilde{\omega}_k^2 - \omega^2 + j2\tilde{\zeta}_k\tilde{\omega}_k\omega)\tilde{\eta}_k(\omega) \quad (13)$$

이 두식 간의 차이를 구하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \delta\hat{f}_{\eta,k}(\omega) &\equiv \tilde{f}_{\eta,k}(\omega) - \hat{f}_{\eta,k}(\omega) \\ &= (\tilde{\omega}_k^2 - \omega_k^2 + j2(\tilde{\zeta}_k\tilde{\omega}_k - \zeta_k\omega_k)\omega)\tilde{\eta}_k(\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

고유치의 추정오차가 작아 이차항을 무시 가능하다고 가정하면, 모드가진력 오차 $\delta\hat{f}_{\eta,k}(\omega)$ 는 식 (15)로 근사되고, 따라서 정규화한 모드가진력 오차는 식 (16)으로 표현된다.

$$\delta\hat{f}_{\eta,k}(\omega) \equiv (2\omega_k\delta\omega_k + j2(\zeta_k\delta\omega_k + \omega_k\delta\zeta_k)\omega)\tilde{\eta}_k(\omega) \quad (15)$$

$$\frac{\delta\hat{f}_{\eta,k}(\omega)}{\hat{f}_{\eta,k}(\omega)} \equiv \frac{2\omega_k\delta\omega_k + j2(\zeta_k\delta\omega_k + \omega_k\delta\zeta_k)\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2 + j2\zeta_k\omega_k\omega)} \quad (16)$$

이 식을 보면 k번 고유치 추정에만 오차가 있는 경우, 당연히 해당모드의 모드 가진력에만 영향을 주게 된다. 또한 분모에서 알 수 있듯이 k번 공진역 부근에서만 입력규명 오차가 매우 크게 나타나게 되고, 공진역에서 멀어질수록 점점 오차는 작아진다.

공진역 $\omega \cong \omega_k$ 에서의 거동을 좀더 자세히 살펴 보면,

$$\text{if } \delta\zeta_k = 0, \text{ then } \frac{\delta\hat{f}_{\eta,k}(\omega)}{\hat{f}_{\eta,k}(\omega)} \equiv \frac{2(1+j\zeta_k)\delta\omega_k}{j2\zeta_k\omega_k} \equiv \frac{1}{j\zeta_k} \times \frac{\delta\omega_k}{\omega_k} \quad (17)$$

$$\text{if } \delta\omega_k = 0, \text{ then } \frac{\delta\hat{f}_{\eta,k}(\omega)}{\hat{f}_{\eta,k}(\omega)} \equiv \frac{\delta\zeta_k}{\zeta_k} \quad (18)$$

이식들에서 감쇠가 매우 작은 구조물의 경우, 고유진동수 추정치의 오차보다 감쇠 추정치의 오차가 모드 가진력 추정에 덜 영향을 미친다는 것을 알 수 있다.

3.2 고유벡터 오차 영향

k번 고유벡터에 오차가 있는 경우를 고려하자.

$$\{\tilde{\phi}_k\} = \{\phi_k\} + \{\delta\phi_k\} \quad (19)$$

이 경우 오차가 있는 모드행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[\tilde{\Phi}] = [\Phi] + [\delta\Phi], \quad (20)$$

$$\text{where } [\delta\Phi] = [0 \ \dots \ \delta\phi_k \ \dots \ 0] \quad (21)$$

고유벡터에 오차가 없는 경우와 있는 경우의 모드응답을 각각 $\{\hat{\eta}(\omega)\}$, $\{\tilde{\eta}(\omega)\}$ 로 나타내면 이들은 다음 식을 만족하므로

$$\{\hat{\eta}(\omega)\} = [\Phi]^+ \{x(\omega)\} \quad (22)$$

$$\{\tilde{\eta}(\omega)\} = [\tilde{\Phi}]^+ \{x(\omega)\} \quad (23)$$

들 간의 차이를 유도하면 식 (24)와 같다.

$$\{\delta\tilde{\eta}(\omega)\} = -[\tilde{\Phi}]^+ [\delta\Phi] \{\hat{\eta}(\omega)\} = -[\tilde{\Phi}]^+ \{\delta\phi_k\} \hat{\eta}_k(\omega) \quad (24)$$

이 식에서 다음 추론들이 가능하다. 첫째, 모드응답 추정치의 오차는 해당 모드벡터의 오차크기 $\{\delta\phi_k\}$ 에 비례한다. 둘째, 모드응답 추정치 오차는 모드응답 자신 $\hat{\eta}_k(\omega)$ 에도 비례하므로, 해당 공진역 부근에서 가장 크게 나타난다. 마지막으로, 주어진 하나의 모드에 내재되어 있던 오차는 모드행렬의 역행렬 $[\tilde{\Phi}]^+$ 를 곱하는 과정에서, 다른 모드들로도 전파된다. 그리고 식 (5)에 보였듯이 비연성된 단일모드 FRF의 역수를 모드응답에 곱해서 모드입력을 구하므로, 애초에 모드응답에 무시가능한 크기의 오차가 있었다라도 결과적으로 모드가진력과 물리적 가진력에서는 오차가 매우 크게 나타날 수 있다는 것을 알 수 있다. 이들 추론으로부터 고유벡터의 오

3.3 입력규명 수치실험

이 절에서도 2.3절에서 사용한 Fig. 2의 양단 힌지된 오일러보를 시험구조물로 사용하였다.

입력 규명에 사용할 모드매개변수에 의도적으로 오차를 추가하고 이를 이용하여 출력데이터를 생성하였다. 그리고, 계규명단계의 인위가진점으로 실제 운전중 입력점을 그대로 사용하는 전통적인 모드모형 방법으로 출력데이터에서 세 입력점에서의 가진력을 추정하였다.

(1) 고유치의 오차

각 고유치에 1%의 오차가 있는 경우, 즉

$$\tilde{\omega}_k = 1.01\omega_k \quad \& \quad \tilde{\zeta}_k = 1.01\zeta_k \quad (25)$$

식 (16)으로 계산한 정규화된 모드가진력 오차 $\frac{\delta \hat{f}_{n,k}(\omega)}{\hat{f}_{n,k}(\omega)}$ 를 각 모드에 대하여 Fig. 4에 도시하였다.

주어진 하나의 고유치에 오차가 있으면 해당 공진주파수에서 모드입력 추정치의 오차가 가장 크다는 것을 알 수 있다.

그리고, 각 모드에 오차가 있을 경우 세 입력점에

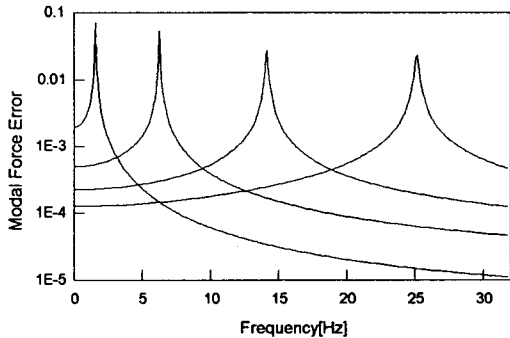


Fig. 4 Errors in modal force estimations $\frac{\delta \hat{f}_{n,k}(\omega)}{\hat{f}_{n,k}(\omega)}$ due to 1 % error at each pole

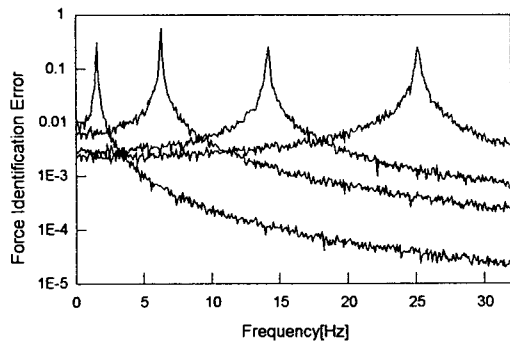


Fig. 5 Errors in input force estimations $e(\omega)$ due to 1 % error at each pole

서의 입력추정치에 전반적 오차를 식 (9)로 계산하여 Fig. 5에 도시하였다. Fig. 4에서 예측 가능하듯이, 사용된 고유치에 오차가 있는 경우 해당 공진역에서 입력추정치는 가장 큰 오차를 보이고 있다.

(2) 고유벡터의 오차

고유벡터의 추정오차를 다음과 같이 구성하였다.

$$\tilde{\phi}_{k,j} = \phi_{k,j} + |\phi_{k,j}|_{\max} \times \xi_i \times \left(\frac{\beta}{100} \right) \quad (26)$$

여기서 ξ_i 는 [-1,1] 구간에서 균일한 분포를 갖는 백색 잡음 랜덤변수이고, β 는 잡음의 크기 %를 나타낸다.

Fig. 6에 $\beta=1\%$ 의 경우 입력규명치에 나타나는 규명오차를 보였는데, 고유치에 오차가 있는 경우와 유사하게 공진점부근에서 크게 나타난다. 그러나 이 경우는 고유치에 오차가 있는 경우와 달리 특히 저주파수 영역에서 매우 큰 오차를 보인다. 이는 첫번째 고유벡터에 포함되어 있던 오차가 식 (24)의 과정에서 다른 모드 응답으로 전파되고, 이 전파된 오차가 식 (5)의 모드가진력을 구하는 과정에서 증폭되기 때문으로 생각된다. 참고로 각 모드의 기여도를 나타내

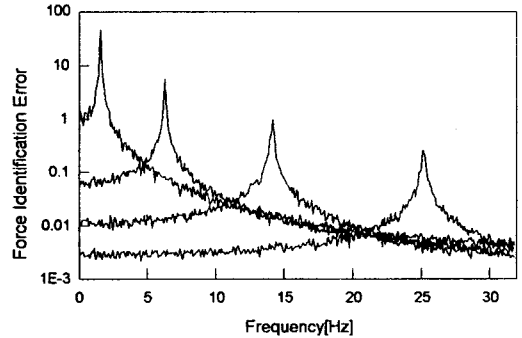


Fig. 6 Errors in input force estimations $e(\omega)$ due to 1 % error in each mode shape

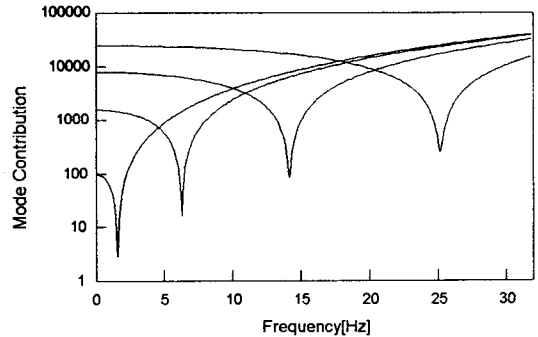


Fig. 7 Contribution of each mode $\|S_r(\omega)^{-1}\|$

는 $\|S_r(\omega)^{-1}\|$ 를 계산하여 Fig. 7에 도시하였다.

4. 이산모드필터를 이용한 입력규명

4.1 이산모드필터에 의한 입력규명

원래 모드필터는 분포계의 모드제어를 위해 Meirovitch가 도입하였다⁽⁶⁾. 그러나 Meirovitch의 모드필터는 계산시 구조물 전체에 걸친 질량분포와 고유함수를 알아야 하므로 적용이 매우 제한되어 있었다. 이에 대해 Zhang은 실험적 FRF와 이에서 구한 모드매개변수를 이용하는 이산모드필터를 제안하였다⁽⁷⁾. 개념상 Zhang의 모드필터는 단일모드의 모드응답을 구하는 역모드벡터(reciprocal modal vector, RMV)이다. Zhang은 계산시 고유치와 원시 FRF뿐 아니라 고유벡터도 사용하였다. 그러나, 앞절에서 살펴보았듯이 보다 더 오차가 없는 입력규명용 모드필터를 구성하기 위해서는 모드벡터를 제외하는 것이 바람직하다.

Shelley는 피팅된 모드벡터를 전혀 사용하지 않는 Modified RMV(MRMV)라는 모드벡터를 제안하였다⁽⁴⁾. 정규모드를 갖는 계의 경우, MRMV $\{\psi_i\}$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$\{\psi_r\}^T \{\phi_s\} Q_s \check{\phi}_{s,q} = \begin{cases} -j \frac{\check{\phi}_{s,q}}{\phi_{s,1}}, & r=s \\ 0, & r \neq s \end{cases} \quad (27)$$

(여기서 Q_s 는 모드크기인자(modal scaling factor)), $\{\psi_i\}$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_1^T \\ \hat{H}_2^T \\ \hat{H}_3^T \\ \vdots \\ \hat{H}_N^T \end{bmatrix} \{\psi_i\} = \begin{bmatrix} \Delta_i \\ \check{\phi}_{i,2} \Delta_i \\ \check{\phi}_{i,1} \Delta_i \\ \check{\phi}_{i,3} \Delta_i \\ \vdots \\ \check{\phi}_{i,N_i} \Delta_i \\ \check{\phi}_{i,1} \Delta_i \end{bmatrix} \quad \text{where} \quad \Delta_i \equiv \frac{-j}{j\omega - \lambda_i} + \frac{j}{j\omega - \lambda_i^*} \quad (28)$$

이 식을 고쳐 써서, Shelley는 MRMV 최종계산식을 다음식으로 정리하였다.

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_1^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{H}_2^T & \Delta_i & 0 & \dots & 0 \\ \hat{H}_3^T & 0 & \Delta_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{H}_N^T & 0 & 0 & \dots & \Delta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ -\check{\phi}_{i,2} \\ \check{\phi}_{i,1} \\ -\check{\phi}_{i,3} \\ \vdots \\ \check{\phi}_{i,N_i} \\ \check{\phi}_{i,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

그리고, 이식에서 모드필터 $\{\psi_i\}$ 와 상대모드기여인자 $\frac{\check{\phi}_{i,k}}{\check{\phi}_{i,1}}$ 를 동시에 계산하였다.

일반적으로 다중입력 모드시험의 경우 모드매개변수는 2단계 피팅과정에서 구해지는데, 고유치와 모드기여인자는 그 첫번째 단계에서, 모드벡터는 다시

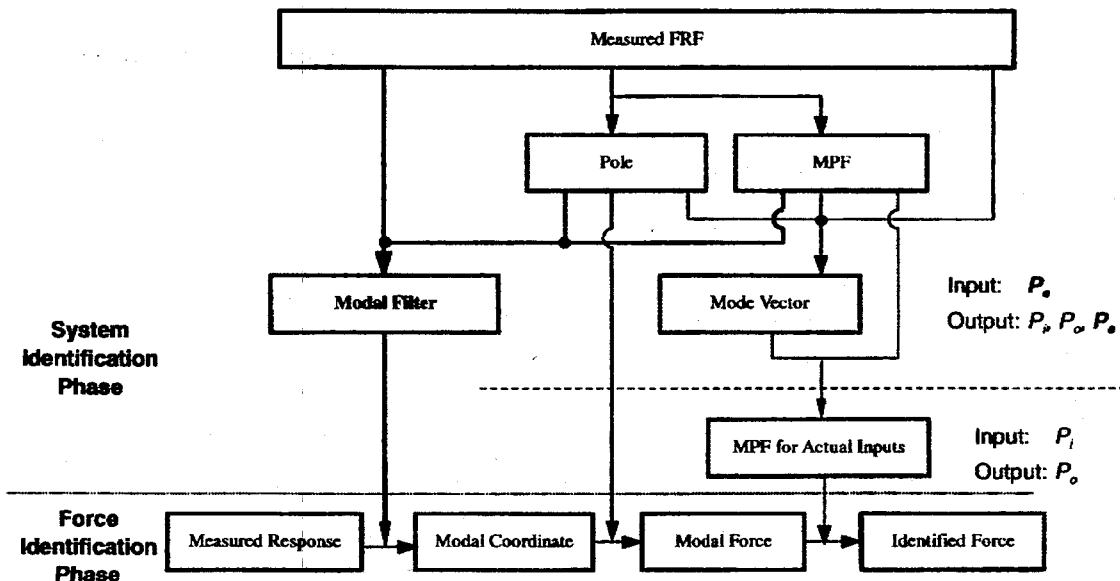


Fig. 8 Block diagram of proposed modal model method using Reduced form of MRMV(RMRMV)

이들을 이용하여 두번째 단계에 계산된다^(8,9). 즉, 고유치와 모드기여인자의 오차정도가 동일하다는 것을 알 수 있다. 따라서 이점을 고려하면, 식 (29)는 원시 FRF에서 고유치와 동일한 과정에 피팅되는 모드기여인자를 다시 미지수로 돕으로 인해 모드필터에 보다 많은 오차가 포함될 것이다. 정확한 입력구명을 위해서는 아주 작은 크기의 오차라도 도입되지 않게 해야 하므로, 식 (29)대신에 모드기여인자 기지의 수로 고려하는 식 (28)을 이용해서 모드필터를 계산하는 것이 낫다. 이렇게 구하는 모드필터를 MRMV에 대비해 Reduced form of MRMV (RMRMV)로 부르기로 한다.

RMRMV를 이용한 확장된 모드모형방법의 개념도를 Fig. 8에 보였다.

4.2 입력구명 수치실험

앞질의 추론을 예증하기 위해서 수치실험을 행하였다. Fig. 2의 양단 힌지 오일러보를 다시 이용하였다. 운전중 입력점 3곳을 계구명단계에 인위적으로 가진하며 FRF행렬을 구해, 이를 사용하여 모드매개변수를 피팅하였다. 그리고 구명된 모드매개변수에 인위적인 오차를 추가하여, 이 오차가 포함된 모드매개변수를 이용하여 입력을 구명하였다. 입력구명시 다음의 3가지 모드모형방법을 사용하였다.

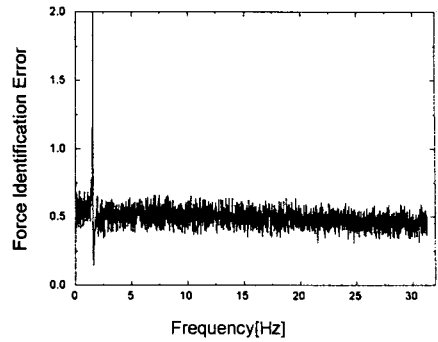
- (A) 모드행렬의 역행렬을 이용하는 종래의 방법
- (B) MRMV를 이용한 방법
- (C) RMRMV를 이용한 방법

(1) 고유진동수의 오차: $\tilde{\omega}_1 = (1 + \delta)\omega_1$ (30)

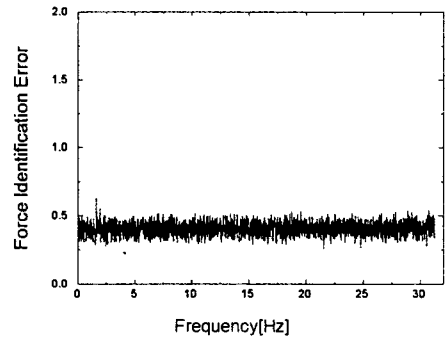
첫번째 고유진동수에 1% ($\delta=0.01$) 오차가 추가되었다. Fig. 9에 이들 3방법에 의한 입력구명오차를 비교하였다. B는 A에 비해 입력구명오차의 전반적 수준이 약간 향상되었다. 그러나 C는 B보다 훨씬 개선된 결과를 보인다. A가 가장 나쁜 이유는 먼저 계산된 고유진동수를 사용하여 모드벡터를 피팅하는 과정에서 모드벡터에 오차가 전파되었기 때문이고, B가 C보다 나쁜 이유는 위에서 언급하였듯이 모드기여인자를 다시 구해내기 때문에 모드필터에 오차가 더 도입되었기 때문으로 생각된다.

(2) 감쇠계수의 오차: $\tilde{\xi}_1 = (1 + \delta)\xi_1$ (31)

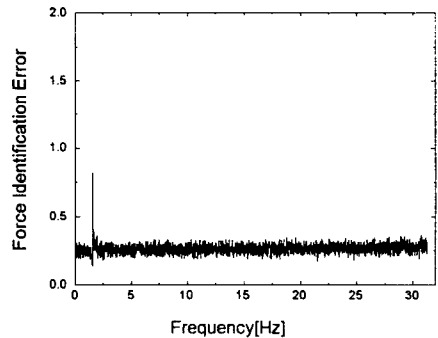
첫번째 모드의 감쇠계수에 20% ($\delta=0.2$) 오차를 추가하여, 위의 3방법으로 구한 입력구명오차를 Fig. 10에 비교하였다. 이 경우는 3방법이 거의 차이를 보이지 않는데, 이는 감쇠계수의 오차가 고유



(a) Conventional modal model method using inverse of modal matrix



(b) Modal model method using MRMV



(c) Modal model method using Reduced form of MRMV

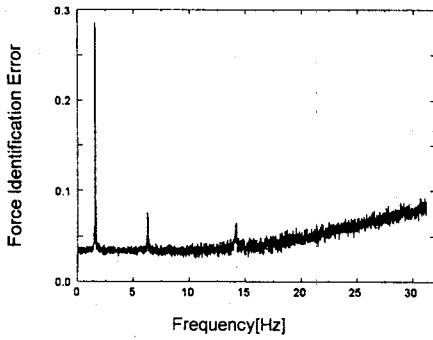
Fig. 9 Comparison of three modal model methods in input force estimations for 1% of fitting error in the first resonance frequency

진동수의 오차보다 훨씬 영향을 적게 미치기 때문으로 추정된다.

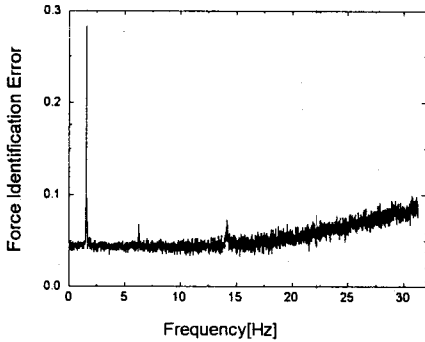
(3) 모드벡터의 오차: $\tilde{\phi}_{k,1} = \phi_{k,1}(1 + R_{k,1} \times \delta)$ (32)

첫번째 모드벡터에 식 (33)과 같은 오차를 부가하였다. 이 식에서 δ 는 오차의 크기를, $R_{k,i}$ 는 표준 정규분포를 갖는 랜덤변수이다.

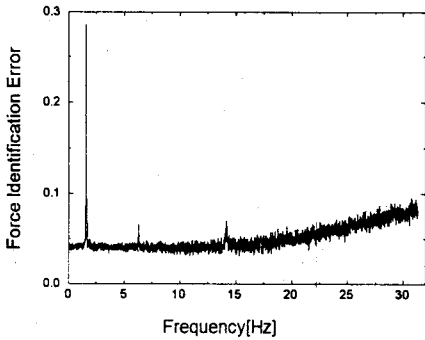
1% ($\delta=0.01$)오차가 있는 경우 앞의 3방법에 의한 입력 추정오차를 Fig. 11에 보였다. A만 특히 저



(a) Conventional modal model method using inverse of modal matrix



(b) Modal model method using MRMV

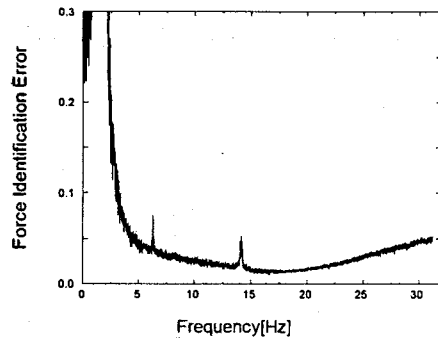


(c) Modal model method using Reduced form of MRMV

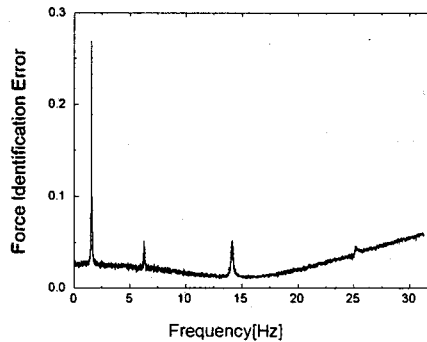
Fig. 10 Comparison of three modal model methods in input force estimations for 20% of fitting error in damping ratio of the first mode

주파수대에서 큰 오차를 보이고, B와 C는 상대적으로 작은 같은 크기의 오차만을 보인다. 이는 A는 규명된 모드벡터를 그대로 직접 사용하나, B와 C는 고유치와 모드기여인자만을 사용하고 모드벡터는 전혀 사용하지 않기 때문이다.

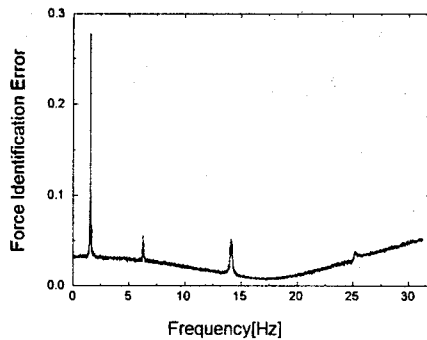
이들 수치 모의실험의 결과, RMRMV 모드필터를 이용하는 제안된 모드모형방법이 모드행렬의 역변환을 이용하는 종래의 방법이나 MRMV 모드필터를 이용하는 방법보다 입력규명시 모드매개변수 피팅오차에 보다 강건하다고 결론지을 수 있다.



(a) Conventional modal model method using inverse of modal matrix



(b) Modal model method using MRMV



(c) Modal model method using Reduced form of MRMV

Fig. 11 Comparison of three modal model methods in input force estimations for 1% of fitting error in the first mode shape vector

4.3 측정오차 수치실험

다음 이들 3가지 모드필터중 어느 것이 응답 측정 오차에 보다 강건한지를 보이기 위해 다른 비교 수치실험을 수행했다. Fig. 2의 보를 실제 운전 입력점 3점에서 인위적으로 가진하면서 9점에서 응답으로 가속도신호를 생성 수집하였다. 그리고 측정 오차를 모사하기 위해 소정의 랜덤오차를 다음과 같이 부가하였다.

$$N/S = 0.0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, \& 0.4$$

다음 측정된 가진신호와 오차가 포함된 응답신호

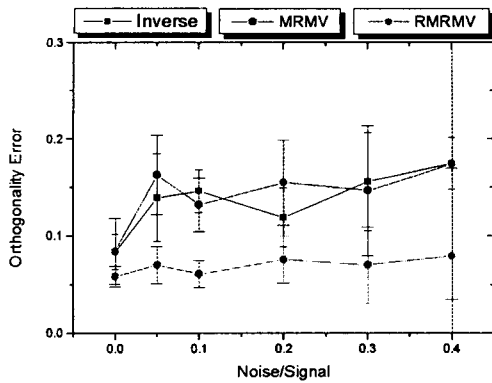


Fig. 12 Orthogonality errors of three modal filters in estimations from noise added inertance FRF's

로부터 FRF를 계산하고, 이에서 위의 3가지 모드필터를 계산하였다. 계산된 모드필터의 우수성은 직교오차를 정의하여 비교하였다. 이산모드필터는 식 (27)과 같이 역모드벡터로 정의된 것이므로 적절한 크기 조정을 취하고 나면 다음식을 만족하여야 한다

$$[\Psi]^T [\Phi]_{true} = [I] \quad (33)$$

따라서 직교오차는 식 (33)으로 정의하였다.

$$\text{Orthogonality Error} \equiv \sum_{i,j} |([\Psi]^T [\Phi]_{true} - [I])_{i,j}| \quad (34)$$

이 식으로 계산한 직교오차를 Fig. 12에 비교해 보았다. 이를 보면 RMRMV가 $[\Phi]$ 나 MRMV보다 더 작은 직교오차를 보이고 있다. 이 결과로부터 RMRMV가 셋 중에서 측정오차에 가장 강건한 모드필터라는 결론을 얻을 수 있다.

5. 결 론

간접적 입력규명방법 중 모드모형방법의 장점을 FRF행렬의 직접역행렬방법에 비교하여 언급하였다. 즉, 이 방법은 운전중 입력점들이 계규명단계에 인위적 가진이 불가능한 경우에도 확장 적용될 수 있다. 확장된 모드모형방법의 절차를 확립하였고 그 타당성을 수치실험으로 검증하였다. 그리고, 고유치와 모드벡터의 오차가 입력규명에 미치는 영향을 분석하여, 모드벡터의 오차를 모드모형방법의 가장 큰 오차요인으로 추정하였다. 다음 모드행렬의 역변환과정의 대안으로 이산모드필터를 이용하였다. 마지막으로 다중입력을 규명하는 보다 나은 방법으로 MRMV대신에 RMRMV를 제시하였으며, 피팅된

모드매개변수에 의도적인 오차를 추가한 수치실험으로 그 유효성을 보였다. 더욱이 측정오차를 모사한 다른 수치 실험을 통해 RMRMV가 MRMV보다 측정오차에도 보다 강건함을 보였다.

후 기

본 논문은 한국과학재단의 지원(No. 95-0200-22-3)을 받아 수행한 연구의 결과입니다.

참 고 문 헌

- (1) B. J. Dobson, and E. Rider, 1990, "A Review of the Indirect Calculation of Excitation Forces From Measured Structural Response Data," Proc. Instn. Mech. Engrs. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 204, pp. 69~75.
- (2) M. C. Han, 1991, "Improved Approaches to the Indirect Force Determination Problems via Experimental Modal Analysis," Ph.D. Dissertation, Virginia Polytec.
- (3) G. Desanghere, and R. Snoeys, 1985, "Indirect Identification of Excitation Forces by Modal Coordinate Transformation," Proceedings of the 3rd IMAC, pp. 685~690.
- (4) S. J. Shelley, and R. J. Allemang, 1992, "Calculation of Discrete Modal Filters Using the Modified Reciprocal Modal Vector Method," Proceedings of the 10th IMAC, pp. 37~45.
- (5) D. J. Ewins, 1984, Modal Testing: Theory and Practice, pp. 246~251, Research Studies Press.
- (6) L. Meirovitch, and H. Baruh, 1982, "Control of Self-Adjoint Distributed-Parameter Systems," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 5, pp. 60~66.
- (7) Q. Zhang, R. J. Allemang, and D. L. Brown, 1990, "Modal Filter: Concept and Applications," Proceedings of the 8th IMAC, pp. 487~496.
- (8) LMS International, 1992, LMS CADA-X User Manual.
- (9) R. J. Allemang, D. L. Brown, and W. Fladung, 1994, "Modal Parameter Estimation: A Unified Matrix Polynomial Approach," Proceedings of the 12th IMAC, pp. 501~514.