

〈논 문〉

# 단순지지된 Steel 및 GFRP 복합재료 원통셀의 자유진동 특성

## Free Vibration Characteristics of the Steel and GFRP Composite Cylindrical Shells with Simply Supported Conditions

이 영 신\* · 최 명 환\*\* · 신 도 섭\*\*\*

Lee, Young-Shin, Choi, Myoung-Hwan and Shin, Do-Seob

(1998년 9월 12일 접수 : 1999년 1월 9일 심사완료)

**Key Words** : Free Vibration( 자유진동 ), Cylindrical Shell( 원통셀 ), Simple Support ( 단순지지 ), Natural Frequency( 고유진동수 ), Mode Shape( 모드형상 ), GFRP Composite(유리섬유강화 플라스틱 복합재료)

### ABSTRACT

The cylindrical shells are used as primary components of complex structures such as airplane fuselages and nuclear pressure vessels. Recently the free vibration analysis of these structures are investigated by many researchers. The engineering informations on experimental validation of the free vibration behavior on the simply supported cylindrical shells are very few. The experimental methods for realizing the physical boundary condition of simply supported edges are examined. Natural frequencies and mode shapes of the isotropic and plain weave composite simply supported shells are obtained by modal tests. A theoretical and finite element analysis are also performed in order to validate the experimental results. The experimental results indicate that the simply supported boundary conditions with bolts along the circumferential direction of shell in both ends are well achieved. Those are shown to agree with the analytical results and with the finite element analysis results. These methods can be used to realize other experimental simple support boundary conditions.

### 1. 서 론

산업현장에서 여러 구조물들은 사용용도에 따라 다양한 형상을 가지고 있다. 이러한 형상 중 비강도

및 비강성이 높은 원통셀은 항공기의 동체, 로켓, 원자력 구조등의 복잡한 구조물의 주된 구조요소로 사용되고 있으며, 이들 구조물의 하중 전달요소로서 아주 중요한 역할을 하고 있다. 따라서 원통셀 문제는 많은 연구자들에 의해 연구되어 왔으며, 다양한 경계조건 및 하중하에서의 정적 혹은 동적문제 등에 대해 활발히 연구되어지고 있다. 이중에서도 단순지지 경계조건을 갖는 원통셀의 진동해석을 위한 이론해는 경계조건을 만족하는 함수의 형태가 비

\* 정회원, 충남대학교 기계설계공학과  
\*\* 정회원, 충남대학교 기계설계공학과  
\*\*\* 충남대학교 기계설계공학과 대학원

교적 간단하기 때문에 쉘을 연구하는 사람이면 누구나 친숙한 문제라 생각된다. 그러나 실험적 방법에만 의한 단순지지 원통셸의 제시된 연구결과는 많지 않기 때문에 물리적인 단순지지 구현 장치의 구성 및 이를 통한 원통셸 모델의 진동특성 규명이 필요하게 되었다.

1973년 Leissa<sup>(1)</sup>는 다양한 형상 및 경계조건을 갖는 원통셸의 진동에 대한 연구결과를 제시하였고, Yamane<sup>(2)</sup>는 Donnell의 이론을 채용하여 단순지지된 원통셸의 진동특성을 연구하였는데 넓은 범위의 반경/두께비에 따른 원주방향 38차까지의 반파수에 대한 고유진동수를 제시하였다. 원통셸의 강성증가의 한 방법으로서 보강에 대한 연구가 수행되었고, Sewall 등<sup>(3-4)</sup>은 실험과 이론해를 통하여 길이방향 보강재나 링 보강된 원통셸의 자유진동 특성을 연구하였다. 그는 원통셸의 진동실험에서 날카로운 끝단을 갖는 링지지를 통하여 단순지지 경계조건을 구현하였다. Nizecki 등<sup>(5)</sup>은 단순지지된 실린더의 구현 및 검증에 대한 연구에서 유사한 다섯 가지 시험모델을 제시하였고, 실험결과는 Love's 이론에 기초한 이론해 및 I-DEAS를 이용한 유한요소해석 결과와 비교함으로써 실험모델을 검증하였다. 최근들어 등방성 재료에 비하여 여러 기계적 특성이 우수한 복합재료가 구조물에 많이 채용되면서 복합재료 원통셸에 대한 연구가 활발히 수행되고 있다. 이영신 등<sup>(6-9)</sup>은 복합재료 원통셸의 고유진동 해석 및 좌굴해석에 대하여 다양한 연구를 수행하였고, 최근에는 직교보강된 회전하는 복합재료 원통셸의 진동해석을 수행하였다<sup>(10)</sup>. 따라서 복합재료 원통셸의 보강이나 경계조건이 진동에 미치는 영향 등에 대한 많은 공학적 정보가 필요하게 되었다<sup>(11)</sup>.

본 연구에서는 단순지지 경계조건을 구현하기 위하여 실험장치를 물리적으로 어떻게 구성하였는가에 대하여 기술하였고, 실험결과를 통하여 경계조건 구현의 신뢰성을 평가하였다. 실험결과들의 비교/검증을 위하여 Love's 셸이론에 기초하여 에너지법과 Rayleigh-Ritz법을 이용한 이론해석 및 ANSYS를 이용한 유한요소해석을 수행하였으며, 이들 세 해석결과를 통한 단순지지 원통셸의 진동특성에 대하여 고찰하였다. 또한 실험결과인 고유진동수 및 모드형상을 통하여 여러개의 볼트를 이용한 단순지지 경계조건의 구현과 실험결과와의 정확성을 확인하였고, 단순지지 경계조건 구현의 개선방안에 대하여 언급하였다.

## 2. 수식화

본 연구에서 고려한 원통셸에 대한 기하학적 형상을 Fig. 1에 나타내었으며, 원통셸은 길이  $L$ , 두께  $h$ , 그리고 반경  $R$ 을 갖는다. 원통셸의 좌표계도  $x, \theta, z$  의 원통좌표계를 사용하였고,  $x$ 는 축방향,  $\theta$ 는 원주방향 그리고  $z$ 는 수직방향을 나타내며, 각 방향 변위성분은  $u, v, w$ 로 표현하였다.

고려된 원통셸은 반경에 비해 두께가 얇기 때문에 평면응력 상태로 가정하여 변형에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (N_x \epsilon_x + N_\theta \epsilon_\theta + 2N_{x\theta} \epsilon_{x\theta} + M_x \kappa_x + M_\theta \kappa_\theta + 2M_{x\theta} \kappa_{x\theta}) R d\theta dx dz \quad (1)$$

여기서  $N_i$  와  $M_i$  ( $i = x, \theta, x\theta$ )은 단위 길이당 합응력(stress resultants) 및 합모멘트(moment resultants)로서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}_b dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}_b dz \quad (2)$$

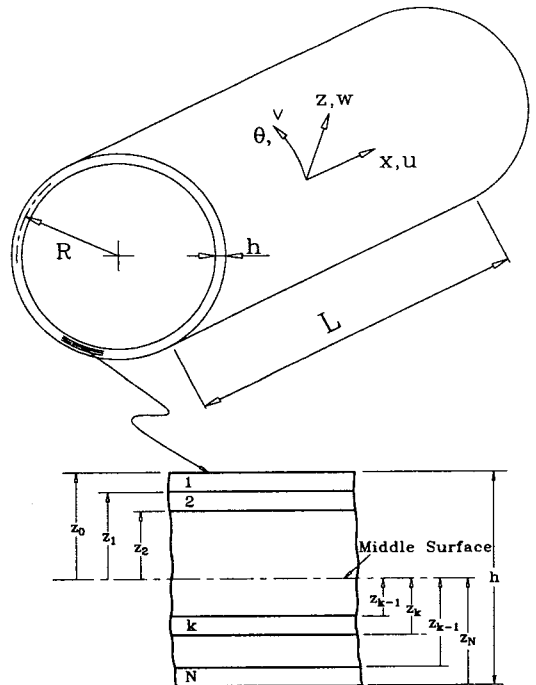


Fig. 1 Geometry and coordinate system of the circular cylindrical shell

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (3)$$

여기서  $z_{k-1}$  및  $z_k$  는 셀의 중앙면에서  $k$  번째 층의 상·하면까지의 거리,  $N$  은 층 적층수를 나타내며,  $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}$  는 각 방향에 대한 응력성분이다. 복합재료 원통셀에 대한 응력-변형률(stress-strain) 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_\theta^o \\ \epsilon_{x\theta}^o \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Love의 1차 근사이론에 의해 변형률 성분은 두께 방향  $z$  의 함수로 정의 된다.

$$\epsilon_x^o = \epsilon_x + z\chi_x \quad (5a)$$

$$\epsilon_\theta^o = \epsilon_\theta + z\chi_\theta \quad (5b)$$

$$\epsilon_{x\theta}^o = \epsilon_{x\theta} + z\chi_{x\theta} \quad (5c)$$

여기서 원통셀 중앙면의 변형률  $\epsilon_x, \epsilon_\theta, \epsilon_{x\theta}$  및 곡률  $\chi_x, \chi_\theta, \chi_{x\theta}$  는 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon_x = u_{,x}, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{R}(v_{,\theta} + w),$$

$$\epsilon_{x\theta} = \frac{1}{R}(u_{,\theta} + v_{,x}) \quad (6a)$$

$$k_x = -w_{,xx}, \quad k_\theta = -\frac{1}{R^2}(w_{,\theta\theta} - v_{,\theta}),$$

$$k_{x\theta} = -\frac{1}{R}(2w_{,x\theta} - v_{,x}) \quad (6b)$$

식 (4)~(6)의 관계식을 식 (2)와 (3)에 대입하면 다음과 같은 구성방정식(constitutive equation)을 얻는다<sup>(12)</sup>.

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ \dots \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{ij} : B_{ij} \\ \dots \\ B_{ij} : D_{ij} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_i \\ \dots \\ \chi_i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서  $A_{ij}, B_{ij}$ 와  $D_{ij}$ 는 복합재료 적층재의 신장강성계수(extensional stiffness), 연성강성계수(coupling stiffness) 그리고 굽힘강성계수(bending stiffness)이며, 이들은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz \quad (8)$$

여기서  $(\bar{Q}_{ij})_k$  는 변환축소강성계수(transformed reduced stiffness)이고,  $z_k$ 는 중앙면에서  $k$  번째 층까지의 거리이다. 식 (8)에서 기준좌표계의  $x$  축을  $0^\circ$  섬유방향과 일치하도록 선택하는 경우,  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ 가 되며, 대칭으로 적층된 경우  $B_{ij} = 0$ 가 된다. 본 연구에서 고려된 복합재료는 모두 대칭 적층된 경우만을 고려하였기 때문에 연성강성계수  $B_{ij} = 0$ 이고, 복합재료 원통셀에 대한 식 (1)의 변형에너지는 강성계수  $A_{ij}, D_{ij}$ 를 이용하여 아래와 같이 재구성할 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} [A_{11}\epsilon_x^2 + 2A_{12}\epsilon_x\epsilon_\theta + A_{22}\epsilon_\theta^2 + A_{66}\epsilon_{x\theta}^2 + D_{11}\chi_x^2 + 2D_{12}\chi_x\chi_\theta + D_{22}\chi_\theta^2 + D_{66}\chi_{x\theta}^2] R d\theta dx \quad (9)$$

또한 원통셀에 대한 운동에너지는 회전관성 모멘트 항을 무시하여 식 (10)과 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \rho_i \int_0^L \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R d\theta dx \quad (10)$$

여기서  $\rho_i = \sum_{k=1}^N \rho_k h_k$ 이며,  $\rho_k$ 와  $h_k$ 는  $k$  번째 층의 밀도와 두께이고,  $(\cdot)$ 는 시간에 대한 미분을 나타낸다.

축방향 구속력( $N_x$ )이 없는 원통셀의 양단 단순지지 경계조건은 다음과 같은 수학적식으로 표현될 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$v = w = M_x = N_x = 0 \quad \text{at } x = 0, L \quad (11)$$

경계조건을 만족하는 변위함수의 가정은 축방향 모드에 대하여 빔모드 함수를 사용하였으며<sup>(13,14)</sup>, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(x, \theta, t) = U_{mn} \cos \frac{m\pi}{L} x \cdot \cos n\theta e^{i\omega_{mn}t} \quad (12a)$$

$$v(x, \theta, t) = V_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \cdot \sin n\theta e^{i\omega_{mn}t} \quad (12b)$$

$$w(x, \theta, t) = W_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \cdot \cos n\theta e^{i\omega_{mn}t} \quad (12c)$$

여기서  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$ 는 각 방향의 최대진폭을 나타내고,  $\omega_{mn}$ 은 진동모드  $(m, n)$ 에서의 각 진동수를 나타낸다.

원통셀에 대한 총에너지는 변형에너지와 운동에너지의 합으로 표현되고, Lagrange's 함수를 도입하면 다음과 같이 표현된다.

$$L = U - T \quad (13)$$

식 (13)에 다음의 Rayleigh-Ritz 과정을 적용하면

$$\frac{\partial L}{\partial U_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial V_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial W_{mn}} = 0. \quad (14)$$

이고, 미지의 진폭항으로 정리하면 다음과 같은 행렬형태의 지배방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \rho h \omega_{mn}^2 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} - \rho h \omega_{mn}^2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} - \rho h \omega_{mn}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

식 (15)에서 고유벡터  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} \neq 0$  이어야 하므로, 유용해를 갖기 위해서는 계수행렬의 행렬식이 다음과 같이 0 이 되어야 한다.

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \rho h \omega_{mn}^2 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} - \rho h \omega_{mn}^2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} - \rho h \omega_{mn}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

식 (16)을 전개한 후 수치적으로 풀어 단순지지된 원통셀의 고유진동수를 얻는다.

### 3. 진동실험

#### 3.1 실험시편 및 장치

실험을 통한 단순지지된 강 및 복합재료 원통셀의 진동해석을 위하여 원통셀 시편을 제작하였고, Table 1에는 시편에 대한 기하학적 형상데이터를 나타내었다. 시편은 길이가 다른 두 스테인레스강 (Case I & II)과 유리섬유강화(GFRP) 복합재료로서 적층각 및 적층순서는  $[90_8^{\circ}/0_4^{\circ}]_s$ 와  $[0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ}/90_3^{\circ}]_s$ 이며, 각각 Case III와 Case IV로 분류하였다. 본 실험

Table 1 Dimensions of the specimens (Unit : mm)

Specimen	Case I	Case II	Case III	Case IV
Radius(R)	60	60	109	109
Length(L)	200	400	360	360
Thickness(h)	1.6	1.6	4.8	3.5
Material	Steel	Steel	GFRP	GFRP

에서 채용한 GFRP 복합재료 원통셀은 제작의 용이성을 고려하여 평직(plain weave)으로 제작하였다. 평직구조는 xy평면에서 x방향을 fill방향, y방향을 warp방향이라고 하는데 이들 섬유 방향과 fill방향과 warp방향에 대한 물성은 같다<sup>(15)</sup>.

고유진동수 및 모드형상을 얻기 위한 진동실험은 모달시험에 주로 사용되는 충격해머와 가속도계를 사용한 충격가진법을 이용하였다. 사용한 실험장비는 두 채널을 갖는 주파수분석기(FFT), 충격해머, 가속도계 그리고 응답의 증폭을 위한 증폭기 등이 있고, 가속도계는 왁스를 사용하여 시편에 부착하였다.

#### 3.2 경계조건의 구현

진동실험에 사용된 시편 고정용 장치로는 강체 구조물인 베드(bed)와 지그(jig)가 있다. 베드 구조물은 1000 mm × 800 mm × 100 mm 크기의 방진 뎀퍼를 갖는 800 kgf의 강체 구조물로 다양한 시편 및 지그의 착탈을 위해 50 mm 간격의 T 슬롯으로 구성되어 있다.

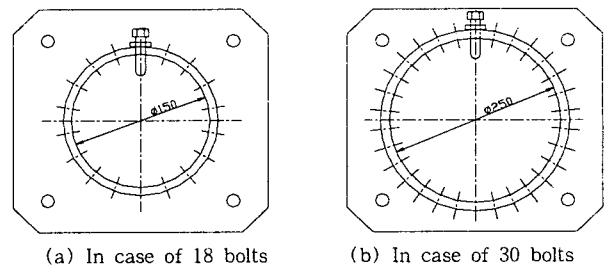
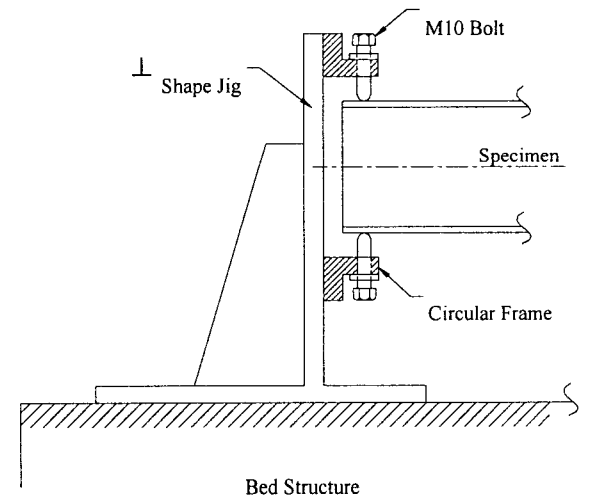


Fig. 2 Schematic diagram of simply supported boundary conditions

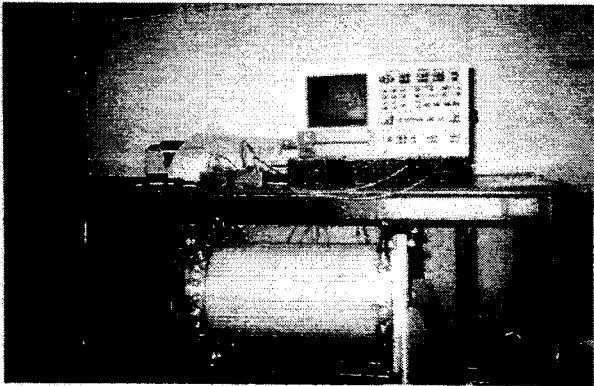


Fig. 3 Photograph of the experimental setup and cylindrical shell specimen

원통셸 양단의 단순지지 경계조건을 구현하기 위하여 사용한 방법은 셸의 끝단에서 원주방향 외표면을 따라서 18개(Case I & II) 혹은 30개(Case III & IV)의 지지 볼트를 이용하는 것이다. Fig. 2에는 여러개의 볼트와 지그를 이용한 원통셸 양단에서의 단순지지 경계조건 구현의 개념도를 나타내었다. 우선 원통셸이 들어갈 수 있는 원형 홈을 갖는 프레임(frame)을 Fig. 2(a), (b)와 같이 설계/제작하였다. 이 프레임의 원형 홈 내경은 18개와 30개의 볼트를 사용하는 경우 각각 150 mm와 250 mm이다. 원형 프레임에는 등간격의 M 10 볼트를 체결할 수 있는 암나사가 내어져 있고, 프레임의 외부에서 중심을 향하여 볼트를 조임으로서 셸의 외표면을 수직 방향으로 지지할 수 있도록 하였다.

원형 프레임을 고정하기 위하여 '⊥' 자형 지그를 제작하였고, 이 지그의 상단에 프레임을 수평방향으로 볼트를 이용하여 체결하였다. 베드의 T 슬롯에는 6개의 M 10 고정볼트를 수직방향으로 끼우고, '⊥' 자형 지그의 하단을 베드에 끼워진 볼트를 체결하여 고정하였다. Fig. 3은 실험지그 및 원통셸 시험편을 나타낸 사진이다.

### 3.3 실험방법

단순지지 원통셸의 진동실험은 FFT를 이용한 주파수분석으로 수행되었고, 실험에 앞서 모드형상을 결정하기 위하여 시편에 길이방향과 원주방향으로의 가진점을 표시하였다. 충격 가진법에서는 충격해머에 의한 가진이 입력신호로 들어가고, 가속도계의 응답신호가 주파수분석기에 입력되어 전달함수의 피크 응답이 일어나고, 위상각이 바뀌는 곳에서 고유진동수가 결정된다. 이때 주파수응답곡선은 8회의

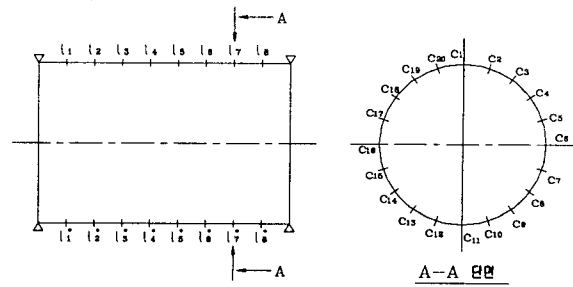


Fig. 4 Exciting and measuring point to determine mode shapes of the simply supported shell by experiment

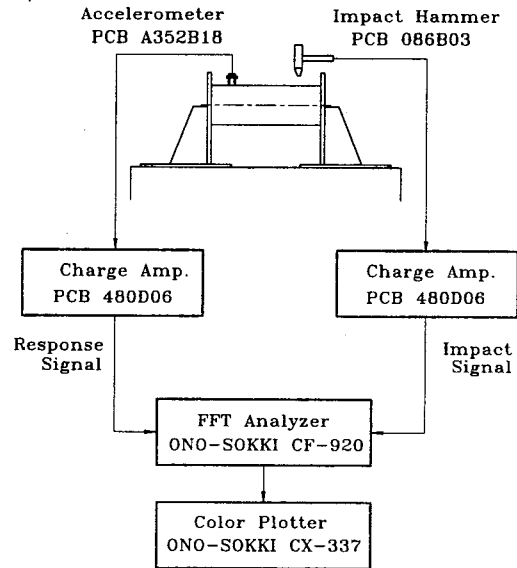


Fig. 5 Block diagram for the experimental system

가진을 통한 응답신호를 평균함으로써 얻었다.

실험으로 결정한 단순지지 원통셸의 고유진동수에서 구조물이 어떤 모드로 거동하는가를 모드형상을 통하여 입증할 필요가 있다. 실험을 통하여 모드형상을 결정하는 데에는 시편을 가진하여 상대변위를 얻고자 하는 가진점을 결정해야 하고, 주파수응답곡선에서 고유진동수를 결정해야 한다. 이때 좀 더 정확한 모드형상을 얻기 위해서는 많은 점에서의 응답을 알 필요가 있으나, 너무 많아지게 되면 실험시간이 오래 걸리고 데이터 처리에 어려움이 있다. 따라서 본 연구에서는 단순지지 원통셸의 모드형상을 얻기 위하여 길이방향 8 점과 원주방향 20 점의 가진점을 이용하였다. 모드형상은 예상되는 변위가 발생하지 않는 노달라인(nodal line)을 피하여 가속도

계를 부착하고, 각 절점을 가진하여 주파수응답곡선의 허수부에서 상대변위를 결정하고 이들을 연결하여 결정하였다. Fig. 4는 실험에서 모드형상을 결정하기 위하여 표시한 측정점을 나타내었고, Fig. 5는 진동실험의 개략도를 나타내었다

#### 4. 유한요소해석

실험을 통하여 결정한 고유진동수 및 모드형상의 비교·검토를 위해서 상용 유한요소 프로그램인 ANSYS<sup>(16)</sup>를 이용한 해석을 수행하였다. 유한요소 모델링은 등방성 재료인 스테인레스강 원통셀의 해석을 위해 4절점 탄성 셀요소(SHELL 63)와 복합재료 해석을 위하여 절점당 6자유도를 갖는 적층 셀요소(SHELL 99)를 사용하였다. 원통셀에 대한 유한요소 모델의 생성은 길이방향 20개와 원주방향 28개의 메쉬로 모델링하였다. 모델에 대한 전체 절점과 요소수는 각각 1736개와 560개이다. 또한 모달해석은 모드형상의 왜곡현상을 방지하기 위하여 부공간(subspace)법을 이용하였고, 유한요소 해석에서 경계조건은 실험 조건과 동일하게 셀의 양단에서 축방향 변위는 허용하고, 원주방향 및 수직방향 변위는 구속하는 것으로 고려하였다.

#### 5. 결과 및 고찰

진동실험을 통하여 단순지지된 등방성 및 복합재료 원통셀의 고유진동수와 모드형상을 결정하였고, 결과들은 이론해 및 유한요소해석 결과와 비교/고찰하였다. 제작된 시편들은 스테인레스강과 평직 GFRP 복합재료로서 이들의 기계적 물성값을 Table 2에 나타

Table 2 Material properties of the steel and GFRP composite cylindrical shell

Properties	Unit	Stainless Steel	GFRP
Young's modulus ( $E_1$ )	GPa	207.0	26.2
Young's modulus ( $E_2$ )	GPa	207.0	26.2
Shear modulus ( $G_{12}$ )	GPa	80.0	4.9
Density ( $\rho$ )	kg/m <sup>3</sup>	7860.0	1880.0
Poisson's ratio ( $\nu_{12}$ )	-	0.29	0.12

내었다. 등방성 재료인 스테인레스강의 물성은 일반적으로 널리 사용되는 값을 사용하였으며, GFRP 복합재료의 물성은  $[0^\circ]$ 와  $[\pm 45^\circ]$  평직 인장시편에 스트레인 게이지를 부착한 후 인장시험을 통하여 결정하였다. 인장시험을 통하여 구한 물성은 fill과 warp방향의 탄성계수( $E_1, E_2$ ), 프와송 비( $\nu_{12}$ ) 그리고 전단탄성계수( $G_{12}$ )이고, 반경에 비해 두께가 얇은 원통셀은 평면응력 상태로 고려할 수 있기 때문에 두께 방향의 물성인  $E_3, G_{13}, G_{23}, \nu_{13}$  그리고  $\nu_{23}$ 은 무시된다. Naik<sup>(15)</sup>는 평직 복합재료의 물성 결정법과 관련 재료의 물성에 대하여 연구하였다.

#### 5.1 등방성 원통셀

단순지지된 등방성 원통셀에 대한 이론해의 비교를 위하여, 기존 연구자들에 의해서 수행된 실험이나 이론해의 결과들을 인용하여, Table 3과 Fig. 6에 나타내었다. Sewall 등<sup>(3)</sup>은 길이방향 보강재의 유무에 따른 실험과 이론적인 방법으로 원통셀의 진동연구를 수행하였으며, 실험에서 단순지지 경계조건을 구현하기 위하여 양단 고정판에 원주방향으로 셀의 직경에 맞추어 홈을 파고, 홈의 내부와 외부에 끝단이 날카로운 링을 고정하여 이들 링이 원통셀의 양단을 지지할 수 있도록 하였다. Table 3에 보강재가 없는 단순지지 원통셀의 Sewall 등의 실험결과와 Love의 이론을 채용한 본 이론해의 결과를 함께 나타내었다. 이론해석 결과 기본진동수는 166.2 Hz로

Table 3 Comparison of natural frequencies of the simply supported isotropic cylindrical shell ; ( $L=609.6$  mm,  $R=242.3$  mm,  $h=0.648$  mm,  $E=68.95$  GPa,  $G=26.2$  GPa,  $\nu=0.315$ ,  $\rho=2700$  kg/m<sup>3</sup>)

n	Present Analysis		Ref. (3) Experiment		Error ( $m=1$ )
	m=1	m=2	m=1	m=2	
1	1579.4	2705.0	-	-	-
2	824.4	1892.4	-	-	-
3	461.6	1292.6	-	-	-
4	287.6	900.8	287.0	-	0.2
5	201.8	651.6	203.0	-	-0.6
6	166.6	493.6	175.0	-	-5.0
7	166.2	396.8	163.0	-	1.9
8	189.3	345.1	188.0	345.0	0.7
9	226.9	329.3	224.0	-	1.3
10	274.1	341.8	268.0	339.0	2.2
11	328.6	375.0	326.0	370.0	0.8
12	389.5	423.1	385.0	411.0	1.2

길이방향과 원주방향 반파수  $(m, n) = (1, 7)$  모드에서 나타났으며, Sewall 등의 실험결과에서도  $(1, 7)$  모드에서 163 Hz를 얻었다. 이들 두 결과는 기본진동수에서 약 2%의 오차를 보였고, 전체적으로 길이방향 1차 모드에 대하여 최대 5.0%의 오차 범위 내에서 잘 일치하였다.

Fig. 6은 Niezrecki 등<sup>(5)</sup>의 실험 및 이론해의 결과와 본 연구결과의 비교를 나타낸다. Niezrecki 등은 단순지지 경계조건 구현을 위하여 다섯 가지의 서로 다른 형태를 갖는 시험지그를 제작하여 실험하였다. 그들은 두 개의 얇은 원환쇄기(annular shim)와 양단 고정판을 이용하여 단순지지를 구현하였다.

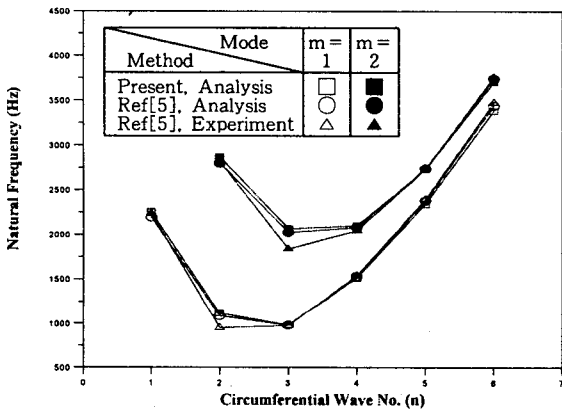


Fig. 6 Comparison of natural frequencies of the simply supported isotropic cylindrical shell :  $(L = 406.4 \text{ mm}, R = 247.65 \text{ mm}, h = 6.35 \text{ mm}, E = 64 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 2700 \text{ kg/m}^3)$

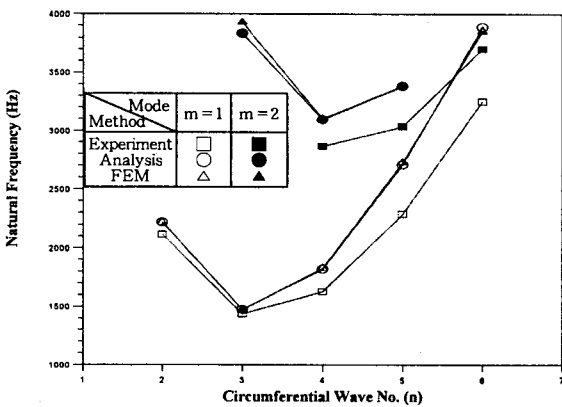


Fig. 7 Comparison of natural frequencies of experimental, analytical and FEM results for the simply supported isotropic cylindrical shell (Case I)

본 이론해의 결과는 그들의 이론해와 5%이내의 오차범위에 있었으며, 실험결과와는  $(1, 2)$ 와  $(2, 3)$ 모드에서 약 14%의 오차를 보였으나 다른 모드에서는 서로 좋은 일치를 보여 이론해의 정확성을 확인할 수 있었다.

Fig. 7은 길이 200 mm, 반경 60 mm 그리고 두께 1.6 mm의 단순지지된 스테인레스강 원통셸의 진동실험, 이론해 그리고 유한요소해석 결과로서 처음 8차까지의 원주방향 반파수( $n$ )에 따른 고유진동수를 나타내었다. 또한 Fig. 8은 진동실험을 통하여 얻은 주파수분석기에서의 위상각과 주파수 응답곡선의 결과를 나타내었다. 기본진동수는 원주방향 3차 모드  $(1, 3)$ 에서 1437.5 Hz로 나타났으며, 길이방향 2차 모드가 처음 나타나는 것은 2862.5 Hz로 원주방향  $n=4$  모드를 보였다. 구조물의 공진 측면에서 관심이 있는 기본진동수는 실험과 이론해 결과가 2.5%의 오차로 잘 일치하였고, 고차 모드로 갈수록 실험 결과는 이론해나 유한요소해석 결과보다 낮은 값을 갖고, 오차가 약간씩 증가하였다.

Case I 모델과 비교하여 길이가 400 mm로 길어지는 것 이외에 다른 조건은 동일한 모델의 해석결과를 Fig. 9에 나타내었다. 이때 기본진동수는  $n=2$  모드에서 712.0 Hz이고, 길이가 2배 길어지면서 진동수가 약 1/2로 줄어든 값이다. 또한 길이변화에 따른 영향으로 기본진동수에서의 원주방향 모드가  $n=3$ 에서 2로 바뀌어 나타나, 길이가 길어지면 원주방향 셸 모드의 특성이 줄어들고 길이방향 빔 모드로 접근함을 알 수 있다. 이러한 경향은 길이방향 고차 모드에서도 발생하여  $m=2$  일때 원주방향 모드가  $n=4$ 에서 3 모드로 이동하였고, Case I 모델에

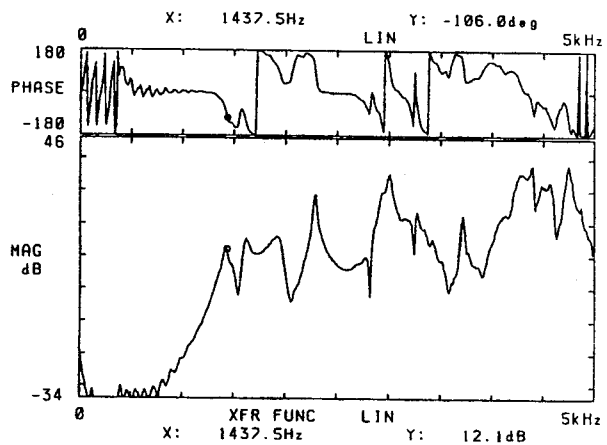


Fig. 8 Frequency response function for the simply supported isotropic cylindrical shell (Case I)

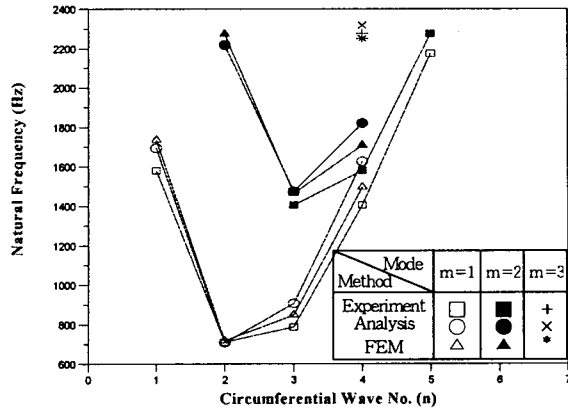


Fig. 9 Comparison of natural frequencies of experimental, analytical and FEM results for the simply supported isotropic cylindrical shell (Case II)

서는 나타나지 않았던  $m=3$  모드가 길이가 길어지면서 나타났다.

반경 60 mm의 등방성 원통셀에 대한 진동해석 결과, 전반적으로 실험결과는 이론해와 유한요소해석 결과보다 약간 낮은 고유진동수를 보였다. 이것은 일반적으로 Rayleigh-Ritz법을 적용하여 계산된 고유치가 상한계(upper bound) 값을 갖는 특성이 있어<sup>(17)</sup>, 실제의 고유진동수보다 약간 높은 값을 갖는 것으로 보인다. 또한 실험결과는 고차 진동수로 갈수록 이론해나 유한요소해석 결과와 비교할 때, 오차의 범위가 커지고 있음을 알 수 있다. 이것은 고차 진동수로 갈수록 원통셀의 원주방향 모드수가 증가하게 되는데, 18개의 볼트 지지가 고차모드에서의 진동수를 얻기에는 충분하지 못하기 때문으로 생각된다. 이와같은 고차 모드에서의 실험오차를 줄이기 위해서는 특정한 직경을 갖는 모델로 제한되는 단점이 있지만 Sewall 등<sup>(3)</sup>이 채용한 링 형태로서 원주방향으로 연속적인 지지조건을 구현하는 것이 비교적 정확한 것으로 판단된다. 또한 본 연구에서 채용한 것처럼 볼트를 이용하여 셀의 양단을 지지하는 경우에는 볼트의 크기를 줄이고, 볼트 개수를 많이 한다면 고차 진동수에서의 오차를 줄일 수 있리라 생각된다.

5.2 평직 복합재료 원통셀

평직 유리섬유강화 복합재료인 Case III & IV 모델의 진동해석 결과를 Table 4와 Fig. 10에 나타내었다. Case III은  $[90_3^0/0_4^0]$ , 적층되고, Case IV는  $[0_3^0/\pm 45_3^0/90_3^0]$ , 적층된 GFRP의 경우이며, 이들 시

Table 4 Comparison of natural frequencies of experimental, analytical and FEM results for the simply supported GFRP plain weave composite cylindrical shell with  $[90_3^0/0_4^0]$ , stacking sequence (Case III)

Mode*	Experiment		Analysis		FEM	
	Freq. (Hz)	Mode (m, n)	Freq. (Hz)	Mode (m, n)	Freq. (Hz)	Mode (m, n)
1	700.0	(1,3)	700.0	(1,3)	696.7	(1,3)
2	780.0	(1,2)	772.5	(1,2)	771.7	(1,2)
3	1035.0	(1,4)	1077.8	(1,4)	1068.8	(1,4)
4	1330.0	(2,3)	1347.0	(2,3)	1343.1	(2,3)
5	1415.0	(2,4)	1407.6	(2,4)	1396.1	(2,4)
6	1587.0	(1,5)	1423.4	(1,1)	1423.4	(1,1)
7	-	-	1681.4	(1,5)	1660.0	(1,5)
8	1815.0	(2,2)	1804.0	(2,2)	1843.0	(2,2)

\* : Frequency ascending order

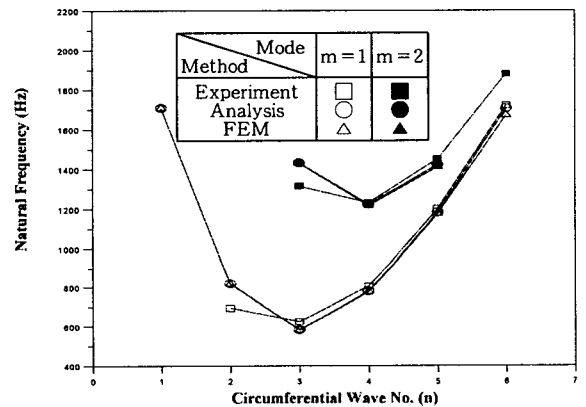


Fig. 10 Comparison of natural frequencies of experimental, analytical and FEM results for the simply supported GFRP plain weave composite cylindrical shell (Case IV)

험편의 기하학적 형상 데이터는 Table 1과 같다.

Table 4는 Case III 모델의 진동실험, 이론해와 유한요소해석 결과인 8차까지의 고유진동수 및 모드수를 함께 나타내었다. 기본진동수는 (1, 3)모드에서 700.0 Hz를 보였고, 이들 세 해석결과는 좋은 일치를 보였다. Fig. 10은 Case IV 모델의 해석결과로서 실험을 통한 기본진동수는 (1, 3)모드에서 625.0 Hz로 이론해석 결과인 583.3 Hz와 약 6.7%의 오차를 보였다. 전체적으로 등방성 원통셀에 비하여 기하학적 형상이나 재질 등의 차이로 인하여 진동수에는 차이가 있으나, 진동수의 변화 경향이나 모드수는 Case I의 등방성 원통셀과 유사한 경향을 보였



다. 이것은 셀의 길이 대 반경비,  $L/R=3.3$ 으로 Case I과 같고, 재료의 적층이 준 등방성의 적층을 갖기 때문이다. 또한 반경이 60 mm인(Case I & II)경우, 진동실험 결과는 이론해나 유한요소해석 결과와 비교하여 원주방향 고차 모드에서 오차가 증가하는 결과를 보였다. 그러나 반경이 109 mm인 원통셀의 진동실험 결과는 저차에서 약간의 오차를 보였고 원주방향 반파수의 증가에 따라서 이론해나 유

한요소해석 결과와 잘 일치하였다. 이와 같은 좋은 일치는 반경 109 mm 원통셀의 진동실험에서 경계조건을 구현하기 위해 사용한 30개의 볼트 지지단순지지를 충분히 구현하였기 때문이다.

실험에서 단순지지 구현을 위하여 사용한 볼트의 조임상태나 개수는 셀의 진동수에 영향을 미칠수 있다. 따라서 본 연구에서의 실험은 볼트가 원통셀의 표면에 닿는 순간까지만 조이고 하중은 전혀 가하지 않는 조건에서 수행되었으며, 반복적인 조임조건에 따라 기본진동수는 약 1~3 Hz 범위내의 변화를 보였다. 볼트의 조임상태와는 달리 사용볼트의 개수는 진동수에 비교적 큰 영향을 미치며, Case IV 모델에 대한 지지볼트의 개수에 따른 실험결과를 Fig. 11에 나타내었다. 지지 볼트의 개수가 비교적 적을 때에는 진동수에 차이가 있으나, 약 20개 이상 지지하게 되면 30개를 지지한 경우의 진동수 결과와 비교할 때 약 2.2%의 진동수 차이 내에서 일정해지는 결과를 얻었다.

일반적으로 진동하는 선형 탄성계의 고유한 특성을 나타내는 것이 고유진동수(고유치)라면 구조물의 상대적인 변위를 나타내는 것이 고유벡터, 즉 모드형상이다<sup>(12)</sup>. 본 연구에서 단순지지된 원통셀의 모드형상은 실험과 유한요소해석을 통하여 결정하였으며, 실험에서의 단순지지 경계조건 구현 및 각 고유

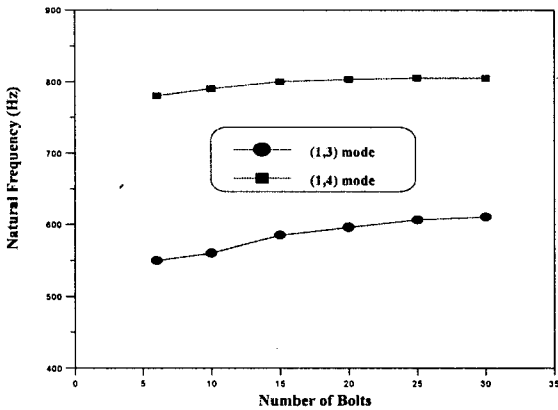


Fig. 11 Effect of the number of bolts on the natural frequencies of the simply supported GFRP plain weave composite cylindrical shell (Case IV)

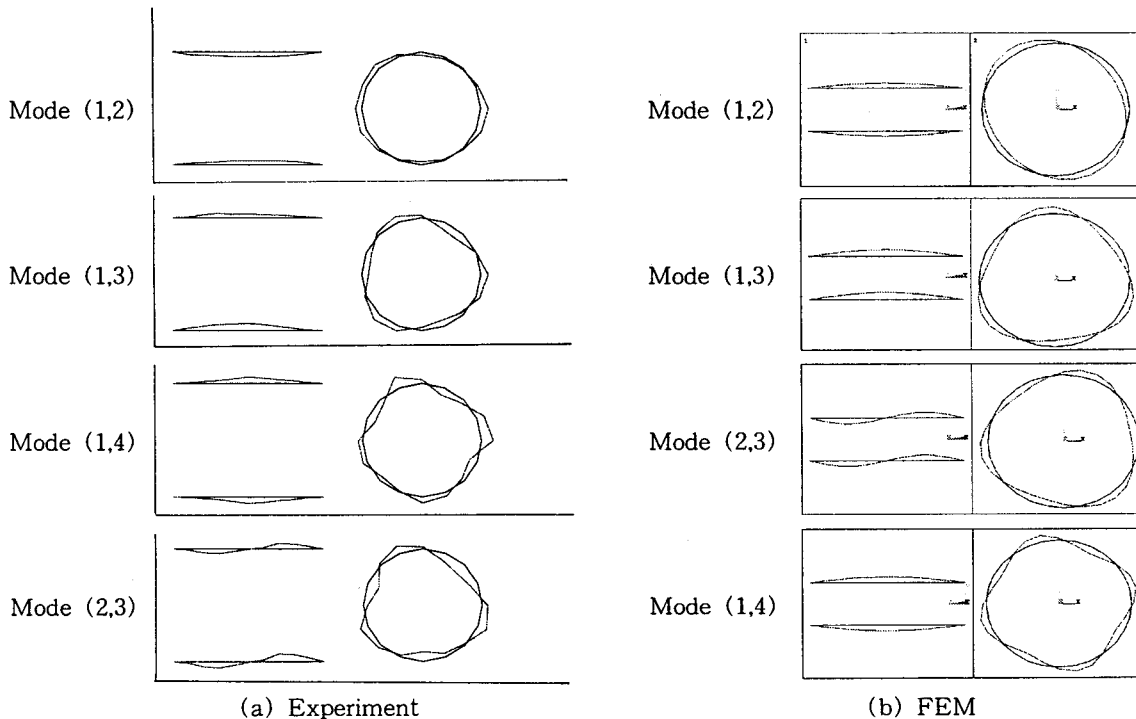


Fig. 12 Experimental and FEM mode shapes of the simply supported isotropic cylindrical shell (Case II)

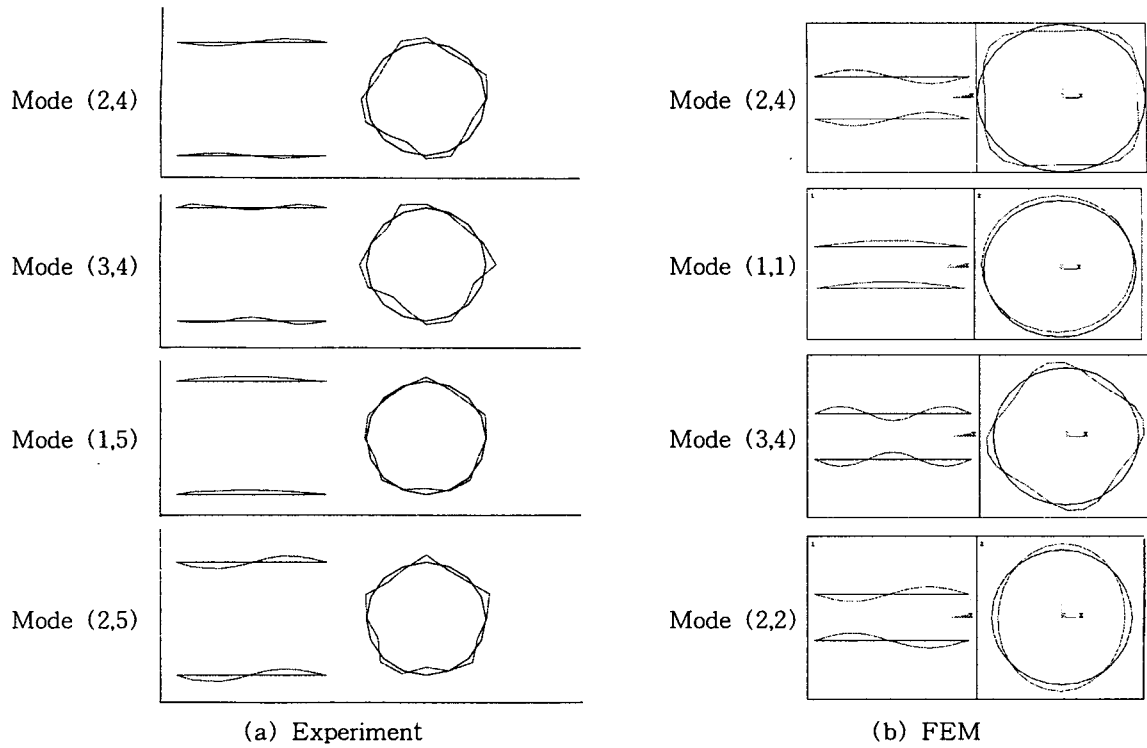


Fig. 12 Experimental and FEM mode shapes of the simply supported isotropic cylindrical shell (Case II)

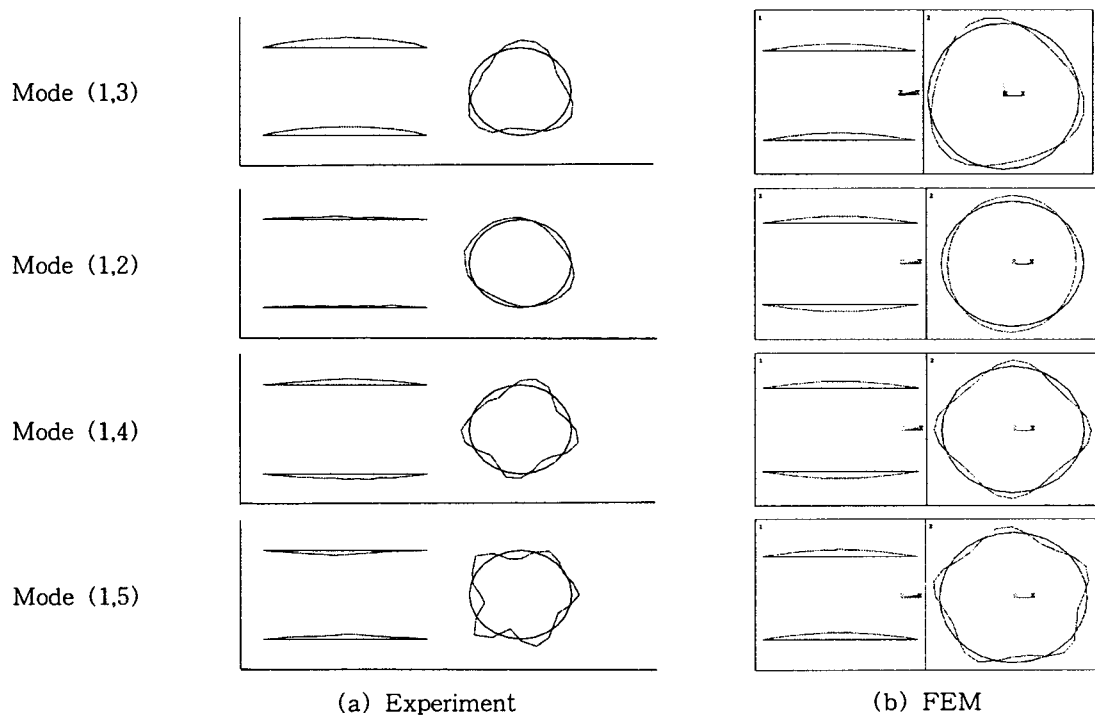


Fig. 13 Experimental and FEM mode shapes of the simply supported GFRP plain weave composite cylindrical shell with  $[0_3^0/\pm 45_3^0/90_3^0]$  stacking sequence (Case IV)

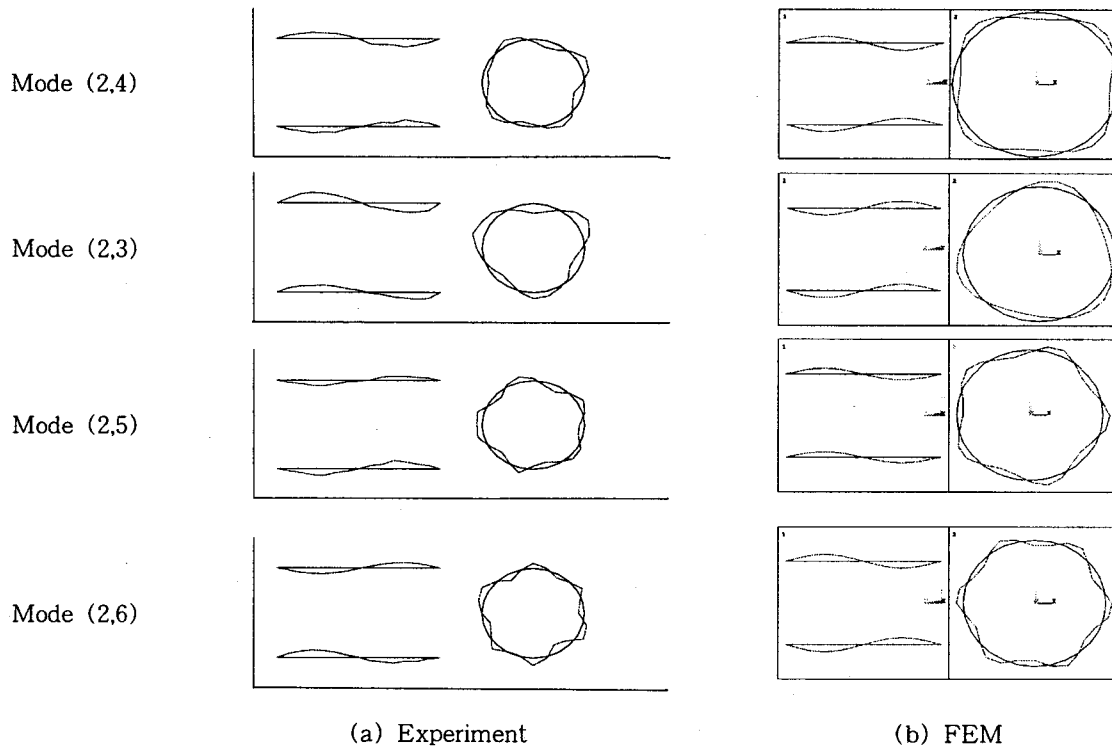


Fig. 13 Experimental and FEM mode shapes of the simply supported GFRP plain weave composite cylindrical shell with  $[0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ}/90_3^{\circ}]$ , stacking sequence (Case IV)

진동수에 대응하는 길이방향과 원주방향의 모드수를 확인하는 차원에서 제시하였다. Fig. 12와 13은 각각 Case II 와 IV 모델의 실험과 유한요소해석을 통한 길이방향 및 원주방향에 대한 모드형상을 나타내었다.

Fig. 12는 등방성 재료인 Case II 모델의 모드형상으로서 Fig. 4의 단면에 대한 각 가진점에서의 측정된 상대변위를 이용하여 나타내었다. 앞에서 언급된 것처럼 Case II 모델은 Case I에 비해 길이가 2배이기 때문에 처음 8차까지의 진동수내에 길이방향 1~3까지의 모드가 나타났고, 원주방향으로는 3차 혹은 4차의 모드를 보였다. 실험 모드형상은 유한요소해석 결과와 잘 일치하였고, 길이방향으로의 모드수가 저차에서 많이 나타나 기하형상 변화에 따른 원통셀의 거동은 빔 모드형상이 우세하다는 것을 확인할 수 있었다. Fig. 13은 단순지지된 평직 복합재료 원통셀의 길이방향  $m=1$  모드에 대한 원주방향  $n=2\sim 6$  모드,  $m=2$  모드에 대한  $n=3\sim 5$  모드의 실험과 유한요소해석을 통한 모드형상을 나타내었다. 평직 복합재료 원통셀의 모드형상은 모드순서에는 차이가 있으나 등방성 원통셀과 유사한 경향을 보였다. 이것은 복합재료 원통셀의 적층이  $[0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ}/90_3^{\circ}]$ 로서

준등방성의 성질을 갖으며 일반적으로 모드형상은 재료보다는 기하학적 형상이나 경계조건 등의 영향을 더 크게 받기 때문이다. 또한 등방성 및 복합재료 원통셀의 실험 모드형상으로부터 단순지지된 원통셀의 진동거동을 확인하였으며, 이것은 볼트를 이용한 단순지지 경계조건이 정확하게 구현되었음을 나타낸다.

## 6. 결 론

단순지지된 원통셀의 자유진동 특성을 실험적으로 규명하기 위한 연구를 수행하였다. 여러개의 볼트를 이용한 단순지지 경계조건의 구현방법에 대하여 언급하였으며, 등방성 및 복합재료의 네가지 모델에 대한 실험과 해석결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 스테인레스강과 유리섬유강화 복합재료 원통셀의 진동실험 결과는 이론해 및 유한요소해석 결과와 잘 일치함으로써 볼트를 이용한 실험상의 경계조건 구현이 정확함을 확인하였다.

(2) 단순지지된 원통셀의 길이가 길어지면 진동수는 감소하고, 원주방향 모드보다는 길이방향 빔 모드의 영향이 크게 나타난다.

(3) 평직 GFRP 복합재료 원통셀의 진동거동은 준등방성의 적층으로 인해 등방성 셀과 유사한 거동을 보였고, 실험 모드형상은 유한요소해석 결과와 잘 일치하여 실험결과의 신뢰성을 보였다.

(4) 원통셀의 직경이 120 mm인 경우에는 지지볼트의 직경을 줄이고, 개수를 늘려 지지한다면 고차 모드에서의 실험오차를 줄일 수 있다. 또한 셀의 직경이 218 mm인 경우에 20개 이상의 볼트 지지에 대해서는 거의 일정한 진동수를 보였다.

### 참고 문헌

- (1) Leissa, A.W., 1973, "Vibration of Shells", NASA SP-128.
- (2) Yamane, J.R., 1965, "Natural Frequency Curves of Simply Supported Cylindrical Shells", AIAA Journal, Vol. 3, No. 1, pp. 180~181.
- (3) Sewall, J.L. and Naumann, E.C., 1968, "An Experimental and Analytical Vibration Study of Thin Shells with and without Longitudinal Stiffeners", NASA TN, D-4705.
- (4) Sewall, J.L., Clary, R.R. and Leadbetter, S.A., 1968, "An Experimental and Analytical Vibration Study of Ring Stiffened Cylindrical Shell Structures with Various Support Conditions", NASA TN, D-2398.
- (5) Nizrecki, C. and Cudney, H.H., 1998, "Creating and Verifying a Research-Grade Simply-Supported Cylinder with Applications to Aerospace Structures", Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, Vol II, pp. 1240~1249.
- (6) 이영신, 문흥기, 1986, "직교이방성 복합재료 원통셀의 자유진동 해석", 대한기계학회논문집, 제 8 권, 제 5 호, pp. 408~415.
- (7) 이영신, 김영완, 1996, "복합재료 원통셀의 고유진동수 및 좌굴하중에 대한 직교 보강 특성연구", 한국소음진동학회지, Vol. 6, No. 4, pp.457~467.
- (8) 이영신, 전병희, 오재문, 1997, "복합재료 원통셀의 진동, 좌굴강도, 충격강도 특성 및 그의 설계최적화에 관한 연구", 한국자동차공학회는문집, 제 5 권, 제 4 호, pp. 48~69.
- (9) 이영신, 최명환, 길기남, 송근영, 1998, "단순지 지된 Steel 및 복합재료 원통셀의 진동에 대한 실험적 고찰", 한국소음진동학회 1998년도 춘계학술대회논문집, pp. 334~339.
- (10) Lee, Y.S. and Kim, Y.W., 1998, "Vibration Analysis of the Rotating Composite Cylindrical Shells with Orthogonal Stiffeners", Computers and Structures, Vol. 69, No. 2, pp. 271~281.
- (11) Lam, K.Y. and Loy, C.T., 1995, "Influence of Boundary Conditions and Fiber Orientation on the Frequencies of Thin Orthotropic Laminated Cylindrical Shells", Composite Structures, Vol. 31, pp. 21~30.
- (12) Jones, R.M., 1975, "Mechanics of Composite Materials", Hemisphere Publishing Co., New York.
- (13) Blevins, R.D., 1975, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold Company.
- (14) Soedel, W., 1993, "Vibrations of Shells and Plates", 2nd ed., Marcel Dekker, Inc.
- (15) Naik, N.K. and Shembekar, P.S., 1992, "Elastic Behavior of Woven Fabric Composite: I-Lamina Analysis", Journal of Composite Materials, Vol. 26, No. 15, pp. 2196~2225.
- (16) Swanson Analysis Systems Inc., 1992, "ANSYS User's Manual : Volume III Elements"
- (17) Meirovitch, L., 1967, "Analytical Methods in Vibrations", Macmillan Publishing Co. Inc., New York.