

## 〈논 문〉

# 길이가 변하는 현의 자유진동 특성

Free Vibration Characteristics of a String with Time-Varying Length

이 승엽\* · 박상규\*\*

Seung-Yop Lee and Sang Gyu Park

(1999년 3월 8일 접수 : 1999년 9월 10일 심사완료)

**Key Words :** String Vibration(현의 진동), Traveling Wave(이동파), Time-Varying System(시변계), Free Vibration(자유진동), Vibration Energy(진동에너지), Energy Reflection Coefficient(에너지 반사 계수)

## ABSTRACT

Time-dependent period and energy of free vibration of a string, whose length varies with time at a constant rate, are investigated by a traveling wave method. When the string length is increased, the vibration period increases, but the free vibration energy decreases with time. However, when the string undergoes retraction, the vibration energy increases with time. String tension together with non-zero instantaneous velocity at the moving boundary results in energy variation. Analytical solutions by the traveling wave method are compared with previous results using the perturbation method and Kotera's approach.

## 1. 서 론

길이가 변하는 현이나 보와 같은 1차원 연속체는 많은 기계 시스템이나 구조물의 유연체(flexible system) 모델로 이용된다. 축 방향으로 압축하중을 받는 보의 좌굴 불안정성(buckling instability)과 유체와의 연성에 의해 일어나는 판의 플러터 불안정성(flutter instability)은 고전적으로 연구되어 왔던 연속체의 진동 안정성 문제이다<sup>(1~2)</sup>. 최근 들어서 로봇 시스템이나 우주항공 구조물의 안테나와 같이 유연한 구조물이나 조작기(flexible structure or manipulator) 등이 사용되면서 유연체의 진동 해석 및 제어 연구가 국내외에서 활발히 연구되어 오고 있다<sup>(3~4)</sup>.

미끄럼 연결부(prismatic joint)를 통하여 움직이는

로봇 팔이나 안테나와 같이 필요할 때 길이가 변화되는 구조물은 무게를 경량화 하면서 작은 구동력으로 원하는 성능을 이루어야 하므로 가볍고 유연한 구조물이 요구된다. 이와 유사한 진동계로 벨트, 체인, 테일등과 같이 축 방향으로 움직이는 연속체(axially-moving continua)가 있으며 이에 대한 연구는 Wickert와 Mote<sup>(5)</sup>나 Wang과 Liu<sup>(6)</sup>의 논문에 잘 조사되어 있다. 움직이는 유체를 포함하는 유연한 파이프의 동적 거동도 이와 유사한 움직이는 연속체 시스템이다<sup>(7)</sup>. Lee와 Mote<sup>(8~10)</sup>는 최근 일련의 논문을 통하여 길이는 일정하지만 축 방향으로 움직이는 연속체의 진동 특성을 이동파(traveling wave)를 사용하여 해석하였다. 또한 이동파가 연속체의 경계 조건이나 다양한 연성 조건에서 반사될 때 생기는 진동 에너지의 변화 과정과 진동계의 동적 안정성을 해석하였다.

길이가 일정하며 시간에 불변(time-invariant)하는 연속체의 진동은 수학적으로 고유치 문제의 해를 구

\* 정희원, 서강대학교 공과대학 기계공학과

\*\* 서강대학교 대학원 기계공학과

하여 나타낼 수 있다. 시간에 따라 변하는 진동계의 특성은 비선형 진동계로서 Nafeh와 Mook<sup>(11)</sup> 등의 책 등에 기본적인 방법론들이 기술되어 있다. 본 논문이 다루는 길이가 변하는 현의 진동은 Yamamoto 등<sup>(12)</sup>이 섭동법을 이용하여 자유진동 및 강제진동의 근사해를 구하였다. Kotera<sup>(13)</sup>는 위치와 시간에 관한 새로운 변수로 정의하여 변수 분리법을 변하는 길이를 갖는 현에 적용하였고 Ram과 Caldwell<sup>(14)</sup>은 같은 문제를 이미지 방법을 이용하여 D'Alembert 해를 구하였다. Terumichi 등<sup>(15)</sup>은 엘리베이터의 출과 같이 길이가 변하며 질량-스프링이 경계조건에 연결된 움직이는 현의 진동 특성을 섭동법을 이용하여 연구하였다.

길이가 변하는 연속체는 외부에서 힘이 가해지지 않는 자유진동 하에서도 진동계의 에너지가 증가할 수 있는데 이는 스파게티 문제(Spaghetti problem)로 불리는 연속체가 길이가 줄어들 때 일어나는 불안정한 진동 현상과 유사하다. 본 논문은 Lee와 Mote<sup>(8)</sup>에 의해 연구되었던 길이가 일정하며 축 방향으로 움직이는 유연체에 적용되었던 이동파 방법을 길이가 변하는 현에 적용한다. 움직이는 경계에서 이동파가 반사할 때 생기는 주파수의 변화와 진동 에너지의 전달 매커니즘을 연구하여 진동 주기와 에너지의 변화를 해석한다. 또한 이동파 방법으로 구한 결과를 기존에 연구된 근사해와 비교한다.

## 2. 현의 운동 방정식과 이동파 특성

### 2.1 운동 방정식

일정한 장력  $P$ 와 선밀도  $\rho$ 를 가지고 있는 현의 횡방향 진동(transverse vibration)에 대한 선형 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (1)$$

여기에서  $w(x, t)$ 는 횡방향 변위이며  $f(x, t)$ 는 현에 작용하는 외부 분포력이다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 현의 경계조건은 모두 고정되어 있으며

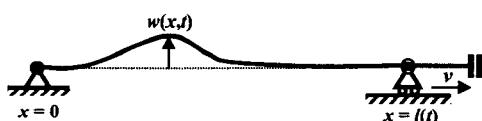


Fig. 1 String with time-varying length at constant velocity  $v$

$$w(0, t) = w(l(t), t) = 0 \quad (2)$$

현의 길이는  $l(t) = l_0 \pm vt$ 로서 시간에 따라서 일정한 속도  $v$ 로 증가하거나 감소한다. 현에서 발생하는 횡방향 진동파의 이동 속도는  $c = \sqrt{P/\rho}$ 로서 장력과 선밀도의 함수이다.

### 2.2 정상파와 이동파

일반적으로 정상파(standing wave)로 표현되는 1차원 연속체의 고유 진동 모드는 같은 진폭의 서로 반대 방향으로 움직이는 두 개의 이동파로 나타낼 수 있다. 즉 현에서 주파수가  $\omega$ 이고 진동수가  $k = \omega/c$ 인 정상파는 다음과 같이 두 개의 독립적인 비분산(non-dispersive) 이동파로 표현할 수 있다.

$$w(x, t) = A \sin kx \cos \omega t = \frac{1}{2} A \sin(kx - \omega t) + \frac{1}{2} A \sin(kx + \omega t) \quad (3)$$

여기서 마지막 식의 앞의 항은 오른쪽으로 진행하는 이동파를 둘째 항은 왼쪽으로 진행하는 이동파를 나타낸다. 경계조건이 없는 무한한 길이를 갖는 현은 모든 종류의 진동수를 가질 수 있으나 경계조건이 있는 유한한 길이의 현은 특정한 값의 고유 진동수를 갖게 된다. 길이가 일정한 현의 경우

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l_0} \sqrt{\frac{P}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

의 고유 진동수를 갖는 무한개의 정규 모드로서 자유진동을 나타낸다.

## 3. 길이가 변할 때 진동 주기와 진동에너지

### 3.1 진동 주기와 위상의 변화

길이가 일정한 현은 조화진동시 정상파의 형태를 갖기 때문에 현의 모든 점이 같은 위상을 가지며 진동 주기는  $T = 2\pi/\omega_n$ 으로 일정하다. 그러나 길이가 변하는 현의 경우 조화진동시 현의 모든 점이 다른 위상을 갖지 않으며 진동 주기 또한 시간에 따라 변하게 된다. 현의 길이가 일정한 비율로 변화될 때 이동파가 현을 이동하여 본래의 위상을 갖는데 걸리는 시간을 계산함으로 진동 주기를 구할 수 있다. Fig. 2(a)에서 보여지는 바와 같이 기본 모드의 현의 초기 정상파를 좌우 방향으로 각각 움직이는 두 개의 이동파로 분리한다. 이동파가 현을 따라 움직일 때 경계조건과 만나면 위상이 180도 바뀌어서 반

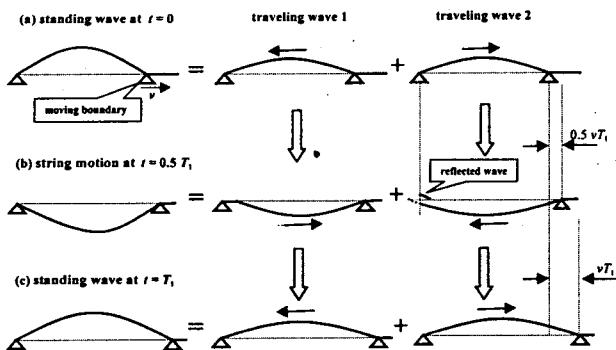


Fig. 1 The first vibration mode and traveling waves during a fundamental period

사하게 된다. 여기에서 주의할 것은 이동파가 움직이는 경계에서 반사할 때 이동파의 파장 및 주파수가 변함으로 반대쪽 고정 경계에서 반사하는 이동파와 다르게 되어 두 이동파의 합이 더 이상 정상파가 되지 않는다. 따라서 임의의 시간에 현의 자유진동은 이동파의 진행에 따라 위상이 현을 따라 진행하는 것처럼 보이게 된다. 이를 위상 전파 속도(phase propagation velocity)라 한다. Fig. 2(b)는 반주기  $t=0.5T_1$  만큼 경과하였을 때 두 개의 이동파의 모양을 보여준다. 이 때 움직이는 경계에서 반사된 이동파와 고정 경계에서 반사된 이동파의 파장이 다르기 때문에 현의 모든 점의 위상이 동일하지 않다. 여기에서  $T_1$ 은 기본 진동 모드의 첫 번째 진동 주기이다. Fig. 2(c)은 진동 주기  $t=T_1$ 을 경과할 때 두 이동파 모두가 양쪽 경계를 반사하게 되어 동일한 주파수를 갖게 됨으로 현의 진동은 동일한 위상을 갖는 정상파를 이룬다.

진동 주기  $T_1$ 은 이동파가 양쪽 경계를 반사하는데 경과한 시간과 같게 되므로 다음과 같이 주기를 계산한다. 한 이동파가 길이가 움직이는 경계를 출발하여 고정된 경계에 반사되어 다시 움직이는 경계에 도착하는 시간 동안 총 움직인 길이는  $cT_1$ 이다. 한 주기 동안 현이 늘어난 길이는  $vT_1$ 이고  $cT_1 = 2l_0 + vT_1$ 가 성립한다. 이로부터 초기 길이가  $l_0$ 이며  $v$ 의 속도로 늘어나는 현의 기본 진동 모드의 주기

$$T_1 = \frac{2l_0}{c-v} \quad (5)$$

가 계산된다. 식 (5)에서  $v=0$ 이면 길이가 일정한 현의 기본 진동 주기  $T_0 = 2\pi/\omega_1 = 2l_0/c$ 와 같게 된다. 기본 진동 모드의 두 번째 주기를 같은 방법으로 구하면  $T_2 = 2l_1/(c-v)$ 이 된다. 여기에서  $l_1$ 은 시간이

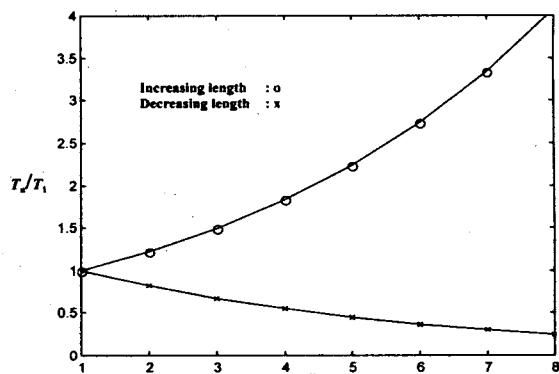


Fig. 2 Vibration period of a string with time-varying length when  $v=0.1c/l_0$

$T_1$ 일 때의 현의 길이 즉,  $l_1 = l_0 + vT_1$ 이다. 이 때 초기 길이  $l_0$ 에서 이동파가 두 번째로 양쪽 경계를 모두 통과하여 본래의 위상을 회복하는데 걸리는 총 시간은 첫 번째 주기와 두 번째 주기를 더한  $t_2 = T_1 + T_2$ 가 된다. 이와 같은 과정을 반복하면 진동 모드의  $n$ 번째 기본 진동 주기와 그 때까지 소요된 시간은 각각

$$T_n = \frac{2l_n}{c-v}, t_n = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{2l_{k-1}}{c-v} \quad (6)$$

로 표현된다. 여기에서 시간  $t_n$  일 때의 현의 길이는  $l_n = l_{n-1} + vt_n$ 이다. 길이가 줄어드는 현에 대해서는 위의 식 (6)에  $-v$ 를 대입하면 구해진다. Fig. 3은 길이가 변할 때 주기의 변화를 보여주고 있다. 여기서 길이의 변화 속도는  $v=0.1 c/l_0$ 인 경우에 대해서 구해졌다. 각 주기와 첫 번째 주기와의 비율은 길이가 줄어들면서 감소하는데  $n=10$ 일 경우는 현의 길이와 주기가 제로로 접근하게 된다.

기본 진동 주기 식 (5)와 유사하게  $n$ 번째 진동 모드의 첫 번째 진동 주기는  $T_1^n = 2l_0/n(c-v)$ 로 나타낼 수 있다. 여기에서 주의할 점은 기본 진동 주기  $t=T_1$ 이 될 때까지는 현의 모든 점이 같은 위상을 갖지 않기 때문에 모든 점이  $T_1^n$ 의 진동 주기를 갖지 않으며 고주파 모드의 평균적인 진동 주기만을 나타낼 뿐이다.  $n$ 번째 진동 모드의  $n$ 번째 진동 주기까지 걸리는 시간이  $nT_1^n = T_1$ 로서 기본 진동 모드의 진동주기와 같아지므로 이 때 비로소 현의 모든 점이 같은 위상과 진동 주기를 갖게 된다.

길이가 변하는 현의 경우 진동 주기를 이동파 방법을 이용하여 구할 수 있으나 자유진동을 표현할

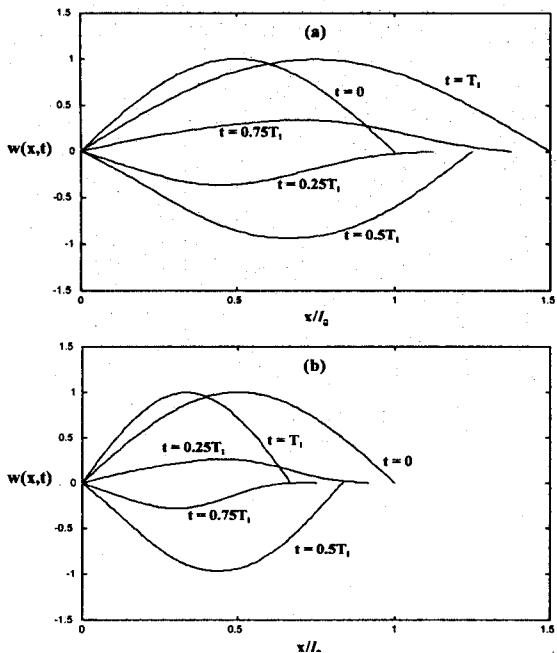


Fig. 4 Variation of the first mode during a period  $T_1$  when  $v=0.1$  (a) increasing length (b) decreasing length

수 있는 독립적인 진동 모드 (또는 고유함수)는 존재하지 않는다. 그러나 자유진동시 초기조건의 정상파를 이동파로 분리하여 시간의 함수로 이동파의 변화를 계산하여 두 이동파를 합하면 임의의 시간의 현의 진동을 표현할 수 있다. 이와 같은 이동파 방법을 이용하여 Fig. 4(a)와 (b)는 길이가  $v=0.2 c/l_0$ 의 속도로 증가할 때와 감소할 때 첫 번째 진동모드의 초기 정상파가 한 주기 동안 변화되는 모습을 보여준다.  $t=0$ 일 때는 현의 모든 점들이 같은 위상을 가지고 자유운동을 시작하지만 다음 주기까지는  $x$ 좌표에 따라 위상이 다르게 된다. 길이가 일정한 현의 경우 정상파는  $t=0.25T_1$  및  $0.75T_1$ 일 때 현의 위상이 90도와 270도가 되어 횡방향 변위가 제로이지만 길이가 변할 때는 현의 점들간에 위상차가 생김으로 어떤 부분에서는 변위가 제로가 아님을 볼 수 있다.

### 3.2 에너지 반사계수

진동하고 있는 현의 총 기계적 에너지는 연속체의 운동에너지와 장력에 의해 생기는 위치에너지의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (\rho w_i^2 + P w_x^2) dx \quad (7)$$

여기서  $w(x, t)$ 의 아래첨자는 편미분을 의미한다. 주

파수가  $\omega$ 이고 진폭이  $A$ 인 이동파  $A \sin(kx - \omega t)$ 가 현을 따라 이동해 갈 때 현의 한 파장  $\lambda$ 속에 포함된 에너지는

$$E_\lambda = \frac{1}{2} \int_x^{x+\lambda} (\rho w_i^2 + P w_x^2) dx = \pi k P A^2 = \pi Z \omega A^2 \quad (8)$$

이다. 여기에서  $Z = P/c$ 는 현의 기계적인 임피던스를 나타낸다. 이동파가 이동할 때 단위시간당 평균 파워량은 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P w_x w_t dx = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2 \quad (9)$$

한 주기 동안 생기는 에너지는  $\bar{P}T = \pi Z \omega A^2$ 로 위의식 (10)과 일치한다. 이동파가 속도  $v$ 로 움직이는 현의 경계에서 반사될 때 이동파 전동 에너지의 변화는

$$\Delta W = E_r - E_i = \pi Z (\omega_r A_r^2 - \omega_i A_i^2) \quad (10)$$

로 정해진다. 여기에서 아래첨자  $i$ 과  $r$ 는 입사파와 반사파를 의미한다. 본 연구에 다루는 길이가 변하는 현에서 진동파의 에너지 변화를 나타내기 위해 입사파와 반사파의 진동에너지의 비인 에너지 반사계수(energy reflection coefficient)를 다음과 같이 정의한다.

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_r \omega_r}{Z_i \omega_i} r^2 \quad (11)$$

여기에서  $r = A_r/A_i$ 은 입사파와 반사파의 진폭의 비를 나타내고 일반적으로 반사계수(reflection coefficient)라 불린다. 길이가 일정한 현의 경우 입사파와 반사파의 임피던스의 비나 주파수의 비는 동일하기 때문에 에너지 반사계수는  $R = r^2$ 로서 반사계수만으로 구해진다. 그러나 현의 길이가 늘어나는 경우 ( $\omega_i \neq \omega_r$ )나 벨트나 테이프처럼 길이는 일정하지만 현이 축방향으로 이동하는 경우 ( $Z_i \neq Z_r$ )에는 입사파와 반사파의 진폭이 동일한 ( $r=1$ ) 경우에도 진동에너지가 다르게 된다 ( $R \neq 1$ ).

### 3.3 진동에너지의 변화

앞 절에서 정의한 에너지 반사계수를 이용하여 변하는 길이를 가진 현의 진동에너지의 변화를 살펴보자. 속도  $v$ 로 움직이는 오른쪽 경계는 현의 변위가 항상 제로인 고정단이므로 반사파의 진폭은 입사파와 같고 ( $r=1$ ) 임피던스도 같게 ( $Z_i = Z_r$ ) 되지만 움직이는 경계에서 이동파가 반사되기 때문에 주파수는 달라진다 ( $\omega_i \neq \omega_r$ ). 즉 식 (11)으로부터 에너

지 반사 계수는

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\omega_r}{\omega_i} \quad (12)$$

로서 입사파와 반사파의 주파수만으로 나타낼 수 있다. 기본 진동 모드의 파장은 현의 길이의 2배가 되고 주파수의 비는 주기의 비나 파장의 비와 역수의 관계를 가지고 있으므로 현의 길이가 속도  $v$ 로 늘어날 때 식 (12)는

$$R = \frac{T_i}{T_r} = \frac{l_0}{l_0 + vT_1} = \frac{c-v}{c+v} \quad (13)$$

가 된다. 여기서  $T_i$ 와  $T_r$ 은 각각 입사파와 반사파의 주기이다. 식 (13)은 에너지 반사계수를 이동파의 이동속도  $c$ 와 경계의 움직이는 속도  $v$ 의 합수로 나타낼 수 있음을 보여준다. 현의 길이가 늘어날 때에는 에너지 반사계수가  $R < 1$  되므로 이동파의 진동에너지가 시간에 따라 일정한 비율로 감소된다. 초기 진동에너지  $E_0$ 에 대해서  $n$ 번째 기본 진동 주기 후에 진동 에너지는

$$E_n = E_0 \cdot \left( \frac{c-v}{c+v} \right)^n \quad (14)$$

로 주어진다. 이와는 반대로 길이가 줄어들 때에는

$$R = \frac{c+v}{c-v} \quad (15)$$

로서 항상 1보다 크게 됨으로 자유진동 에너지는 시간에 따라 계속적으로 증가된다. 따라서 외력이 작용하지 상태에서 자유진동 에너지의 증가는 길이가 줄어드는 경계에서 이동파가 반사할 때 경계를 움직이는 외부 동력 에너지가 시스템으로 흘러 들어감으로 생기게 된다.

### 3.4 축 방향으로 움직이는 연속체와의 유사성

Fig. 5(a)는 길이가  $v$ 의 속도로 움직이는 현을 Fig. 5(b)는 길이가 일정한 고정된 양쪽 경계 사이를 현 자체가  $v$ 의 속도로 축방향으로 움직이는 현(axially moving string: 이하 AMS)을 나타낸다. 길이가 늘어나는 경우  $v$ 로 움직이는 경계를 향해  $c$ 의 이동 속도로 움직이는 이동파는 상대 속도의 관점으로는 AMS에서  $c-v$ 의 이동속도를 가지고 진행하는 후진파(backward wave)와 같게 된다. 반대로 움직이는 경계로부터 고정된 경계로 진행하는 이동파는 상대속도의 관점으로는  $c+v$ 의 이동속도를 갖는 전진파(forward wave)와 같다. Lee and

Mote<sup>(8)</sup>의 결과에 따르면 AMS의 경우 상류 경계(upstream boundary)에서 에너지 반사계수는

$$R = \frac{c-v}{c+v} \quad (16)$$

가 되며 이는 본 연구가 다루는 길이가 변하는 현의 에너지 반사계수 (13)와 동일함을 알 수 있다. AMS의 하류 경계(downstream boundary)에서 에너지 반사계수는  $R = (c+v)/(c-v)$ 가 되어 식 (15)과 같다. 위의 사실로부터 길이가 늘어날 때 움직이는 경계나 AMS의 상류 경계에서 에너지 반사 계수는 모두  $R > 1$ 이 되어 에너지가 감소함을 예측 할 수 있고 길이가 줄어드는 경계에서나 AMS의 하류 경계에서 에너지 반사 계수는  $R < 1$ 이 되어 에너지가 증가함을 예측할 수 있다.

### 3.5 에너지 전달 매커니즘

현의 길이가 변할 때 자유 진동의 에너지가 증가하거나 감소하게 되는데 이에 대한 상호 에너지 전달 과정은 다음과 같다. 길이가 늘어나는 경우 Fig. 6(a)와 같이 현의 경계에서 횡방향 변위는 항상 제로이지만 경계가 축 방향으로 속도  $v$ 로 움직이기 때문에 횡방향 순간속도는  $-vw_x(l, t)$ 가 된다. 따라서 진동 이동파가 움직이는 경계에 입사하여 반사할 때 장력의 수직 성분인  $Pw_x(l, t)$ 가 음의 순간속도에 대하여 파워 흐름(power flow)을 이루어 현에 대해서 음의 일을 하게 된다. 그 파워의 크기는 순간속도와 장력의 수직 성분과의 곱으로 나타난다.

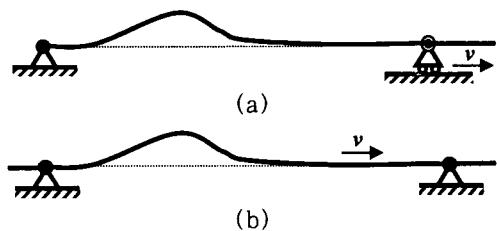


Fig. 5 (a) String with length varying at velocity  $v$   
(b) axially moving string with velocity  $v$

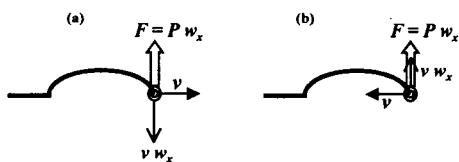


Fig. 6 Power flow by string tension at the moving boundary (a) increasing length (b) decreasing length

$$P_l = -Pv w_x^2(l, t) < 0 \quad (17)$$

이 값은 길이가 늘어날 때는 항상 음의 값을 갖는다. 이때 진동에너지가 현으로부터 움직이는 경계로 전달되어진다. 반대로 길이가 줄어들 때는 경계에서 횡방향 순간 속도가  $-v$  되므로 현의 장력이 양의 파워 흐름이 되어 움직이는 경계로부터 진동계로 에너지가 전달되게 된다 (Fig. 6(b)). 이때 자유 진동 에너지의 증가는 줄어드는 경계를 움직이는데 사용되는 외부 동력 에너지가 경계에서 이동파가 반사할 때 진동에너지원으로 흘러 들어가게 된다.

#### 4. 근사해와 비교

##### 4.1 섭동법에 의한 근사해

현의 길이가 일정한 속도  $v$ 로 증가하거나 감소한다고 할 때 자유진동의 해를 Yamamoto 등<sup>(13)</sup>은 섭동법을 이용하여 근사해를 구하였다. 논문에서 섭동치를  $\epsilon = v/c\pi$ 로 가정하고 초기 변위가 기본 진동 모드이며 초기 속도는 제로인 경우에 대해서

$$\begin{aligned} u_0(x) &= w(x, 0) = U \sin \frac{\pi x}{l_0}, \\ v_0(x) &= \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

길이가 변하는 현의 자유 진동해를 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{w(x, t)}{U} &= \cos \psi_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \epsilon \left\{ -\frac{1}{2} \sin \psi_1 \sin \frac{\pi x}{l} \right. \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{(n^2 - 1)^2} \cdot \left[ (n^2 + 1) \sin \psi_n \right. \\ &\quad \left. \left. - 2n \sin \psi_1 \right] \sin \frac{\pi x}{l} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

##### 4.2 Kotera 방법에 의한 근사해

시간에 따라 길이가 변하는 현을 해석하는 또 다른 방법으로 Kotera<sup>(14)</sup>가 제시한 방법이 있다. 일정한 길이를 가진 시스템에 적용하는 고유치 방법을 변하는 길이를 가진 현에 적용하기 위해 다음과 같이 새로운 변수인  $\xi$ 와  $\tau$ 를 도입한다.

$$x = \xi(l_0 + vt), \quad 1 + vt = e^{\nu\tau}, \quad \frac{v}{l_0} = \nu$$

새롭게 정의된 변수들을 식 (1)에 대입하여 운동 방정식과 해를 구한 후 이것을  $x$ 와  $t$ 의 변수로 다시 바꾸면 최종적으로 다음과 같은 자유 진동해가 구해진다.

$$\begin{aligned} w(x, t) &= U \sin \left( \frac{\pi \tan^{-1} \left( \frac{vx}{c(1+vt)} \right)}{\tanh^{-1} \left( \frac{v}{c} \right)} \right) \\ &\quad \times \cos \left( \frac{-\frac{\pi}{2} \ln \left( 1 - \left( \frac{vx}{c(1+vt)} \right)^2 \right) + \pi \ln(1+vt)}{\tanh^{-1} \frac{v}{c}} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

#### 4.3 비교 해석 결과

첫 번째 고유 모드를 초기 변위를 갖고 초기 속도가 제로인 자유 진동에너지를 이동파 방법과 섭동법 그리고 Kotera 방법의 결과와 비교하였다. 여기에서는  $c/l_0 = 1$ 로 정규화하여 계산하였다. Fig. 7은 현의 길이가  $v = 0.1$ 의 속도로 늘어날 때 진동에너지의 변화를 나타낸다. 이동파를 이용한 방법에 의한 주기와 진동에너지는 식 (6)과 (13)로부터 계산하였고 근사해는 각각 식 (19)와 (20)으로부터 미분값  $w_t$ 과  $w_x$ 를 계산하여 식 (7)에 대입한 후 수치적분하여 구하였다. 시간에 따라 진동에너지가 감소함을

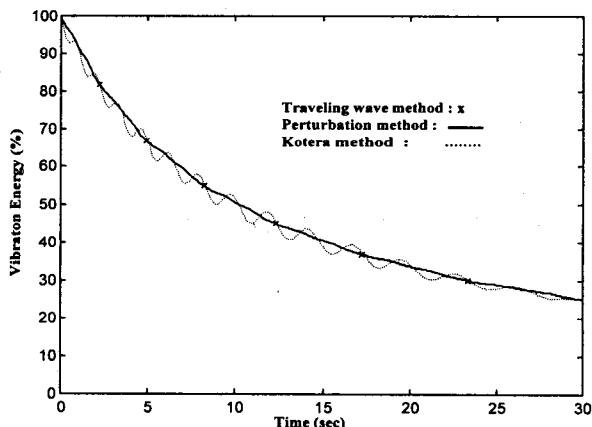


Fig. 7 Free vibration energy when the length increases at  $v = 0.1$

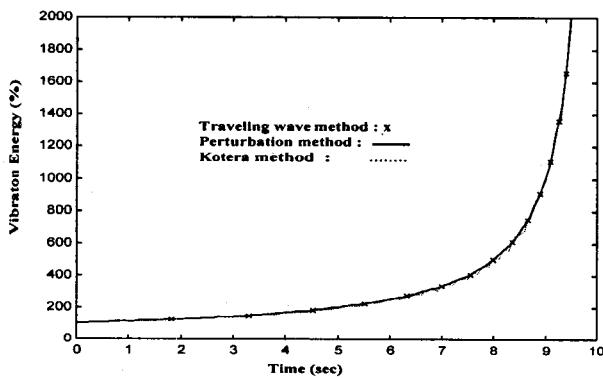


Fig. 8 Free vibration energy when the length decreases at  $v = 0.1$

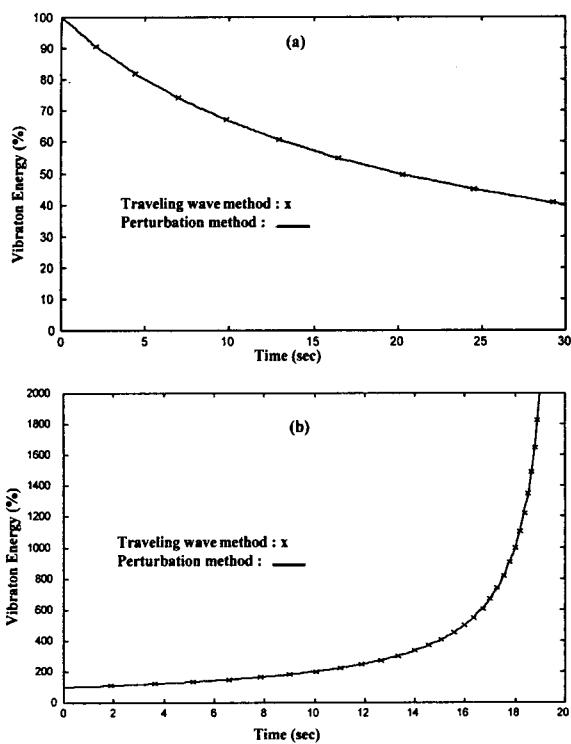


Fig. 9 Free vibration energy when  $v = 0.05$   
(a) increasing length (b) decreasing length

볼 수 있다. 세로축의 정규화된 시간에  $l_0/c$ 를 곱하면 실제 경과된 시간이 계산된다. 에너지 반사계수는 이동파 전체가 반사된 후 같은 위상을 갖게 될 때이므로 그림에서는 x로 표시되어 있는 것같이 각 주기에 해당하는 시간에 대해서만 구해졌다. 이동파 방법이 복잡한 해석과정을 통하여 구해진 섭동법에 의한 근사해와 일치함을 알 수 있다. Kotera의 방법은 해석과정에 생기는 오차 때문에 진동에너지의 값이 불안정하게 나타남을 볼 수 있다.  $v=0.1$ 의 속도로 길이가 줄어들 때 진동에너지는 시간이 경과함에 따라 급격히 증가함을 볼 수 있다 (Fig. 8). 시간이 현의 길이가 제로가 되는  $t \rightarrow 10$ 초로 접근하면서 진동 주기는 제로로 접근하며 진동에너지는 무한대로 증가함을 알 수 있다. 이러한 진동에너지의 증가는 현의 동적 불안정성을 초래한다. 이와같은 선형 해석에 의한 무한대의 진동에너지는 길이가 감소하면서 생기는 비선형성의 증가로 인해 실제로는 다르게 나타난다.

Fig. 9 (a)와 (b)는  $v=0.05$ 의 속도로 길이가 변화될 때 진동에너지의 변화를 나타내며 Fig. 10 (a)와 (b)는 속도가  $v=0.2$ 일 때 진동에너지를 나타낸다. 속도가 작은 경우 섭동법으로 구한 진동에너지가 이동파에 의한 결과와 잘 일치하나  $v=0.2$ 의 경

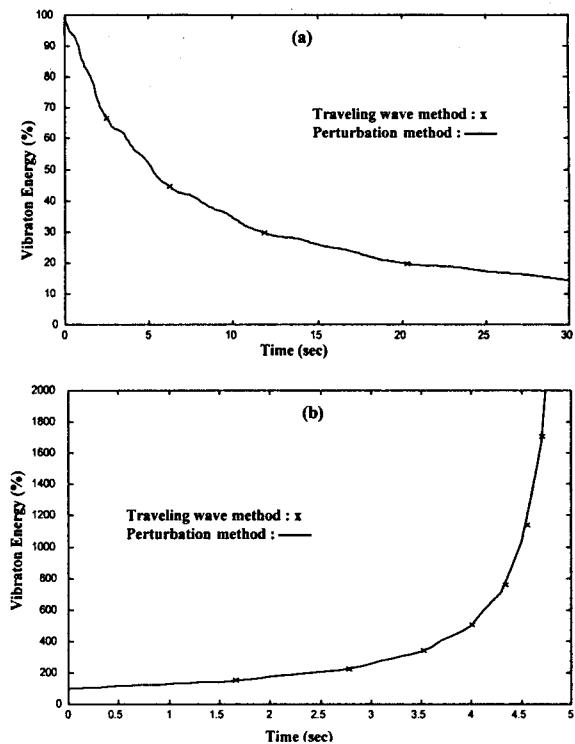


Fig. 10 Free vibration energy when  $v = 0.2$   
(a) increasing length (b) decreasing length

우는 시간이 증가함에 따라 이동파 방법과 근소한 오차를 보이며 시간의 변화에 따라 약간의 불안정한 모양이 나타난다. 그 이유는 속도  $v$ 에 비례하는 섭동치  $\epsilon$ 값이 작아야만 섭동법에 의한 오차가 작아지기 때문이다. 속도  $v$ 의 증가는 시간에 따라 진동에너지도 급격하게 변화됨을 알 수 있다.  $v=0.2$ 로 길이가 줄어드는 경우 한 주기를 경과한 후 진동에너지는 초기 진동에너지의  $1.2/0.8=150\%$ 가 되며 불과 세 번째 주기가 경과한 후 ( $t_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 1.6 + 1.11 + 0.74 = 3.52$ 초) 진동에너지는 초기에너지  $E_0$ 의 337.5%로서 급격하게 증가하게 된다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 길이가 일정 속도로 변하는 현의 진동 주기와 진동에너지의 변화를 기준에 연구되었던 근사적 방법이 아닌 이동파 방법을 사용하여 엄밀해를 구하였다. 길이가 변함으로 초래되는 진동 주기의 변화를 이동파가 현의 양쪽 경계를 진행하는 시간을 계산하여 구하였고 에너지 반사계수를 길이의 변화 속도와 이동파 속도의 함수로 정의하여 자유진동 시 진동에너지의 변화를 정확하게 예측하였다. 이동파

방법으로 구한 에너지 변화량을 섭동법과 Kotera의 근사 방법에 의한 기존 결과와 비교하였다. 일정 속도  $v$ 로 길이가 늘어나는 경우는 기본 모드의 진동 주기는 시간에 따라 감소하게 되며  $T_n = 2l_n / (c - v)$ 로 주어지며 진동에너지  $R = (c - v) / (c + v)$ 의 비율로 감소하게 된다. 길이가 줄어드는 경우에는 반대로 에너지 반사계수가  $R > 1$ 이 되어 자유진동 에너지가 시간에 따라 계속적으로 증가하게 된다. 이와 같이 외력이 작용하지 않는 자유진동 시 에너지의 비보존성은 현과 경계조건과의 상호작용에 의해 생긴다. 이동파가 경계조건에 반사할 때 횡방향 진동은 제로이지만 경계조건의 움직임으로 인해 생기는 횡방향 상대속도로 인해 상호간에 파워 흐름이 발생하여 길이가 줄어드는 경우에는 경계를 이동시키는 외부 에너지가 경계에서 현으로 더해지며 길이가 줄어드는 경우에는 진동 에너지가 경계를 통하여 외부로 흘러나가게 된다.

길이가 줄어들 때 발생하는 현의 동적 불안정성은 이와 유사한 고전적인 1차원 연속체의 불안정성의 문제인 스파게티의 플러터 현상을 설명한다. 본 연구에서 수행된 시간에 따라 변하는 시변계(time-varying system)의 자유진동 해석은 향후 길이가 변하는 로봇의 유연한 조작기, 우주 항공 구조물 그리고 마그네틱 테이프와 같은 정보 저장기기 등 다양한 기계시스템에 연구에 응용될 수 있을 것이다.

## 후 기

본 연구는 1997년도 한국학술진흥재단의 공모과제(신진교수과제) 연구비에 의해 수행되었으며 이에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Bolotin, V. V., 1963, Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, New York: Macmillan.
- (2) Simites, G. S., 1987 "Instability of Dynamically Loaded Structures," Applied Mechanics Reviews, Vol. 40, pp. 1403~1408.
- (3) Von Flotow, A. H., 1986, "Traveling Wave Control for Large Spacecraft Structures," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 9, pp. 462~468.
- (4) Bailey, T. and Hubbard, J. E., 1987 "Distributed Piezoelectric-Polymer Active Vibration Control of a

Cantilever Beam," Journal of Guidance and Control, Vol. 8, pp. 605~611.

(5) Wickert, J. A. and Mote, C. D., 1988, "Current Research on the Vibration and Stability of Axially Moving Materials," Shock and Vibration Digest, Vol. 20, pp. 3~13.

(6) Liu, S. P. and Wang, K. W., 1991, "On the Noise and Vibration Chain Drive System," Shock and Vibration Digest, Vol. 23, pp. 8~13.

(7) Li, G. X. and Paidoussis, M. P., 1993, "Pipes Conveying Fluid: a Model of Dynamical Problem," Journal of Fluid and Structures, Vol. 7, pp. 137~204.

(8) Lee, S.-Y. and Mote, C. D., 1996, "Vibration Control of an Axially Moving String by Boundary Control," Mechanical Engineers, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 118, pp. 66~74.

(9) Lee, S.-Y. and Mote, C. D., 1997, "A Generalized Treatment of the Energetics of Translating Continua, Part I : Strings and Tensioned Pipes," Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, pp. 735~753.

(10) Lee, S.-Y. and Mote, C. D., 1998, "Traveling Wave Dynamics in a Translating String Coupled to Stationary Constraints: Energy Transfer and Mode Localization," Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, pp. 1~22.

(11) Nafeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons.

(12) Yamamoto, T., Yasuda, K. and Kato, M., 1978, "Vibrations of a String with Time-variable Length," Bulletin of JSME, Vol. 21, pp. 1677~1684.

(13) Kotera, T., 1978, "Vibrations of String with Time-varying Length," Bulletin of JSME, Vol. 21, pp. 1469~1474.

(14) Ram, Y. M. and Caldwell, J., 1996, "Free Vibration of a String with Moving Boundary Conditions by The Method of Distorted Images," Journal of Sound and Vibration, Vol. 194, No. 1, pp. 35~47

(15) Terumichi, Y., Ohtsuka, M., et al., 1993, "Nonstationary Vibrations of a String with Time-Varying Length and a Mass-Spring System Attached at the Lower End," ASME Winter Annual Meeting, DE-Vol. 56, pp. 63~69.