

다각형 표적의 명중확률 산정모델의 연구*

A Study on a Hit Probability Model for Polygonal Target

황 흥 석**

Abstract

This research focussed on developing a hit probability model for polygonal target to increase the survivability of weapon systems by its shape design. First, we defined the delivery errors and derived functions for these errors based on the assumption of bivariate normal distribution, and then derived functions for probability of shot hitting of various shapes of polygonal target. Also, we developed computer program for computation of the probability of hitting a general n-sided polygon and we have shown a sample run output. This model could be used to improve the survivability from design phase by designing optimal polygonal shape of weapon system.

Keyword : Hit Probability, Weapon System Performance Evaluation, Kill Probability

* 본 연구는 국방과학연구소의 연구비에 의거 연구되었음.

** 동의대학교 산업공학과

1. 개 요

본 연구는 발사된 탄두가 다각형 표적에 명중될 확률을 산정 하는 모델의 연구이다. 이를 위하여 먼저 표적 주위의 탄착점의 분산도를 나타내는 척도로서 각종 오차(PE : precision error, MPI : mean point of impact error)를 분석하여 정확도 CEP(circular probable error)를 산출하였다. 무기체계의 탄두의 운반오차(delivery error)분포를 이변량 정규분포(bivariate normal distribution)로 가정 할 경우 표적의 모양(polygonal shape)에 따른 명중확률을 산정하는 이론적인 모델을 전개하고 이의 Logic에 따른 전산프로그램을 개발하여 실용 모델로서 사용할 수 있게 하였다. 일반적으로 무기체계의 종합효과는 크게 두 가지로 구분되는데 이는 사용자 측면에서의 운용효과(operational effectiveness)와 무기체계 고유의 하드웨어 또는 소프트웨어적인 성능효과 (inherent effectiveness) 이다[6][7]. 여기서 무기체계 고유의 성능효과는 체계 가용능력과 투발 수단 및 탄의 작동 등 일련의 요인들에 의존한다. 이들을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$E_{si} = P_a * P_{pf} * P_f * P_h * P_d \quad (1)$$

여기서,

P_a : 필요시 언제든지 사용 상태로 되어 있을 확률(가용도(availability) 또는 작전 준비태세 (operational readiness))

P_{pf} : 발사 이전 상태까지 고장나지 않을 확률

P_f : 탄을 올바른 궤도상에 진입시킬 확률(발사 능력)

P_h : 발사된 탄이 최적 폭발 점까지 도달할 확률 (delivery accuracy)

P_d : 탄의 폭발 확률 (신관 작동 확률)

E_{si} : 무기체계 고유의 효과 (성능)

(단, 각각의 사건발생은 그 이전까지의 사건발생을 조건으로 한다.)

여기에 무기체계 운용효과(생존성, 군수지원 요소, 전장환경 등), E_{so} 를 고려한다면 무기체계 전체의 효과 E_{sys} 는 다음 식과 같이 나타낼 수 있게 된다.

$$E_{sys} = E_{si} * E_{so} \quad (2)$$

본 연구에서는 정상적으로 식 (1)에서 $P_a = P_{pf} = P_f = 1.0$ 로 가정하고 발사된 탄이 다각형의 표적 (polygonal shape of target)에 얼마나 정확하게 접근하여 피해(damage)를 줄 수 있는가의 척도인 명중확률(P_h ; hit probability)의 산출 방법과 수식을 전개하고 n각형의 일반적인 궤적의 명중확률 산정을 위한 전산프로그램을 개발하였다. 또한 예제(sample run)를 통하여 표적의 모양(삼각형, 원형 및 다각형)에 따른 명중확률을 산정하여 비교하였다. 본 연구의 결과는 각종 무기체계의 설계시 적의 무기로부터 명중확률이 최소가 되도록 설계시 부터 무기체계의 외형을 결정할 수 있을 것이며 x 및 Y방향의 탄착점오차를 다르게 할 경우 개인 소총의 사격술 및 명중률 향상에 크게 기여하리라 생각된다.

2. 무기체계의 명중오차(Delivery Error)

2.1 명중 오차의 구분

발사된 탄이 표적을 얼마나 명중시킬 수 있는가, 즉 표적 주위의 산포 정도를 나타내는 척도로서 PE 오차(Precision Error)와 MPI오차(Mean Point of Impact Error)를 사용하며 이들 각각은 사거리공산 오차(REP ; range probable error)와 편의 공산오차

(DEP ; deflection probable error)로 계산된다. 이들 오차의 주요 내용은 다음과 같다.

2.1.1 PE (precision error)

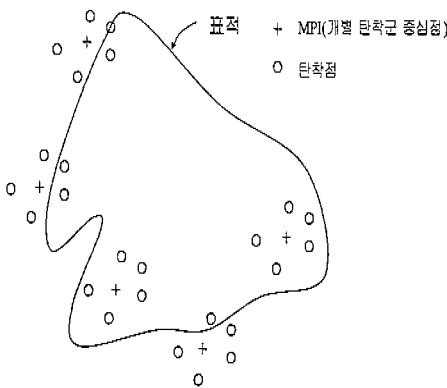
하나의 무기체계가 단독으로 한 개의 목표 지점을 반복하여 무수히 사격하였을 경우 탄착점들의 개별 탄착 군 중심점(MPI)으로부터 퍼짐 정도를 나타내며[1][2], 탄도오차(ballistic error)의 주요 요인을 들면 다음과 같다.

- 포구 속도
- 항력 (drag)
- 발사각

2.1.2 MPI오차(mean point of impact error)

탄착군 중심점(MPI)들의 표적 조준정으로부터의 분산 정도를 MPI라고한다. MPI의 주요 오차요인은 다음과 같다[5].

- 지상 사격의 경우
 - 포구 속도
 - 기상 조건
 - 표적 위치 관측
- 수정 사격(adjusted fire) 경우



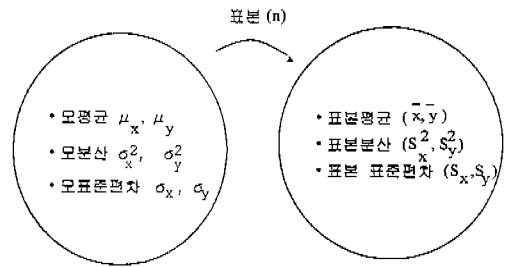
<그림 1> MPI 오차

<그림 1>은 이러한 탄착점의 탄착군 중심점으로

부터의 분산 정도를 나타내고 있다.

2.2 산포의 추정

사거리, 가격방향 및 탄착점의 좌표의 표본으로부터 산포의 정도를 추정하는 수식을 전개하였으며 탄착점의 모집단과 표본을 표시하면 <그림 2>와 같다.



<그림 2> 탄착점의 추정을 위한 표본 추출

여기서 표본의 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 S_x^2 &= (1/n-1) \sum (x_i - \bar{x})^2 \\
 &= (1/n-1) \left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right] \\
 &= (n-1 / n) \sigma_x^2
 \end{aligned}$$

여기서, $S_x^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$, $\sigma_x^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{n}$,
 $\bar{x} \neq \mu$

무기시스템의 탄착점의 산포는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\text{체계 산포} = \text{PE 산포} + \text{MPI 산포}$$

여기서 탄착 중심점들이 일정할 경우 MPI 산포는 존재하지 않는다. 탄착점(x, y)이 평균(μ, υ) 그리고 사거리 방향의 분산 σ_x^2 및 편의 방향의 분산 σ_y^2 를 가지는 정규분포를 따른다고 가정할 경우 탄

착점 x, y의 확률밀도함수(probability density function)는 다음과 같이 표시된다.

$$f(x) = (1/\sigma_x \sqrt{2\pi}) \exp [-(x - \nu)^2 / 2\sigma_x^2]$$

$$f(y) = (1/\sigma_y \sqrt{2\pi}) \exp [-(y - \mu)^2 / 2\sigma_y^2]$$

(단, 표준오차가 존재치 않는 경우 $\mu = \nu = 0$)

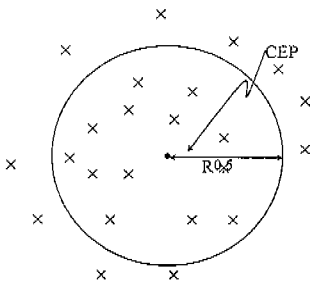
x, y가 독립적으로 산포하는 경우, 이변량 확률밀도함수 f(x, y)는 각각의 확률밀도함수들의 곱이 된다. 특히 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ 일때 f(x, y)는 원형이변량정규분포(circular bivariate normal distribution)함수이다.

$$\text{즉, } f(x, y) = f(x) * f(y)$$

2.3 정확도의 척도(Measure of Accuracy)

2.3.1 CEP(circular error probable)

이는 정상적인 사격 조건에서 표적에 아주 많은 발수를 사격하였을 때 탄착점들의 중심으로부터 탄착점들의 50%를 포함하는 원의 반경, $R_{0.5}$ 으로 정의되며 이변량분포를 따를 경우 다음 <그림 3>과 같이 표시할 수 있다[3].



<그림 3> CEP의 정의

여기서 탄착점(x, y)들이 원점을 중심으로 원형 이변량정규분포를 따른다고 가정할 경우 ($\mu = \nu = 0$) x, y의 이변량함수는 다음과 같이 주어질 수 있다.

$$f(x,y) = [1/(2\pi \sigma^2)] \exp [-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)] \quad (3)$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq (R_{0.5})^2} f(x,y) dx dy = 0.5 \quad (4)$$

식 (4)를 극좌표 변환하여 정리하면

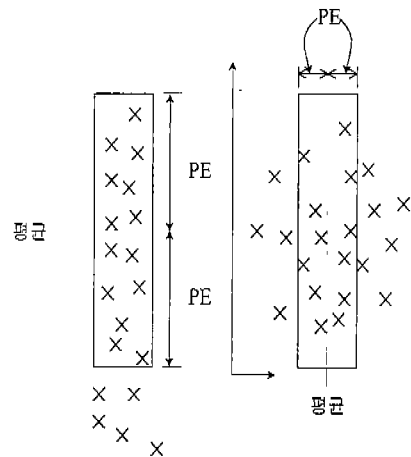
$$\exp(-R_{0.5}^2 / (2\sigma^2)) = 0.5$$

$$R_{0.5} = (\sqrt{2 \ln 2}) \sigma = 1.1774 \sigma$$

따라서 임의 무기체계의 탄착점들의 산포 σ 를 알고 있는 경우 탄착점들의 중심에 반지름 $R=1.1774$ 크기의 원 표적을 놓고 한발을 사격할 경우의 표적 명중 확률, $Ph = 0.5$ 가 된다.

2.3.2 PE(probable error)

이는 모든 탄착점들을 사거리 방향 (X축)과 편 방향(Y축)으로 각각 투영(Project)할 경우 그들의 평균으로부터 양쪽의 탄착점들의 50%를 포함하는 거리 간격으로 정의한다[4].

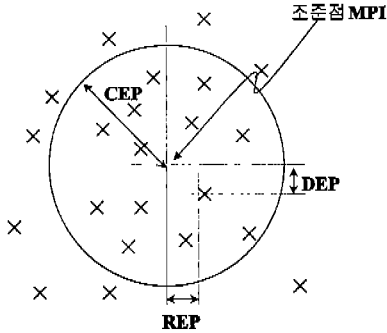


<그림 4> PE의 정의

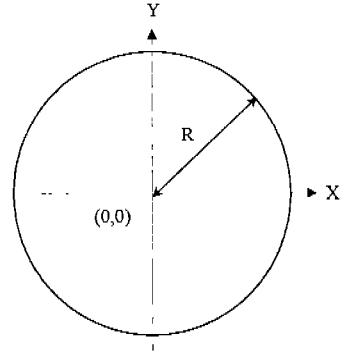
$$Pr [\mu - PE \leq x(\text{또는 } y) \leq \mu + PE] = 0.5$$

$$Pr [-PE/\sigma \leq (x - \mu)/\sigma \leq PE/\sigma] = 0.5$$

$$PE = 0.6745 \sigma$$



<그림 5> CEP, REP, DEP



<그림 6> 원형표적

$$PE = 0.573 CEP$$

$$\text{즉, } REP = DEP = (0.573)(CEP)$$

여기서, R : 표적의 반지름,

σ : 무기체계 탄착오차의 표준 편차

3. 단발 명중확률(P_{ssh} : Probability of Single Shot Hitting)

위의 탄착점의 정확도를 추정하는 수식들로부터 다음과 같은 다각형 표적의 명중확률을 구하는 수식을 전개하였다[6].

3.1 원형 표적(Circular Target) 경우

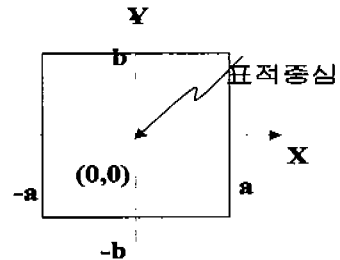
조건오차를 무시할 경우(MPI오차=0), 식 (3)으로부터

$$P_{ssh} = \iint_{x^2 + y^2 < R} f(x,y) dx dy$$

여기서 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)로 변환하면,

$$\begin{aligned} P_{ssh} &= (1/2\pi \sigma^2) \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp(-r^2/2\sigma^2) r dr d\theta \\ &= 1 - \exp(-R^2/2\sigma^2) \end{aligned}$$

3.2 직사각형 표적(Rectangular/Square Target) 인 경우



<그림 7> 직사각형 표적

식 (3)으로부터 조건오차를 무시할 경우

(MPI 오차 = 0)

$$\begin{aligned} P_{ssh} &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x,y) dx dy \\ &= (1/2\pi \sigma^2) \int_{-a}^a \int_{-b}^b \exp(-(x^2 + y^2)/2\sigma^2) dx dy \\ &\cong \{1 - \exp(-2a^2/(\pi \sigma^2))\} \{1 - \exp(-2b/ \end{aligned}$$

$$(\pi \sigma^2)]^{1/2} \quad (5)$$

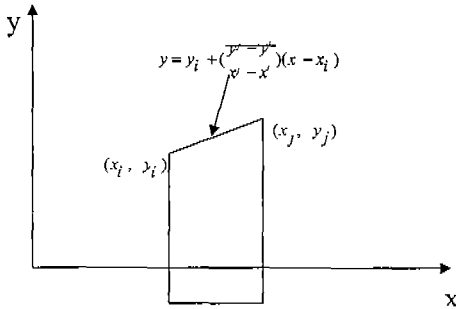
여기서 정사각형 표적일 경우는 $b = a$ 로 치환하고 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_{ssh} = (1/2\pi \sigma^2) \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) dx dy$$

$$\cong 1 - \exp[-2a^2/(\pi \sigma^2)] \quad (6)$$

3.3 다각형 표적(Polygonal Target)인 경우

표적을 (x, y) 평면에서 다각형(polygonal)으로 표현하고 무기체계오차(delivery error)를 이변량정규분포(bivariate normal distribution)인 $f(x, y)$ 으로 가정할 때, 표적이 명중될 확률을 계산하는 기본개념은 평면상의 특정선분 아래에 존재하는 면적(F_{ij})을 이용하는 것이다.



<그림 8> 다각형 표적

$$F_{i, j} = \iint f(x, y) dx dy \quad (7)$$

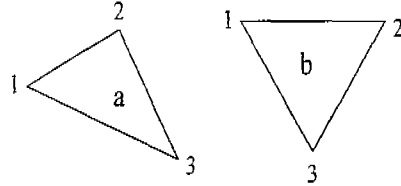
여기서, 적분의 상, 하한 값이 바뀔 경우 다음과 같이 된다.

$$F_{j, i} = - F_{i, j} \quad (8)$$

3.4 삼각형표적(Triangle Target)의 명중확률

삼각형을 두 가지 형태로 구분하여 보면, <그림

9>와 같이 윗부분이 두 변으로 이루어지는 경우(형태 a)와 아랫부분이 두 변으로 이루어지는 경우(형태 b)로 구분할 수 있다.



<그림 9> 삼각형의 일반적 형태

이 경우, 각각의 단발명중확률 P_{ssh} 는 식 (7)로부터

$$P_{ssh} (\text{Type a}) = F_{1,2} + F_{2,3} - F_{1,3}$$

$$P_{ssh} (\text{Type b}) = F_{1,2} - (F_{1,3} + F_{3,2})$$

여기서 식 (8)에 의하여,

$$F_{j, i} = - F_{i, j} \text{ 이므로}$$

$$P_{ssh} (\text{Type a}) = F_{1,2} + F_{2,3} + F_{3,1}$$

$$= P_{ssh} (\text{Type b}) \text{ 이다.}$$

그러므로 삼각형 표적의 단발 명중확률을

$P_{ssh}(3)$ 라고 할때,

$$P_{ssh} (3) = F_{1,2} + F_{2,3} + F_{3,1}$$

즉, 3변의 시계방향 순서가 된다.

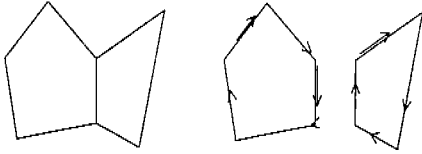
$$P_{ssh}(3) = \sum_{i=1}^3 F_{i, i \bmod 3 + 1} \quad (9)$$

여기서, $i \bmod 3$ 는 i 를 3 으로 나누었을 때의 나머지 값이다.

3.5 다각형 표적

다각형 표적은 일반적으로 k 개의 변을 가진 다각형을 한 개의 삼각형과 $(k-1)$ 개의 변을 가진 다각형으로 나눌 수 있고 <그림 10> 에서와 같이 임의 한

변을 공유하는 2 개의 다각형에서 각 다각형의 주변을 시계 방향으로 회전할 경우 공유 변에서는 서로 다른 방향으로 교차하게 된다.



<그림 10> 다각형 표적

따라서, k개의 변을 가지는 다각형을 한 개의 삼각형과 (k-1)개의 변을 가지는 다각형으로 나누고 공유하는 변의 양 꼭지점을 m, m + 2 라 할 때에 전자의 표적을 명증할 확률은 다음과 같다.

$$P_{ssh}(3) = F_{m, m+1} + F_{m+1, m+2} + F_{m+2, m}$$

후자의 표적을 명증할 확률은,

$$P_{ssh}(k-1) = F_{1, 2} + F_{2, 3} + \dots + F_{m-1, m} + F_{m, m+2} + F_{m+2, m+3} + \dots + F_{k, 1}$$

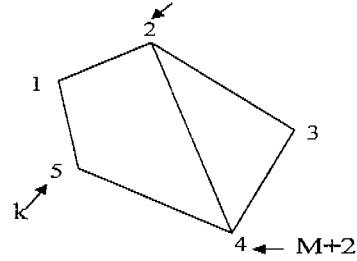
5각형표적의 경우의 예를 들면 <그림 11>과 같이 표시할 수 있다.

$$F_{i, j} = -F_{j, i} \text{ 이므로 } F_{m+2, m} = -F_{m, m+2}$$

$$\begin{aligned} P_{ssh}(k) &= P_{ssh}(3) + P_{ssh}(k-1) \\ &= F_{1, 2} + F_{1, 3} + \dots + F_{m-1, m} + F_{m, m+1} \\ &\quad + F_{m+1, m+2} + \dots + F_{k, 1} \\ &= \sum_{i=1}^k F_{i, i \bmod k+1} \end{aligned}$$

따라서 n개의 변을 가지는 다각형 표적의 단일 명중확률은 다음과 같다.

$$P_{ssh}(n) = \sum_{i=1}^n F_{i, i \bmod n+1} \quad (10)$$



<그림 11> K 각형 표적(K = 5)

3.6 K각형 명중확률 $P_{ssh}(k)$ 계산 알고리즘

$P_{ssh}(k)$ 를 직접 계산하기 위하여 무기체계의 사거리방향(x)과 편의방향(y) 오차의 결합확률밀도함수를 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x, y) = (1 / \sigma_x \sigma_y) \Phi[(x-A) / \sigma_x] \Phi[(y-A) / \sigma_y] \quad (11)$$

여기서, (A, B) : 평균 탄착점, MPI

σ_x, σ_y : x, y 방향오차의 표준편차

$$\Phi(t) = (1 / \sqrt{2\pi}) e^{-t^2/2}$$

(표준 정규분포)

식 (11)을 식 (7)에 대입하면

$$F_{i, j} = \int \int (1 / \alpha_x \alpha_y) \Phi[(x-A) / \sigma_x] \Phi[(y-B) / \sigma_y] dy dx \quad (12)$$

식 (12)를 간단히 하기 위하여

$$\mu = (x-A) / \alpha_x, \quad v = (y-B) / \alpha_y$$

$$m_j = (y_j - y_i) / (x_j - x_i), \quad S_i = (x_i - A) / \alpha_x,$$

$$S_j = (x_j - A) / \alpha_x,$$

$$T_i = (y_i - B_y) / \alpha_y \text{ 라 놓으면,}$$

$$F_{i, j} = \int \Phi(u) \Phi(T_i + (\alpha_x / \alpha_y) m_j (u - S_i)) du \quad (13)$$

$$\text{여기서 모든 } Z \text{에 대해 } \Phi(z) = \int_{t=-\infty}^z \Phi(t) dt$$

식 (13)에서 다음과 같은 특수한 경우를 들 수 있다.

i) $S_i = S_j$ (즉, $X_i = X_j$) 이면 $F_{ij} = 0$

ii) $Y_i = Y_j$ (즉, $m_{ij} = 0$) 이면

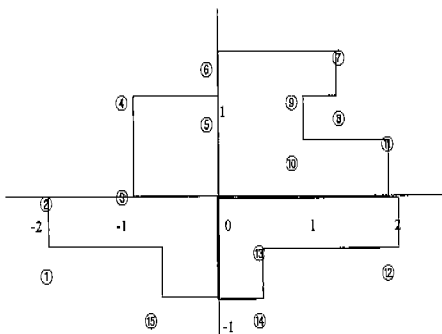
$$F_{ij} = \int \Phi(u)\Phi(T_i) du$$

$$= \Phi(T_i) [\Phi(S_j) - \Phi(S_i)]$$

함수 $\Phi(u)$ 는 $|u| > 4$ 인 경우 0에 수렴하므로 S_i 와 S_j 값은 $|u| < 4$ 이내에서 결정되어야 수치적분이 보다 효율적으로 이루어질 수 있다.

4. 모델의 응용

위에서와 같은 다각 표적의 명중확률 산정 과정을 통하여 다각형 표적의 명중확률을 계산 예제에 적용한 결과를 다음 그림과 같이 표시하였다. <그림 12>와 같이 15개의 변을 가지는 다각형 표적의 중심을 평균탄착점(A=B=0)으로 한 경우의 명중확률을 편차 ($\sigma_x = \sigma_y$)의 함수로 나타내면 식 (13)과 같다. 또한 위의 다각형 표적을 수평축에 따라 $0^\circ \sim 360^\circ$ 범위에서 회전시키면서 명중확률의 계산이 가능하다. 본 예제에 주어진 표적 관련 Data는 <표 1> 과



<그림 12> 다각형의 표적(예:)

같이 주어졌다. 표적의 명중확률을 탄착점의 표준편차를 0.1~1.6까지의 값이 주어질 경우 위의 자료를 이용한 본 모델의 출력결과를 <표

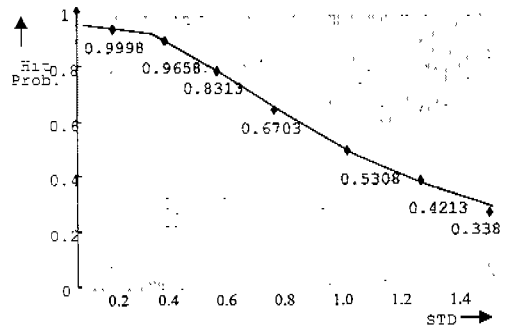
2> 및 <그림 13>과 같이 요약하였다.

<표 1> 표적 모형 자료

표적의 모서리 번호	좌표	비고
1	(-2.0, -0.5)	
2	(-2.0, 0.0)	
3	(-1.0, 0.0)	
4	(-1.0, 1.0)	
5	(0.0, 1.0)	
6	(1.5, 0.0)	
7	(1.5, 1.5)	
8	(1.5, 1.0)	
9	(1.0, 1.0)	
10	(1.0, 0.5)	
11	(2.0, 0.5)	
12	(2.0, -0.5)	
13	(0.5, -0.5)	
14	(-1.0, 0.5)	
15	(-0.5, -1.0)	
표적의 조준점	(0.0, 0.0)	

<표 2> 다각형 표적의 명중확률 산정결과(예)

탄착점의 표준편차	명중 확률	조준점
0.2	0.9998431	(0.0, 0.0)
0.4	0.9658229	
0.6	0.8314016	
0.8	0.6704113	
1.0	0.5309592	
1.2	0.4214871	
1.4	0.3382050	



<그림 13> 다각형표적의 명중살상확률산정

5. 결 론

본 연구에서는 다각형 표적의 명중률을 산정하는 모델을 개발하였으며, 이를 위하여 먼저 탄착점의 오차분석을 하고, 명중률산정을 위한 수식을 전개하고, 다각형 표적의 명중률을 계산하기 위한 Program을 PC에서 간편하게 사용할 수 있도록 개발하였다. 여기서 우리는 두 가지를 가정하였다. 하나는 평균 탄착점을 $A=B=0$ 으로 가정하였고, 다른 하나는 X, Y 방향의 탄착점 오차를 같다고 가정하였다($\sigma_x = \sigma_y$). 예를 통하여 본 모델의 사용을 위한 Sample 출력을 보였다. 그러나 실제의 경우는 대부분 위의 가정 사항과는 다른 상황에서 명중률을 산정하여야 한다. 소총의 경우 탄환의 증량으로 인하여 σ_x, σ_y 는 같지 않다. 이 경우의 탄착점의 분석으로 개인 소총화기의 사격 훈련을 개선할 수 있을 것이다. 이러한 표적 모양에 따른(표적 회전 포함) 명중률의 분석으로 다음과 같은 사항을 개선할 수 있으리라 생각된다.

- 적의 공격에 대한 명중 확률을 최소화 할 수 있도록 설계시 외형을 개선할 수 있다.
- 각종 무기의 사격술을 표적의 형태에 따라서 최대의 명중률을 위한 조정

그리고 같은 표적의 경우에도 이를 회전시켰을 때의 명중확률을 계산할 수 있도록 추가 연구되어야 할 분야이다.

MD, 1980.

- [2] A.D. Groves, "A Method for Obtaining Probabilities of Various Types of Kill on Multiple-Component Target," OR vol 19, pp 685-697, 1971.
- [3] Grubbs, Frank E., "Approximate Circular and Non-Circular Offset Probability of Hitting", Operations Research. Vol. 12, No.1, pp.51-62., 1964.
- [4] Kamat, A.R., "Some More Estimates of Circular Probable Error", Journal of the American Statistical Association, Vol. 57, pp.794-800, 1989.
- [5] J. A. Meridith, "The Air Defense Gun Effectiveness Model : GEM ", Tech. Report No.337, AMSAA, 1981.
- [6] 황홍석 외 2명, "유도무기체계 효과분석연구 (명중/살상확률 중심으로)", ADD Rep., MSCD-414-91007, 1990.
- [7] 황홍석, "복합무기체계의 최적 시스템설계 및 평가 Model", 한국군사운영분석학회지, Vol.18, No.2, 1992.12.

[99년 3월 29일 접수, 99년 5월 20일 최종수정]

참 고 문 헌

- [1] Chernick, Julian A., "Moving Target Location Errors for Ground Targets", US AMSAA Aardeen Proving Ground,