선형 시변 시스템에 대한 잘 정의된(well-defined) 직렬 및 병렬 D-스펙트럼

Well-Defined Series and Parallel D-Spectra for Preparation for Linear Time-Varying Systems

J. Jim Zhu, 이 호 철, 최 재 원
(J. Jim Zhu, Ho Chul Lee, and Jae Weon Choi)

Abstract : The nth-order, scalar, linear time-varying (LTV) systems can be dealt with operators on a differential ring. Using this differential algebraic structure and a classical result on differential operator factorizations developed by Floquet, a novel eigenstructure(eigenvalues, eigenvectors) concepts for linear time-varying systems are proposed In this paper. Necessary and sufficient conditions for the existence of well-defined (free of finite-time singularities) SD- and PD-spectra for SPDOs with complex- and real-valued coefficients are also presented. Three numerical examples are presented to illustrate the proposed concepts.

Keywords : linear time-varying systems, eigenvalues, differential algebra, differential operator factorization, SD-spectrum, PD-spectrum

I. 서론

본 논문에서는 다음 식과 같이 주어지는 n차 스칼라 선형 시변(LTV : Linear Time-Varying) 동적 시스템에 대하여 다룬다.

$$\begin{aligned} &y^{n}+a_{n}(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_{2}(t)\dot{y}+a_{1}(t)y=0 \\ &y^{(k)}(t_0)=y_{k0}\ ,\ k=0,1,\cdots,n-1 \end{aligned} \tag{1}$$

선형 시변 시스템에 대한 (1)은 다음과 같은 스칼라 미분 다항식 연산자(SPDO : Scalar Polynomial Differential Operator)를 이용하여 $D_a\{y\}=0$로 표현될 수 있다.

$$D_a\{y\}=\delta^{n}+a_{n}(t)\delta^{n-1}+\cdots+a_{2}(t)\delta+a_{1}(t) \tag{2}$$

(2)의 $\delta\left(=\frac{d}{dt}\right)$는 미분연산자이다. 선형 시변 시스템의 연구는 제어, 신호처리, 동적 시스템 이론에서 매우 중요하다. 이것은 많은 동적 시스템이 (1)과 같이 선형 미분방정식으로 모델링될 뿐만 아니라 비선형 동적 시스템도 선형화함으로써 효과적으로 다루어질 수 있기 때문이다.

$a_k(t)\equiv a_k$인 시불변 시스템의 경우는 해석적인 해, 안정도 판별, 주파수역 해석, 안정한 제어기 설계 기법 등을 쉽게 수행할 수 있는 고유치 이론이 있다는 사실은 잘 알려져 있다. 그러나 또한 시불변 고유치 이론은 시변 시스템에 직접 적용될 수 없다는 사실도 잘 알려져 있다. 따라서 선형 시불변 시스템을 위한 고유치의 개념을 선형 시변 시스템에까지 확장해 보려는 시도가 수 년 동안 많은 연구자들에 의하여 있어 왔다. 그 동안 몇 가지 주목할 만한 연구 성과들이 있었는데, 대표적인 것으로 선형 시변 시스템에 대한 일반적인 고유치 개념으로 생각되는 X-고유치[1]가 M. Y. Wu에 의해 제안되었다. 이것은 zero가 아닌 미분 고유벡터를 사용한 개념이었으나, 이 X-고유치 개념은 고유치와 대응하는 고유벡터가 유일한 짝을 이루지 않는다는 문제점을 가지고 있는데, 이러한 점은 시변 시스템의 해석상의 문제를 유발할 수 있다. 그 외에도 J. A. Richards[2]는 선형 주기 시스템에 대한 플로퀏 특성 지수(Floquet characteristic exponent)를 연구하여 선형 주기 시변 시스템(linear periodic time-varying system)의 해석에 공헌하였으며, V. V. Nemytskii와 V. V. Stepanov[3]는 Lyapunov 특성 지수에 대하여 연구하였고, E. W. Kamen[4]은 시변 영점과 극점의 개념을 제안하였다.

최근에 SPDO의 인수분해에 관한 플로퀏(Floquet)[5] 결과에 기반을 둔 선형 시변 동적 시스템 (1)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론이 개발되었다[6]-[9].

$$D_a=(\delta-\lambda_n(t))\cdots(\delta-\lambda_2(t))(\delta-\lambda_1(t)) \tag{3}$$

미분 대수 스펙트럼 이론에서 (3)을 만족하는 집합 $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^{n}$을 D_a에 대한 직렬 D-스펙트럼(SD- spectrum)이라 부르고, 집합 $\{\rho_k(t)=\lambda_{1,k}(t)\}_{k=1}^{n}$을 D_a에 대한 병렬 D-스펙트럼(PD-spectrum)이라 부른다[9]. 여기서 $\lambda_{1,k}(t)$는 비선형 독립 구속조건을 만족하는 λ_k에 대한 특이해들이다. 스칼라 함수 $\lambda_k(t)$와 $\rho_k(t)$를 각각 SD-고유치, PD-고유치라고 부른다.

플로퀏 이론(Floquet theory)은 꽤 오래된 이론이지만 선형 시변 시스템 이론이나 제어에 완전히 사용되지 않았다. 사실 플로퀏 인수분해 (3)는 문헌에 거의 언급되지 않았다. 이것은 2차 시불변 스칼라 미분 다항식 연산자에 대해서도 스칼라 리카티 방정식 $\rho+\rho^2+a_2\rho+a_1\rho=0$

접수일자 : 1998. 4. 20., 수정완료 : 1999. 4. 20.
J. Jim Zhu : Dept. Elec. and Comp. Eng., L.S.U., 부교수
이호철 : 부산대학교 기계공학부 대학원생
최재원 : 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소 조교수

을 만족하는 PD-고유치 $\rho(t)=\lambda_1(t)$를 유한시간 특이점 때문에 구하기 힘들다는 사실[10][11]로 파악되고 있다.

본 논문에서 얻어진 새로운 결과는 미분 대수 스펙트럼 이론을 선형 시변 시스템의 해석이나 제어에 적용할 수 있게 한다. 특히 미분 대수 스펙트럼 이론에서 기술된 유용한 결과들은 선형 시변 시스템의 고유치, 고유벡터, 특성 방정식, 모드 행렬, 안정도 판별, 모드 가제어성, 가관측성 평가, 전달함수, 고유구조 지정 기법 등과 같이 실제 세계 제어문제에 적용할 수 있게 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. II장에서는 주요 결과들의 사용을 위한 배경지식을 기술하고, III장에서는 잘 정의된 복소수값 SPDO에 대한 PD-, SD-스펙트럼의 존재성에 대하여 다룬다. IV장에서는 실수값 SPDO에 대한 PD-, SD-스펙트럼의 존재성에 대하여 기술하며, V장에서는 세 가지 수치 예제를 통하여 각 개념들을 설명하고, 마지막으로 VI장에서 주요 결과들의 요약과 앞으로의 연구과제를 제시한다.

II. 배경지식

본 논문의 주요 결과를 이용하기 위하여, 선형 시변 미분방정식 (1)에 대한 고전적인 결과와 (1)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론에 관한 새로운 결과들을 간단히 살펴보자.

$I\subseteq R$는 실수 구간이라 하고, $K=K(R)(K=K(C))$는 각각 실수, 복소수 유한 D-링(differential ring)이라 하면, C^∞에서 실수 구간 I를 실수 구간으로 상사시키는 함수 $f: I\rightarrow R$(실수 구간을 복소수 구간으로 상사시키는 함수 $f: I\rightarrow C$)는 K상에서 정의된 미분연산자 $\delta=d/dt$를 가지고 있다. 그러면 $\alpha_k\in K$이고 (2)에 정의된 SPDO D_α는 D-링 K에서의 연산자이다. (3)의 미분 인수분해 연산자에 관한 플로퀫의 고전적인 결과[12]를 이용하여 미분 대수 고유치 개념에 대한 기본 용어는 다음과 같이 요약된다.

정의 2.1 : a) D_α를 $\alpha_k\in K$, $k=1,2,\cdots,n$을 가지고 있는 SPDO라 하자. 그러면 (3)의 인수분해에 의해서 주어지는 스칼라 함수 $\lambda_k\in K(k=1,2,\cdots,n)$를 D_α의 직렬 D-고유치(SD-eigenvalue)라 부른다 또한, $\rho(t)=\lambda_1(t)$를 D_α의 병렬 D-고유치(PD-eigenvalue)라 부른다.

b) $\lambda_k(t)$가 (3)를 만족한다면, 집합 $\Gamma_\alpha=\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^n$을 D_α에 대한 직렬 D-스펙트럼(SD-spectrum)이라 부른다.

c) $\rho_k(t)$가 병렬 D-고유치이고 $\left\{y_k(t)=\exp\left(\int\rho_k(t)dt\right)\right\}_{k=1}^n$가 $D_\alpha\{y\}=0$의 해라면 집합 $\Gamma_\alpha=\{\rho_k(t)\}_{k=1}^n$를 D_α에 대한 병렬 D-스펙트럼(PD-spectrum)이라 부른다

d) $A_c(t)$를 D_α에 대응되는 다음과 같은 형태를 갖는 동반행렬이라 하자

$$A_c(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_1(t) & -\alpha_2(t) & \cdots & \cdots & -\alpha_n(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

그러면, 다음의 행렬을 D_α와 $A_c(t)$에 대한 직렬 스펙트럼 표준형(series spectral canonical form)이라 부른다.

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n(t) \end{bmatrix} \\ &= SS[\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \cdots,\ \lambda_n(t)]\end{aligned} \tag{5}$$

그리고 다음과 같이 주어지는 대각행렬을 D_α와 $A_c(t)$에 대한 병렬 스펙트럼 표준형(parallel spectral canonical form)이라 부른다.

$$\Gamma(t)=\mathrm{diag}[\rho_1(t),\rho_2(t),\cdots,\rho_n(t)] \tag{6}$$

정리 2.1 (플로퀫)[12] : D_α를 n차 SPDO라 하고 $\{y_i(t)\}_{i=1}^n$을 $D_\alpha\{y\}=0$의 기본 해집합이라고 하자. 그러면 SD-스펙트럼은 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_k(t)=\frac{d}{dt}\log[v_1(t)v_2(t)\cdots v_k(t)] \tag{7}$$

여기서 $v_i(t)$, $i=1,2,\cdots,n$와 $y_i(t)$의 관계는 다음과 같다.

$$y_i(t)=v_1(t)\int v_2(t)\int\cdots\int v_i(t)d^{n-1}t \tag{8}$$

특히, 다음 식은 $D_\alpha\{y\}=0$의 어떤 해 $y(t)$에 대해서도 (3)을 만족시킨다

$$\lambda_1(t)=\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \tag{9}$$

SD-스펙트럼의 다른 형태는 Ince[13]에 의해 제안된 것으로 Wronskian을 사용하여 기술하는 형태가 있다.

다음 행렬을 $\{y_i(t)\}_{i=1}^k$에 대응되는 Wronskian 행렬이라 하자.

$$W_k=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \cdots & \dot{y}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{bmatrix} \tag{10}$$

그리고 다음 식을 Wronskian이라 하자(단, $\underline{W_0}\equiv 1$).

$$\underline{W_k}=\det W_k\ ;\ k=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

그러면 (3)에서 스칼라 함수 $\lambda_i(t)$는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\lambda_k(t)=\frac{d}{dt}\log\frac{\underline{W_k}(t)}{\underline{W_{k-1}}(t)}=\frac{\dot{\underline{W}}_k(t)}{\underline{W_k}(t)}-\frac{\dot{\underline{W}}_{k-1}(t)}{\underline{W_{k-1}}(t)} \tag{12}$$

(12)로부터 $\underline{W_k}(t)\neq 0$이고 $\underline{W_{k-1}}(t)\neq 0$이라면 SD-고유치는 시간 t에서 잘 정의된다는 것을 알 수가 있다.

정리 2.2[7] : $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^n$를 n차 SPDO D_α에 대한 SD-스펙트럼이라 하면, D_α에 대한 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^n$

은 다음 식에 의해서 얻어질 수 있다.

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \lambda_1(t) \\ \rho_k(t) &= \lambda_1(t) + \dot{q}_k(t)\, q_k^{-1}(t)\ ;\ k=2,3,\cdots,n \end{aligned} \tag{13}$$

여기서,

$$\begin{aligned} q_k(t) &= \int \phi_{21}(t) \int \phi_{32}(t) \int \cdots \int \phi_{k,k-1}(t)\, d^{k-1}t \\ \phi_{ij}(t) &= e^{\int (\lambda_i(t) - \lambda_j(t))dt} \end{aligned} \tag{14}$$

정리 2.3 : D_a를 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^{n}$를 가지고 있는 n차 SPDO라 하고, $\{y_i(t)\}_{i=1}^{n}$는 $y_i(t)=\exp(\int \rho_i(t)\,dt)$인 $D_a\{y\}=0$의 근이라 하자. D는 다음의 대각행렬을 나타낸다.

$$D = \mathrm{diag}\,[y_1, y_2, \cdots, y_n] \tag{15}$$

그러면 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} WD^{-1} &= V(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ D_{\rho_1}\{1\} & D_{\rho_2}\{1\} & \cdots & D_{\rho_n}\{1\} \\ D^2_{\rho_1}\{1\} & D^2_{\rho_2}\{1\} & \cdots & D^2_{\rho_n}\{1\} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D^{n-1}_{\rho_1}\{1\} & \cdots & \cdots & D^{n-1}_{\rho_n}\{1\} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

여기서 $D_{\rho_i}=(\delta+\rho_i)$, $D^{k}_{\rho_i}=D_{\rho_i}D^{k-1}_{\rho_i}$이고, $W=W(y_1, y_2, \cdots, y_n)$는 $\{y_i(t)\}_{i=1}^{n}$에 대응되는 Wronskian 행렬이다. 특히 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\det V = \det W \prod_{k=1}^{n} y_k^{-1} \tag{17}$$

표준 좌표변환 행렬 $V(t)$는 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^{n}$에 대응되는 D_a에 대한 모드 표준 행렬(modal canonical matrix)이라고 불리고, (17)의 행렬식은 대응된 모드 행렬식(associated modal determinant)이라 불린다. $V(t)$의 열벡터 $v_i(t)$는 다음의 식을 만족한다.

$$A_c(t)\, v_i(t) - \rho_i(t)\, v_i(t) = \dot{v}_i(t) \tag{18}$$

그리고 $U(t)=V^{-1}(t)$의 행벡터 $u_i^T(t)$는 다음 식을 만족한다.

$$u_i^T(t) A_c(t) - \rho_i(t)\, u_i^T(t) = -\dot{u}_i^T(t) \tag{19}$$

따라서, $v_i(t)$와 $u_i^T(t)$를 각각 $\rho_i(t)$에 대응된 $A_c(t)$와 D_a의 우 PD-고유벡터(right PD-eigenvector), 좌 PD-고유벡터(left PD-eigenvector)라고 정의한다. SD-고유벡터도 비슷하게 정의할 수 있다[7].

특이점을 가지지 않는 잘 정의된 SD-, PD-스펙트럼의 존재성에 관해 기술하기 위해서는, 연구의 관점을 K의 D-서브링 영역, 즉 정규 해석 함수(regulated analytic function) $f: I \to R$(혹은 $f: I \to C$)의 D-링 $G=G(R)$ ($G=G(C)$)로 제한을 둔다. 정규 해석 함수는 유한하고 I상에서 부분적으로 적분 가능하다. I를 $t \in I$에 대하여 $f(t)=0$인 G의 부분집합이라 하자. 집합 $I(\subset G)$의 여집합을 $I^{\perp}$라 표기하고, 곱셈에 대하여 닫혀 있게 된다.

정의 2.2 : a) $\alpha_k(t)$의 계수를 가지고 있는 n차 SPDO D_a는 $\alpha_k \in G$ $(k=1,2,\cdots,n)$라면 잘 정의되었다고 말한다.

b) D_a를 n차 SPDO라 하자. D_a의 PD-고유치 ρ_k는 $\rho_k \in G(C)$라면 잘 정의되었다고 말한다. ρ_k가 모든 $k=1,2,\cdots,n$에 대해서 잘 정의되었다면 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^{n}$도 잘 정의되었다고 말한다.

c) D_a를 n차 SPDO라 하자. D_a의 SD-고유치 λ_k는 $\lambda_k \in G(C)$라면 잘 정의되었다고 말한다. λ_k가 모든 $k=1,2,\cdots,n$에 대해서 잘 정의되었다면 PD-스펙트럼 $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^{n}$도 잘 정의되었다고 말한다

III. 복소수 계수를 가지는 SPDO

이 장에서는 복소수 계수를 가지고 있는 SPDO에 대한 잘 정의된 SD-, PD-스펙트럼의 존재에 대한 필요충분 조건을 제시한다. 이 결과는 선형 시변 동적 시스템과 더욱 밀접한 실수 계수의 SPDO에 대하여도 비슷한 결과를 유도하는데 사용된다.

정리 3.1 : D_a를 복소수 계수를 가진 잘 정의된 n차 SPDO라 하자. 그러면 다음의 진술들은 동일하다.

i) $D_a\{y\}=0$은 각 $k \le n$에 대하여 (20)을 만족하는 기본 해집합 $\{y_k\}_{k=1}^{n}$을 가지고 있다.

$$\underline{W_k} = \det W(y_1, y_2, \cdots, y_k) \in I^{\perp}(C) \tag{20}$$

여기서 $W(y_1, y_2, \cdots, y_k)$는 $y_1, y_2, \cdots, y_k$에 대한 Wronskian 행렬이다.

ii) D_a는 각 $k \le n$에 대하여 (21)을 만족하는 잘 정의된 PD-스펙트럼 $\{\rho_k\}_{k=1}^{n}$를 가진다.

$$\underline{V_k} = \det V(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k) \in I^{\perp}(C) \tag{21}$$

여기서 $V(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k)$는 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k$에 대응되는 모드 표준 행렬이다.

iii) D_a는 잘 정의된 SD-스펙트럼 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$을 가진다.

정리 3.1의 증명을 위해서 다음의 보조정리들이 필요하다.

보조정리 3.1 : D_a를 n차 SPDO라 하자. D_a의 PD-고유치 ρ는 필요충분 조건 $y \in I^{\perp}(C)$를 만족하면 잘 정의된다. 여기서 $y(t)=\exp(\int \rho(t)dt)$이다.

증명 : $\rho=\sigma+i\omega$가 D_a에 대한 잘 정의된 PD-고유치라 가정하면 $|y(t)| = \left|e^{\int(\sigma(t)+i\omega(t))dt}\right| = \left|e^{\int \sigma(t)dt}\right| \neq 0$ 이므로 $y \in I^{\perp}(C)$이다. 역으로 $y \in I^{\perp}(C)$는 $D_a\{y\}=0$에 대한 해라고 가정하면 $y(t) \neq 0$이다. ■

보조정리 3.2 : D_a를 PD-스펙트럼 $\{\rho_k\}_{k=1}^{n}$를 가진 n차 SPDO라 하자.

그러면 $\rho_k(t)=\rho_1+\dot{q}_k q_k^{-1}$이 되고 $q_k(t)$는 (22)과 같다.

$$q_k(t)=\int\frac{W_2(t)}{W_1^2(t)}\int\frac{W_3(t)\,W_1(t)}{W_2^2(t)}\int \cdots\int\frac{W_k(t)\,W_{k-2}(t)}{W_{k-1}^2(t)}\,d^{k-1}t\ ;\ k=2,3,\cdots n \tag{22}$$

(22)에서 $W_k=\det W(y_1,y_2,\cdots,y_k)$는 $y_1,y_2,\cdots,y_k$ ($y_i(t)=\exp(\int\rho_i(t)\,dt)$)의 Wronskian이다

증명 : 정리 2.1에 의해서 $e^{\int\lambda_k(t)dt}=\frac{W_k(t)}{W_{k-1}(t)}$로 주어진다. 정리 2.2로부터 $q_k(t)=\int\phi_{21}(t)\int\phi_{32}(t)\int\cdots\int\phi_{k\,k-1}(t)\,d^{k-1}t$이고, 다음이 성립한다

$$\begin{aligned}\phi_{ii}(t)&=e^{\int(\lambda_i(t)-\lambda_{i-1}(t))dt}\\&=\left(\frac{W_i(t)}{W_{i-1}(t)}\right)\left(\frac{W_{i-1}(t)}{W_{i-2}(t)}\right)^{-1}\\&=\frac{W_i(t)\,W_{i-2}(t)}{W_{i-1}^2(t)}\ ,\ i=2,3,\cdots,n\end{aligned}$$ ■

보조정리 3.3 : D_a를 PD-스펙트럼 $\{\rho_k\}_{k=1}^n$를 가진 n차 SPDO라 하고 V_k를 대응된 모드 행렬식이라 하자. 그러면 D_a에 대한 SD-스펙트 $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$은 다음의 (23)와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\rho_1\\\lambda_k&=\rho_k+\frac{\dot{V}_k}{V_k}-\frac{\dot{V}_{k-1}}{V_{k-1}}\end{aligned} \tag{23}$$

증명 : $y_k(t)=\exp(\int\rho_k(t)\,dt)\,(k\le n)$라 두자 그러면 (23)와 (17)에 의해서 다음과 같이 정리되고, 그 결과는 정리 2.1과 동일하다.

$$\begin{aligned}e^{\int\lambda_k(t)dt}&=\frac{V_k(t)}{V_{k-1}(t)}e^{\int\rho_k(t)dt}\\&=\frac{V_k(t)\prod_{i=1}^{k}y_i}{V_{k-1}(t)\prod_{i=1}^{k-1}y_i}\\&=\frac{W_k}{W_{k-1}}\end{aligned}$$ ■

정리 3.1의 증명 · i)가 유효하다고 가정하면 $y_1=W_1\in I^{\perp}(C)$이다. 보조정리 3.1에 의해서 $\rho_1=\dot{y}_1y_1^{-1}$는 잘 정의되고, 보조정리 3.2에 의해서 ρ_k를 구할 수 있다. 모든 $k\le n$에 대해서 $W_k\in I^{\perp}(C)$이므로 $\{\rho_k\}_{k=1}^n$가 D_a에 대한 잘 정의된 PD-스펙트럼이 된다. 따라서 i)는 ii)를 의미한다.

ii)가 iii)를 의미한다는 것은 ρ_k가 잘 정의되고 모든 $k\le n$에 대하여 $V_k\in I^{\perp}(C)$인 것을 유념하면 보조정리 3.3으로부터 쉽게 알 수가 있다.

iii)가 i)를 의미한다는 것을 보이기 위해 먼저 iii)가 주어진다고 가정한다 그리고 다음 식이 성립한다고 하자.

$$\begin{aligned}D_1&=(\delta-\lambda_1)\\&=\delta+\alpha_{1,1}\\D_k&=(\delta-\lambda_k)D_{k-1}\\&=\delta^k+\alpha_{k,k}\delta^{k-1}+\cdots,\alpha_{k,2}\delta+\alpha_{k,1}\ ,\ k=2,3,\cdots,n\end{aligned}$$

여기서 $\alpha_{k,i}=\alpha_{k-1,i-1}-\lambda_k\alpha_{k-1,i}+\alpha_{k-1,i}$, $i=1,2,\cdots,k$, $\alpha_{k-1,0}\equiv0$, $\alpha_{k-1,k}\equiv1$이다 그러면 k에 대한 귀납법에 의해 모든 $k\le n$에 대하여 D_k가 잘 정의된다. 따라서 $D_k\{y\}=0$은 해 $S_k=\{y_i\}_{i=1}^k$를 가지고 $W_k\in I^{\perp}(C)$ ($k\le n$)를 만족하면서 $D_a\{y\}=0$에 대한 해가 된다. 따라서 i), ii), iii)의 진술들은 동일하다 ■

추론 3.1 . D_a를 허수 계수를 가지는 2차 SPDO라 하자. 그러면 다음의 진술들은 동일하다.

i) D_a는 잘 정의된다

ii) D_a는 $(\rho_2-\rho_1)=V_2\in I^{\perp}(C)$가 되는 잘 정의된 PD-스펙트럼을 가진다.

iii) D_a는 잘 정의된 SD-스펙트럼을 가진다.

Ⅳ. 실수 계수를 가지는 SPDO

본 장에서는 실수 계수를 가지는 SPDO에 대한 잘 정의된 SD- 및 PD-스펙트럼의 존재에 대한 필요충분 조건을 제시한다.

정의 4.1 : a) $s_1=\sigma+i\omega$이고 s_1의 공액을 $s_1^*=\sigma-i\omega$라 하자. 만약 $s_2+r=s_1^*$를 만족하는 실수 $r\in R$이 존재하면 복소수 $s_2\in C$를 s_1의 의사공액(affine-conjugate)이라 부른다

b) $\lambda_1=\sigma_1+i\omega\in G(C)$라 하자. 만약 $\lambda_2(t)+r(t)=\lambda_1^*(t)$ $(\forall t\in I)$를 만족하는 실수값 함수 $r\in G(R)$가 존재하면 함수 $\lambda_2\in G(C)$를 의사공액 함수라 부른다.

c) $\lambda_1=\sigma_1+i\omega\in G(C)$라 하자. 만약 i) λ_2가 λ_1의 의사공액 즉, $\lambda_2=\sigma_2-i\omega$이고, ii) ω가 $\dot{\omega}=r(t)\omega$ $(r(t)=\sigma_2(t)-\sigma_2(t))$를 만족한다면, 함수 $\lambda_2\in G(C)$를 λ_1의 의사공액 수반(affine-conjugate adjoint) 함수라고 한다.

정리 4.1 : D_a를 실수 계수를 가지는 2차 SPDO이라 하자. 그러면 다음의 진술들은 동일하다.

i) D_a는 잘 정의된다.

ii) D_a는 $(\rho_2-\rho_1)\in I^{\perp}(C)$를 만족하는 잘 정의된 의사공액 PD-스펙트럼 $\{\rho_1,\rho_2\}$을 가진다.

iii) D_a는 λ_2가 λ_1의 의사공액 수반인 잘 정의된 의사공액 SD-스펙트럼 $\{\lambda_1,\lambda_2\}$을 가진다

증명 : D_a를 실수 계수를 가지는 잘 정의된 SPDO라

가정하자. 그러면 $D_a\{y\}=0$ 은 실수 기본 해집합 $\{\eta, \xi\}$를 가진다. $\eta, \xi \in I^{\perp}(R)$이라 가정하자. 그러면, 보조정리 3.1에 의해서 $\{\rho_1=\dot{\eta}\eta^{-1}, \rho_2=\dot{\xi}\xi^{-1}\}$는 잘 정의된 PD-스펙트럼을 형성하고, 다음을 만족한다.

$$\rho_2-\rho_1=\det V(\rho_1,\rho_2)=\det W(\eta,\xi)\eta^{-1}\xi^{-1}\in I^{\perp}(R)$$

만약 그렇지 않으면 y_1, y_2를 다음과 같이 두자.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta+i\xi \\ \eta-i\xi \end{bmatrix}$$

$\{y_1, y_2\}$는 $D_a\{y\}=0$에 대한 기본 해집합이며, $\underline{W_1}=y_1\in I^{\perp}(C)$이다 그렇지 않다면 $y_1(t_0)=0$이 되는 t_0가 존재한다. 이것은 다음을 의미한다

$$\underline{W_2}(t_0)=\det W(\eta,\xi)(t_0)=\eta(t_0)\dot{\xi}(t_0)-\xi(t_0)\dot{\eta}(t_0)=0$$

즉, 이것은 η와 ξ가 선형 독립이라는 가정에 위배된다. 이제 $y_2=y_1^*$가 $\rho_2=\rho_1^*$를 의미한다는 것을 유념하자. 그러면 $\{\rho_1=y_1^{-1}\dot{y}_1, \rho_2=y_2^{-1}\dot{y}_2\}$는 잘 정의된 PD-스펙트럼을 형성한다. 게다가 $\rho_2-\rho_1=2i\frac{\det W(\eta,\xi)}{\eta^2+\xi^2}\in I^{\perp}(C)$이다. ρ_1, ρ_2가 둘 다 실수값이거나 $\rho_2=\rho_1^*$이므로 $\{\rho_1,\rho_2\}$는 의사공액 PD-스펙트럼이다. 따라서 i)이 ii)를 의미한다는 것을 보였다.

이제 ii)가 유효하다고 가정하자 그러면 $\{\lambda_1=\rho_1, \lambda_2=-\alpha_2-\lambda_1\}$는 잘 정의된 SD-스펙트럼을 형성한다. 게다가 λ_1이 실수라면 또한 λ_2도 실수이다. 그렇지 않으면 $\lambda_1=\sigma+i\omega$이고, 그러면 $\lambda_2=-\alpha_2-\sigma-i\omega=\sigma_2-i\omega$는 λ_1의 의사공액이다. $\alpha_1=\lambda_1\lambda_2-\dot{\lambda}_1$이 실수이므로 $\dot{\omega}-(\sigma_2-\sigma_1)\omega=0$ 즉, λ_2는 λ_1의 의사공액 수반이다. 이것은 ii)가 iii)을 의미한다는 것을 보여준다.

마지막으로 iii)가 참이라고 가정하자. 추론 3.1에 의해서 D_a가 잘 정의된다. 여기서 계수 α_1과 α_2가 실수라는 것을 보이면 된다. $\lambda_1=\sigma_1+i\omega$, $\lambda_2=\sigma_2+i\omega$가 $\omega=(\sigma_2-\sigma_1)\omega$을 만족한다고 하자. 그러면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \alpha_2&=-\lambda_1-\lambda_2=-(\sigma_1+\sigma_2)\in G(R) \\ \alpha_1&=\lambda_1\lambda_2-\dot{\lambda}_1=\sigma_1\sigma_2-\dot{\sigma}+\omega^2\in G(R) \end{aligned} \tag{24}$$

따라서 iii)가 i)를 의미한다. 그러므로 i), ii), iii)의 진술들은 동일하다. ■

정의 4.2 : 실수 계수를 가지는 잘 정의된 n차의 SPDO D_a가 실수 계수를 가진 잘 정의된 1차(simple)와 2차(quadra- tic)의 SPDO로 구성되어 있다면, $G(R)$에서 2차 형식으로 정리할 수 있다고(quadratically reducible) 말한다.

정리 4.2 : D_a를 실수 계수를 가지고 있는 잘 정의된 n차의 SPDO라 하자. 그러면 다음의 진술들은 동일하다.

i) D_a가 $G(R)$에서 2차 형식으로 정리할 수 있다.

ii) D_a는 각 $k\le n$에 대해서

$$\underline{V_k}=\det V(\rho_1,\cdots,\rho_k)\in I^{\perp}(C)$$

가 성립하는 잘 정의된 의사공액 PD-스펙트럼 $\{\rho_k\}_{k=1}^{n}$를 가진다. 여기서 $V_k(\rho_1,\cdots\rho_k)$는 $\rho_1,\rho_2,\cdots\rho_k$에 대응되는 모드 표준 행렬이다.

iii) D_a는 모든 복소 의사공액 켤레 λ_k, λ_{k-1}에 대해서 λ_{k+1}가 λ_k의 의사공액 수반인 잘 정의된 의사공액 SP-스펙트럼 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$를 가진다.

증명 : 먼저 i)는 ii)을 의미한다는 것을 보인다. $D_a=D_rD_{r-1}\cdots D_2D_1$라 가정하고, 여기서 D_i는 실수 계수를 가지는 1차 혹은 2차의 잘 정의된 SPDO이다. 증명은 r에 대한 귀납법으로 이루어진다. $r=1$에 대해서 다음의 두 가지 경우(a),b))를 고려한다.

a) D_1이 1차 즉, $D_1=\delta+\alpha_{1,1}$인 경우. 그러면 $\rho_1=-\alpha_{1,1}$은 잘 정의되고 $V_1=1$이다.

b) D_1이 2차 형식으로 정리할 수 없는 2차 SPDO 즉 $D_1=\delta^2+\alpha_{1,2}\delta+\alpha_{1,1}$이라면 정리 4.1로부터 D_1은 복소공액 PD-스펙트럼을 가지고 $V_2\in I^{\perp}$이다. 이제 임의의 r에 대해서 $r-1$에도 적용된다고 가정하자 $D_\beta=D_{r-1}\cdots D_1$라 두고 다시 다음의 두 가지 경우((c),(d))를 고려해 보자.

c) D_r은 1차 즉, $D_r=(\delta-\lambda_n)$인 경우. 귀납 가정에 의해서 D_β는 대응된 모드 행렬식 $\underline{V_k}\in I^{\perp}(C)$인 잘 정의된 의사공액 PD-스펙트럼 $\{\rho_k\}_{k=1}^{n-1}$를 가진다. $y_k(t)=\exp(\int\rho_k(t)dt)$라 두고, y_n을 $\{y_k\}_{k=1}^{n-1}$가 선형 독립인 $D_a\{y\}=0$의 해라고 하면 $\{y_k\}_{k=1}^{n}$은 $D_a\{y\}=0$에 대한 기본 해집합이고 대응된 Wronskian은 $\underline{W_k}\in I^{\perp}$이다.

$$\underline{W_k}=\underline{V_k}\prod_{i=1}^{k}y_i\in I^{\perp}\ ;\ k=1,2,\cdots,n-1$$

이고, Abel 항등식에 의해서 다음이 성립한다

$$\underline{W_n}=e^{-\int\alpha_n(t)dt}\in I^{\perp}$$

정리 3.1에 의해서 D_a는 잘 정의된 PD-스펙트럼 $\{\rho_k\}_{k=1}^{n}$을 가지고 대응된 모드 행렬식 $\underline{V_k}\in I^{\perp}(k\le n)$이 된다 이제 $\rho_n=\dot{y}_ny_n^{-1}$이 실수가 되어서 $\{\rho_k\}_{k=1}^{n}$가 의사공액 PD-스펙트럼인 것을 보이면 된다. 이것을 보이기 위하여 y_n이 다음 식을 만족한다는 것을 상기하자.

$$D_\beta\{y_n\}=e^{\int\lambda_n(t)dt}$$

를 만족시킨다는 것을 유념하라. λ_n과 D_β의 모든 계수 β_k가 실수이므로 y_n이 실수로 선택될 수 있다.

d) D_r가 2차 형식으로 정리할 수 없는 2차 SPDO 즉, $D_r=\delta^2+\alpha_{r,2}\delta+\alpha_{r,1}$인 경우. 정리 4.1에 의해서 $D_r=(\delta-\lambda_n)(\delta-\lambda_{n-1})$이고, 여기서 $\lambda_{n-1}=\sigma_{n-1}+i\omega$, $\lambda_n=\sigma_n-i\omega$, $\omega=(\sigma_n-\sigma_{n-1})\omega$이다. $D_r\{z\}=0$는 다음 식들에 의해 주어지는 두 개의 선형 독립인 해를 가진다.

$$z_1(t) = e^{\int \lambda_{n-1}(t)dt}$$

$$z_2(t) = e^{\int \lambda^*_{n-1}(t)dt} = z^*_1$$

이제 $D_\beta\{y_{n-1}\}=z_1$이 되는 $y_{n-1}=\eta+i\xi$라 두면 $y_n=\eta-i\xi$은 $D_\beta\{y_n\}=z^*_1$를 만족시킨다. 귀납 가정과 c)에 의해서 $D_\beta\{y\}=0$은 기본 해집합 $\{y_k\}_{k=1}^{n-2}$와 대응된 Wronskian $\underline{W_k}\in I^\perp(C)\,(k\le n-2)$을 가진다. y_{n-1}, y_n은 서로 선형 독립이고 $D_\alpha\{y\}=0$의 해가 되므로, $\{y_k\}_{k=1}^{n}$은 $D_\alpha\{y\}=0$의 기본 해집합을 형성한다. 그리고 플로퀫 정리 2.1에 의해서 다음 식이 성립하고,

$$\underline{W_{n-1}} = \underline{W_{n-2}}\, e^{\int \lambda_{n-1}(t)dt} \in I^\perp$$

Abel 항등식에 의해서 다음 식이 성립한다.

$$\underline{W_n} = e^{-\int a_n(t)dt} \in I^\perp$$

그러면 정리 3.1과 귀납 가정에 의해서 D_α는 잘 정의된 PD-스펙트럼 $\{\rho_k\}_{k=1}^{n}$와 대응된 모드 행렬식 $\underline{V_k}\in I^\perp(k\le n)$를 가진다. 그리고 다음 식이 성립한다.

$$\rho_n = \dot{y}_n y_n^{-1} = y^*_{n-1}(y^*_{n-1})^{-1} = \rho^*_{n-1}$$

이것은 귀납 가정으로부터 $\{\rho_k\}_{k=1}^{n}$가 의사공액 PD-스펙트럼임을 알 수 있다. 따라서 i)이 ii)를 의미한다는 증명을 완성하였다.

이제 ii)가 iii)를 의미한다는 것을 보인다. $\{\rho_i\}_{i=1}^{n}$가 대응된 모드 행렬식 $\underline{V_k}\in I^\perp(C)$를 가지는 D_α에 대한 잘 정의된 의사공액 PD-스펙트럼이라 가정하자. 일반성이 결여됨 없이 모든 복소수 PD-고유치를 공액 켤레라 가정할 수 있고 $\rho_1=\rho^*_2$, $\rho_3=\rho^*_4$, $\cdots$, $\rho_{2h-1}=\rho^*_{2h}$ $(h<n/2)$로 순서를 지울 수 있다. 이것은 보조정리 3.3으로부터 D_α는 (23)에 의해서 주어지는 잘 정의된 SD-스펙트럼을 가진다. 이제 $\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}$, $i=1,2,\cdots,h$들이 의사공액 켤레고 h에 대한 귀납법에 의해서 λ_{2i}가 λ_{2i-1}의 의사공액 수반이라는 것을 보일 것이다. 정리 4.1에 의해서 $h=1$경우에도 유효하다. 임의의 h의 경우에도 $h-1$에 대해서 유효하다고 가정하자. $D_\beta=D_{h-1}D_{h-2}\cdots D_1$라 두면, 정리 4.1에 의해서 다음의 D_i는 실수 계수를 가지는 잘 정의된 2차 SPDO이다.

$$\begin{aligned} D_i &= (\delta-\lambda_{2i})(\delta-\lambda_{2i-1}) \\ &= \delta^2+\alpha_{i,2}\delta+\alpha_{i,1}; \quad i\le h-1 \end{aligned}$$

는 실수 계수를 가지는 잘 정의된 2차 SPDO이다. 결과적으로 D_β는 실수 계수를 가지는 잘 정의된 $(2h-2)$차의 SPDO이다. 이제 D_γ을 다음과 같이 둔다.

$$D_\gamma = D_h D_\beta = \delta^{2h}+\gamma_{2h}\delta^{2h-1}+\cdots+\gamma_2\delta+\gamma_1$$

$\{\rho_i\}_{i=1}^{2h}$는 복소공액 켤레이고, 대응된 모드 행렬식 $V_k\in I^\perp(C)\,(k\le 2h)$이므로 D_γ는 잘 정의되고 γ_i는 실수이다. 결과적으로 D_h는 실수 계수를 가지는 잘 정의된 2차 SPDO이다. 그리고

$$D_\beta\left\{e^{\int \rho_{2h-1}(t)dt}\right\} = e^{\int \lambda_{2h-1}(t)dt} = z\in I^\perp$$

이고

$$D_\beta\left\{e^{\int \rho^*_{2h-1}(t)dt}\right\} = e^{\int \lambda^*_{2h-1}(t)dt} = z^*\in I^\perp$$

이므로 $\{\lambda_{2h-1}, \lambda^*_{2h-1}\}$는 D_h에 대한 잘 정의된 PD-스펙트럼의 구실을 한다는 것을 알 수 있다. 여기서 $\{z, z^*\}$는 $D_h\{z\}=0$에 대한 기본 해집합이다. z, $z^*\in I^\perp$와 $\underline{W}(z,z^*)\in I^\perp$는 대응된 모드 행렬식 $\underline{V}=\lambda_{2h-1}-\lambda^*_{2h-1}\in I^\perp$를 의미한다. 그러면 정리 4.1에 의해서 λ_{2h}는 λ_{2h-1}의 의사공액 수반이라는 것을 알 수 있다. 나머지 SD-고유치 $\lambda_k(k>2h)$들은 실수로 선택될 수 있다. 이것으로 ii)가 iii)를 의미한다는 것의 증명을 완성한다.

마지막으로 iii)가 i)를 의미한다는 것은 정리 4.1에서 바로 알 수가 있다. 따라서, i), ii), iii)의 진술들은 동일하다.

V. 수치 예제

본 장에서는 앞에서 제안된 개념을 세 가지 수치 예제를 통하여 보충 설명한다. 먼저 예제 1에서는 본 논문에서 제안된 방법이 선형 시불변 시스템의 경우에도 적용될 수 있다는 것을 보인다. 예제 2는 선형 시변 시스템의 경우를 보이기 위한 예제이고, 예제 3은 상태공간 방정식으로 표현된 경우도 적용될 수 있음을 나타내는 예제이다.

예제 1(선형 시불변 시스템인 경우) : 다음과 같이 주어지는 시스템을 고려하자

$$y(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=0 \tag{25}$$

선형 시불변 시스템에서 일반적인 방법으로 고유치와 우 고유벡터를 구하면 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$, $V=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$가 된다. 초기값을 $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$라 두고, 해를 구하면 $y_1(t)=e^{-t}$, $y_2(t)=e^{-2t}$이다. 먼저 PD-고유치를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \frac{\dot{y}_1(t)}{y_1(t)} = \frac{-e^{-t}}{e^{-t}} = -1 \\ \rho_2(t) &= \frac{\dot{y}_2(t)}{y_2(t)} = \frac{-2e^{-2t}}{e^{-2t}} = -2 \end{aligned} \tag{26}$$

(12)를 이용하여 SD-고유치를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \rho_1(t) = -1 \\ \lambda_2(t) &= \rho_2(t) = \frac{\dot{\underline{W}}_2(t)}{\underline{W}_2(t)} - \frac{\dot{\underline{W}}_1}{\underline{W}_1} \\ &= \frac{-3e^{-3t}}{e^{-3t}} - \frac{-e^{-t}}{e^{-t}} = -2 \end{aligned} \tag{27}$$

정리 2.3을 이용하여 우 PD-고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$V = WD^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{e^{-t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{-2t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

따라서 본 논문에서 제안된 방법들은 선형 시불변 시스템에서도 동일하게 적용됨을 알 수 있고, 이것은 본 논문에서 제안된 방법들이 선형 시불변 시스템을 포함하는 더욱더 일반화된 고유치 개념임을 나타낸다.

예제 2(선형 시변 시스템인 경우) : 다음과 같이 주어지는 시스템[14, p.89]을 고려하자.

$$\ddot{y}(t) + (3+4t^{-1})\dot{y}(t) + (2+6t^{-1}+2t^{-2})y(t) = 0 \tag{29}$$

위 식의 해는 $y_1(t) = t^{-2}e^{-t}$, $y_2(t) = -t^{-2}e^{-2t}$로 주어진다. SD- 및 PD-고유치를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{\dot{y}_1(t)}{y_1(t)} = \rho_1(t) = -2t^{-1} - 1 \\ \lambda_2(t) &= \frac{\dot{W}_2}{W_2} - \frac{\dot{W}_1}{W_1} \\ &= \frac{(4t^{-5}+3t^{-4})e^{-3t}}{-t^{-4}e^{-3t}} - \frac{(-2t^{-3}-t^{-2})e^{-t}}{t^{-2}e^{-t}} \\ &= -2t^{-1} - 2 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \frac{\dot{y}_1(t)}{y_1(t)} = \frac{(-2t^{-3}-t^{-2})e^{-t}}{t^{-2}e^{-t}} = -2t^{-1} - 1 \\ \rho_2(t) &= \frac{\dot{y}_2(t)}{y_2(t)} = \frac{(-2t^{-3}-2t^{-2})e^{-2t}}{t^{-2}e^{-2t}} = -2t^{-1} - 2 \end{aligned} \tag{31}$$

(30)의 결과는 (3)에 대입하여 확인할 수 있다. (31)을 이용하여 우 PD-고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2t^{-1}-1 & -2t^{-1}-2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

(32)은 다음의 (33)를 만족함을 확인할 수 있다.

$$A_c(t)v_i(t) - \rho_i(t)v_i(t) = \dot{v}_i(t) \tag{33}$$

따라서, 본 예제에서는 SD- 및 PD-고유치가 동일하게 구해지는 것을 알 수 있다.

예제 3(상태공간 방정식으로 표현된 선형 시변 시스템인 경우) : 다음과 같이 상태공간 방정식으로 주어지는 선형 시변 시스템[15. p.71]을 상정한다.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} x(t) \tag{34}$$

여기서 선형 시변 시스템의 PD-고유치를 구하기 위하여 시스템 행렬 $A(t)$를 동반행렬의 형태로 바꾸어야한다. 이를 위하여 변환 행렬 $P(t)$를 (35)과 같이 선정하고 Lyapunov 변환을 취하면 (36)과 같다.

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$z(t) = A_c(t)z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-t^2 & 2t \end{bmatrix} z(t) \tag{36}$$

(36)의 PD-고유치와 PD-고유벡터를 구하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= t - 1 \\ \rho_2(t) &= t + 1 \end{aligned} \tag{37}$$

$$V(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t-1 & t+1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

따라서, 본 예제를 통하여 상태공간 방정식으로 표현된 선형 시변 시스템의 경우에도 본 논문에서 제시하는 고유치 이론을 적용하여 제어기 설계 및 해석이 가능함을 알 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 선형 시변 시스템에 대하여 잘 정의된 SD-, PD-스펙트럼이 존재하기 위한 필요충분 조건과 시간 구간 $[T_0, \infty)$에서 복소수 또는 실수를 계수로 가지는 SPDO를 제시하였다. 이 새로운 결과들은 계수 $a_i(t)$가 어떠한 함수일지라도 해석적인 해가 존재하는 선형 시변 시스템에서는 선형 시불변 시스템과 같이 고유치, 고유벡터, 특성 방정식, 모드 행렬, 안정도 판별, 전달 함수, 고유구조 지정기법 등 실제 제어 문제에 적용할 수 있을 것으로 판단된다. 이것들을 위해서는 SPDO에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론이 좀 더 일반적인 VPDO (Vector Polynomial Differential Operator)와 다변수 선형 시변 동적 시스템으로의 확장이 필요하다. 미분 대수 접근 방법을 사용하므로써 선형 시변 시스템에 대한 적극적이고 계속적인 연구에 도움이 될 것이다.

참고문헌

[1] M. Y. Wu, "A note on stability of linear time-varying systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 19, no. 1, pp. 162, 1974.

[2] J. A. Richards, *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*, Springer-Verlag, New York, 1983.

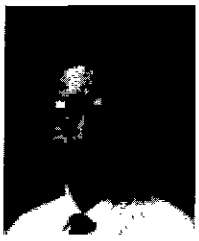
[3] V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Prentice Hall, NJ, 1960.

[4] E. W. Kamen, "The poles and zeros of a linear time-varying system," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 98, pp. 263-289, 1988.

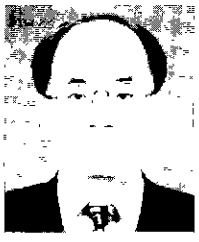
[5] G. Floquet, "Equation differentielles lineaires a coefficients periodiques," *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*, vol 13, no. 2, pp. 47-88, 1883

[6] J. Zhu, A *Unified Eigenvalue Theory for Linear Dynamical Systems*, Ph D. Dissertation, ECE Dept., UAH, Copyrighted and Published by University Microfilm International, Ann Arbor, MI, May 1989.

[7] J. Zhu and C. D. Johnson, "Unified canonical forms for matrices over a differential ring," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 147, pp. 201-248, 1991.
[8] J. Zhu, "A unified spectral theory for linear time-varying systems - progress and challenges," *Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, pp. 2540-2546, 1995.
[9] J. Zhu and C. D Johnson, "New spectral canonical realizations for time-varying linear dynamical systems using a unified eigenvalues concept," *Proc. of the 1991 American Control Conference*, Boston, MA, pp. 1174-1178, 1991.
[10] C. M. Bender, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineering*, McGraw Hill, 1978.
[11] D. R. Smith, "Decoupling and order reduction via the riccati transformation," *SIAM Review*, vol. 29, no. 1, pp. 91-113, 1987
[12] G Floquet, "Sur la theorie des equations differentielles lineaires," *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*, vol. 8, no. 2, pp. 1-131, 1879.
[13] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1956.
[14] H. D'angelo, *Linear Time-Varying Systems : Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, Boston, 1970
[15] W. J Rugh, *Linear System Theory*, Prentice Hall, 1996



J. Jim Zhu
1984년 University of Alabama 졸업(제어). 동대학원 석사(수학,1986), 동대학 박사(제어,1989). 1990년-현재 Louisiana State University 전기 및 컴퓨터공학과 부교수. 관심분야는 선형 시변 시스템 이론, 비선형 시스템 이론, 비행 제어 시스템, 신호처리.



최 재 원
1987년 서울대 제어계측공학과 졸업 동대학원 석사(1989), 동대학 박사(1995). 1995.2.-1995.3. 일본 NASDA/TKSC 방문연구원 1995.9-1996.2 미국 USC 방문연구원. 1998.1-1998.2 미국 LSU 방문연구원. 1996년-현재 부산대학교 기계공학부 조교수 관심분야는 견실 고유구조 지정 이론, 선형 시변 시스템 이론, 항법 및 유도제어 시스템, 자동차 현가장치 제어, 센서융합 및 목표추적 필터 설계.

이 호 철
1998년 부산대 제어기계공학과 졸업. 1998년-현재 부산대 기계공학부 석사과정. 관심분야는 선형 시변 시스템 이론, 항법 및 유도제어 시스템.