

선형 시변 시스템에 대한 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도

Measures of Modal and Gross Controllability/Observability for Linear Time-Varying Systems

최재원, 이호철, 이달호
(Jae Weon Choi, Ho Chul Lee, and Dal Ho Lee)

Abstract : For linear time-varying systems described by the triple $(A(t), B(t), C(t))$ where $A(t), B(t), C(t)$ are the system, the input, and the output matrices, respectively, we propose concepts for measures of modal and gross controllability/observability. We introduce a differential algebraic eigenvalue theory for linear time-varying systems to calculate the PD-eigenvalues and left and right PD-eigenvectors of the system matrix $A(t)$ which will be used to derive the concepts for the measures. The time-dependent angle between the left PD-eigenvectors of the system matrix $A(t)$ and the columns of the input matrix $B(t)$, and the magnitude of the each element of the input matrix $B(t)$ are used to propose the modal controllability measure. Similarly, the time-dependent angle between the right PD-eigenvectors of the system matrix $A(t)$ and the rows of the output matrix $C(t)$, and the magnitude of the each element of the output matrix $C(t)$ are used to propose the modal observability measure. Gross measure of controllability of a mode from all inputs and its gross measure of observability in all outputs for the linear time-varying systems are also proposed. Numerical examples are presented to illustrate the proposed concepts.

Keywords : linear time-varying systems, measure of controllability, measure of observability, gross measure of controllability, gross measure of observability, eigenstructure

I. 서론

본 논문의 목적은 다음 식과 같이 상태공간 방정식으로 표현되는 선형 시변 시스템의 모드 및 총 가제어성/가관측성(mode and gross controllability/observability) 척도(measure) 개념들을 선형 시변 시스템에서도 적용 가능하도록 확장하는 것이다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $x \in R^N$, $u \in R^m$, $y \in R^l$ 이다.

선형 시변 시스템에서는 가제어성/가관측성 행렬 판정법, 가제어성/가관측성 Grammian을 이용한 판정법, PBH 판정법 등과 같은 가제어성/가관측성 판정법들이 있다[1]-[3]. 그러나 이러한 판정법들은 주어진 시스템의 가제어성/가관측성 여부를 "예/아니오"의 2진 정보 형태로만 제공하고, 그 시스템의 가제어성/가관측성 정도에 대한 척도는 제공하지 못한다. 예를 들면, 유연빔(flexible beam)의 진동 모드(mode)를 제어하고자 할 때 그 모드의 마디(node)에 정확하게 위치한 구동기를 가지고는 그 진동 모드를 제어할 수 없지만(uncontrollable), 그 마디에서 조금 떨어진 곳에 구동기를 설치하면 효과적으

로 그 진동 모드를 제어할 수 있게 된다(controllable). 센서의 경우도 마찬가지로 이해할 수 있다.

따라서 가제어성/가관측성의 정도를 정량적으로 나타내는 척도가 필요하고, 이것은 효과적인 제어기/센서를 구성할 때 구동기/센서의 최적 위치를 선정할 때 중요한 정보를 제공한다. 여기에서 각 모드가 각 입력에 의한 제어 가능한 정도를 모드 가제어성(mode controllability), 각 모드가 모든 입력에 의하여 제어 가능한 정도를 총 가제어성(gross controllability)이라 지칭한다. 모드 가관측성(mode observability)과 총 가관측성(gross observability)도 쌍대(duality) 관계에 의해 비슷하게 정의된다.

선형 시변 시스템에 대해서 Longman 등[4]이 정량적인 가제어성 척도를 몇가지 제안하였지만, 그것들은 각 모드에 대한 개별 정보를 제공하지는 못한다. 한편, Hamdan과 Nayfeh[5]는 각 모드에 대한 가제어성/가관측성 척도 개념을 제안하였다. 본 논문에서는 선형 시변 시스템에 대하여 정량적인 가제어성/가관측성 척도를 제시한 Hamdan과 Nayfeh의 연구 결과들을 간략히 살펴보고, 제어 입력 행렬 B 및 출력 행렬 C 크기의 효과를 고려할 수 있도록 Hamdan과 Nayfeh의 연구 결과를 개선한 제안[6],[7]도 간략히 고찰하기로 한다.

한편, 다음 식과 같이 주어지는 N 차 스칼라 선형 시변 시스템을 상정한다.

$$\begin{aligned} y^{(N)} + \alpha_N(t)y^{(N-1)} + \dots + \alpha_2(t)\dot{y} + \alpha_1(t)y &= 0 \\ y^{(k)}(t_0) &= y_{k0} ; k=0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2)$$

접수일자 : 1998. 9. 15, 수정완료 : 1999. 6. 3.

최재원 : 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소

이호철 : 부산대학교 기계공학부

이달호 : 경원대학교 전자공학부

(2)로 표현되는 선형 시변 시스템은 다음과 같은 스칼라 미분 다항식 연산자(SPDO: Scalar Polynomial Differential Operator)를 이용하여 $D_\alpha\{y\}=0$ 의 형태로 표현될 수 있다.

$$D_\alpha = \delta^N + \alpha_N(t)\delta^{N-1} + \dots + \alpha_2(t)\delta + \alpha_1(t) \quad (3)$$

(3)의 $\delta = \frac{d}{dt}$ 는 미분연산자이다. 선형 시변 시스템 (2)에 대한 연구는 제어, 신호처리, 동적 시스템 이론에서 매우 중요하다. 이것은 많은 동적 시스템이 (2)와 같이 선형 미분방정식으로 모델링될 뿐만 아니라 비선형 동적 시스템도 선형화 함으로써 효과적으로 다루어질 수 있기 때문이다.

$\alpha_k(t) = a_k$ 인 시불변 시스템의 경우는 해석적인 해, 안정도 판별, 주파수역 해석 및 안정한 제어기 설계 기법 등을 쉽게 적용할 수 있는 고유치 이론이 있다는 사실은 잘 알려져 있다. 그러나 또한 시불변 고유치 이론은 시변시스템에 직접 적용될 수 없다는 사실도 잘 알려져 있다.

최근에 다음과 같은 SPDO의 인수분해에 관한 플로켓(Floquet) 결과[8]에 기반을 둔 선형 시변 시스템 (2)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론이 개발되었다[9]-[11].

$$D_\alpha = (\delta - \lambda_N(t)) \dots (\delta - \lambda_2(t)) (\delta - \lambda_1(t)) \quad (4)$$

다음은 SPDO의 인수분해에 사용되는 미분연산자 δ 에 대한 대수식을 간단히 기술한 것이다.

$$\begin{aligned} \delta\delta &= \delta^2 \\ \delta\lambda(t) &= \lambda(t)\delta + \dot{\lambda}(t) \\ \lambda_1(t)\lambda_2(t) &= \lambda_1(t)\lambda_2(t) \end{aligned}$$

예를 들면,

$$\begin{aligned} D_\alpha &= [\delta - \lambda_2(t)][\delta - \lambda_1(t)] \\ &= \delta\delta - \delta\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\delta + \lambda_2(t)\lambda_1(t) \\ &= \delta^2 - [\lambda_1(t)\delta + \dot{\lambda}_1(t)] - \lambda_2(t)\delta + \lambda_2(t)\lambda_1(t) \quad (5) \\ &= \delta^2 - [\lambda_1(t) + \lambda_2(t)]\delta + \lambda_1(t)\lambda_2(t) - \dot{\lambda}_1(t) \\ &= \delta^2 + \alpha_2(t)\delta + \alpha_1(t) \end{aligned}$$

이고, 여기서 계수들을 비교하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t) - \dot{\lambda}_1(t) \\ \alpha_2(t) = -[\lambda_1(t) + \lambda_2(t)] \end{cases}$$

미분 대수 스펙트럼 이론에서 (4)를 만족하는 집합 $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 D_α 에 대한 SD-스펙트럼(SD-spectrum)이라 정의되고, 집합 $\{\rho_k(t) = \lambda_{1,k}(t)\}_{k=1}^N$ 를 D_α 에 대한 PD-스펙트럼(PD-spectrum)이라 정의된다[12].

여기서 $\lambda_{1,k}(t)$ 는 비선형 독립 구속조건을 만족하는

λ_k 에 대한 특이해들이고, 아래첨자 k 는 N 차 선형 시변 시스템에 대한 N 개의 SD-, PD-고유치들을 나타낸다. 스칼라 함수 $\lambda_k(t)$ 와 $\rho_k(t)$ 를 각각 SD-고유치, PD-고유치라고 명명한다. 플로켓 이론(Floquet theory)은 꽤 오래된 이론이지만 선형 시변 시스템 이론이나 제어에 충분히 활용되지 않아 왔다. 사실 플로켓 인수분해 (4)는 문헌에 거의 언급되지 않아 왔는데, 이것은 2차 시불변 스칼라 미분 다항식 연산자에 대해서도 스칼라 리카티 방정식 $\dot{\rho} + \rho^2 + \alpha_2\rho + \alpha_1\rho = 0$ 을 만족하는 PD-고유치 $\rho(t) = \lambda_1(t)$ 를 유한시간 특이점 때문에 구하기 힘들다는 사실 때문으로 파악되고 있다[13][14].

본 논문에서는 미분 대수 스펙트럼 이론에 의해서 새롭게 얻어진 선형 시변 시스템의 고유구조를 이용하여 선형 시불변 시스템에서 제시된 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도 개념을 선형 시변 시스템의 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도의 개념으로 확장한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 서론에 이어 II장에서는 새로운 척도 개념의 정립을 위해 활용되는 선형 시변 시스템의 고유구조에 대하여 기술하고, III장에서는 선형 시불변 시스템의 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도를 선형 시변 시스템의 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도로 확장하고 예제를 통하여 제안한 개념들을 확인한다. 마지막으로, IV장에서 결론을 맺는다.

II. 선형 시변 시스템의 고유구조

본 장에서는 선형 시변 시스템의 고유구조(PD-고유치, 좌·우 PD-고유벡터)를 구하기 위하여, 선형 시변 미분방정식 (2)에 대한 고전적인 결과와 (2)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론에 관한 새로운 결과들을 간단히 살펴본다.

$I \subseteq R$ 는 실구간이라 하고, $K = K(R) (K = K(C))$ 는 유한 D-링(differential ring)이라 하면, C^∞ 에서 함수 $f: I \rightarrow R (f: I \rightarrow C)$ 는 K 상에서 정의된 미분연산자 $\delta = \frac{d}{dt}$ 를 가지고 있다. 그러면 $\alpha_k \in K$ 이고 (3)과 같이 정의된 SPDO D_α 는 D-링 K 에서의 연산자이다. (4)의 미분 인수분해 연산자에 관한 플로켓의 고전적인 결과 [15]를 이용하여 미분 대수 고유치 개념에 대한 기본 용어를 다음과 같이 요약한다.

정의 2.1 : (a) D_α 를 $\alpha_k \in K, k=1, 2, \dots, N$ 을 가지고 있는 SPDO라 하자. 그러면 (4)의 인수분해에 의해서 주어지는 스칼라 함수 $\lambda_k \in K (k=1, 2, \dots, N)$ 를 D_α 의 SD-고유치(Series Differential-eigenvalue)라 명명한다. 또한, $\rho(t) = \lambda_1(t)$ 를 D_α 의 PD-고유치(Parallel Differential-eigenvalue)라 명명한다.

(b) $\lambda_k(t)$ 가 (4)를 만족한다면, 집합 $\Gamma_\alpha = (\lambda_k(t))_{k=1}^N$ 을 D_α 에 대한 SD-스펙트럼(Series Differential-spectrum)이라 명명한다.

(c) $\rho_k(t)$ 가 PD-고유치, $\{y_k(t) = \exp(\int \rho_k(t) dt)\}_{k=1}^N$ 가 $D_\alpha\{y\}=0$ 의 해라면 집합 $r_\alpha = \{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 D_α 에 대한

PD-스펙트럼(Parallel Differential-spectrum)이라 명명한다.

(d) $A_c(t)$ 를 D_a 에 대응되는 다음과 같은 형태를 갖는 동반행렬이라 하자.

$$A_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_1(t) & -\alpha_2(t) & \dots & \dots & -\alpha_N(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

그러면, 다음의 행렬을 D_a 와 $A_c(t)$ 에 대한 직렬 스펙트럼 표준형(series spectral canonical form)이라 부른다.

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_N(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$= SS[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)]$$

그리고 다음과 같이 주어지는 대각행렬을 D_a 와 $A_c(t)$ 에 대한 병렬 스펙트럼 표준형(parallel spectral canonical form)이라 부른다.

$$r(t) = \text{diag}[\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_N(t)] \quad (8)$$

정리 2.1 (Floquet)[15] : D_a 를 N 차 SPDO라 하고 $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 을 $D_a(y) = 0$ 의 기본 해집합이라고 하자. 그러면 SD-스펙트럼은 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_k(t) = \frac{d}{dt} \log[v_1(t)v_2(t)\dots v_k(t)] \quad (9)$$

여기서 $v_i(t)$, $i=1, 2, \dots, N$ 는 $D_a(y) = 0$ 의 기본 해 $y_i(t)$ 와 다음의 관계를 갖는 함수이다.

$$y_i(t) = v_1(t) \int v_2(t) \int \dots \int v_i(t) d^{N-1}t \quad (10)$$

특히, 다음 식은 $D_a(y) = 0$ 의 어떤 해 $y(t)$ 에 대해서도 (4)를 만족시킨다.

$$\lambda_1(t) = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \quad (11)$$

주목 2.1 : SD-스펙트럼의 다른 형태는 Ince[16]에 의해 제안된 것으로 Wronskian을 사용하여 기술하는 형태가 있다. 다음 행렬을 $\{y_i(t)\}_{i=1}^k$ 에 대응되는 Wronskian 행렬이라 하자.

$$W_k = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dots & \dot{y}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(i-1)} & y_2^{(i-1)} & \dots & y_k^{(i-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \dots & y_k^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

그리고 다음 식을 Wronskian이라 하자(단, $W_0 \equiv 1$).

$$W_k = \det W_k; k=1, 2, \dots, N \quad (13)$$

그러면 (4)에서 스칼라 함수 $\lambda_k(t)$ 는 다음과 같이 얻어질

수 있다.

$$\lambda_k(t) = \frac{d}{dt} \log \frac{W_k(t)}{W_{k-1}(t)} \quad (14)$$

$$= \frac{\dot{W}_k(t)}{W_k(t)} - \frac{\dot{W}_{k-1}(t)}{W_{k-1}(t)}$$

(14)로부터 $W_k(t) \neq 0$ 이고 $W_{k-1}(t) \neq 0$ 라면 SD-고유치는 시간 t 에서 잘 정의된다는 것을 알 수가 있다.

정리 2.2[10] : $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 N 차 SPDO D_a 에 대한 SD-스펙트럼이라 하자. 그러면 D_a 에 대한 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 은 다음 공식에 의해서 얻어질 수 있다

$$\rho_1(t) = \lambda_1(t)$$

$$\rho_k(t) = \lambda_1(t) + \dot{q}_k(t) q_k^{-1}(t); k=2, 3, \dots, N \quad (15)$$

여기서,

$$q_k(t) = \int \phi_{21}(t) \int \phi_{22}(t) \int \dots \int \phi_{k, k-1}(t) d^{k-1}t \quad (16)$$

$$\phi_{ij}(t) = e^{\int (\rho_i(t) - \lambda_j(t)) dt}$$

정리 2.3 : D_a 를 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 가지고 있는 N 차 SPDO라 하고, $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 는 $y_i(t) = \exp(\int \rho_i(t) dt)$ 인 $D_a(y) = 0$ 의 근이라 하자. D 는 다음의 대각행렬을 나타낸다.

$$D = \text{diag}[y_1, y_2, \dots, y_N] \quad (17)$$

그러면 다음의 관계가 성립한다.

$$WD^{-1} = V(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N) \quad (18)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ D_{\rho_1}\{1\} & D_{\rho_2}\{1\} & \dots & D_{\rho_N}\{1\} \\ D_{\rho_1}^2\{1\} & D_{\rho_2}^2\{1\} & \dots & D_{\rho_N}^2\{1\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{\rho_1}^{N-1}\{1\} & \dots & \dots & D_{\rho_N}^{N-1}\{1\} \end{bmatrix}$$

여기서 $D_{\rho_i} = (\delta + \rho_i)$, $D_{\rho_i}^k = D_{\rho_i} D_{\rho_i}^{k-1}$ 이고, $W = W(y_1, y_2, \dots, y_N)$ 는 $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 에 대응되는 Wronskian 행렬이다. 특히 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\det V = \det W \prod_{k=1}^N y_k^{-1} \quad (19)$$

표준 좌표변환 행렬 $V(t)$ 는 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 에 대응되는 D_a 에 대한 모드 표준 행렬(modal canonical matrix)이라고 불리고, (19)의 행렬식은 대응된 모드 행렬식(associated modal determinant)이라 불린다. $V(t)$ 의 열벡터 $v_i(t)$ 는 다음의 식을 만족한다.

$$A_c(t)v_i(t) - \rho_i(t)v_i(t) = \dot{v}_i(t) \quad (20)$$

그리고 $U(t) = V^{-1}(t)$ 의 행벡터 $u^T(t)$ 는 다음 식을 만족한다

$$u_i^T(t)A_c(t) - \rho_i(t) u_i^T(t) = -\dot{u}_i^T(t) \quad (21)$$

따라서, $v_i(t)$ 와 $u_i^T(t)$ 를 각각 $\rho_i(t)$ 에 대응된 $A_c(t)$ 와 D_a 의 우 PD-고유벡터(right PD-eigenvector) 및 좌 PD-고유벡터(left PD-eigenvector)라고 정의한다. SD-고유벡터도 비슷하게 정의할 수 있다[10].

다음 예제들을 통해서 선형 시불변 시스템에 대한 고유치 개념과 선형 시변 시스템에 대한 SD-, PD-고유치 개념을 명확하게 알 수 있다.

예제 1[10] : 다음과 같은 선형 시불변 2차 SPDO가 있다고 하자.

$$D_a = \delta^2 + \alpha_2\delta + \alpha_1 \quad (22)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 = 0$$

(22)의 선형 시불변 고유치(γ_1, γ_2)와 선형 시변 SD-고유치($\lambda_1(t), \lambda_2(t)$), PD-고유치($\rho_1(t), \rho_2(t)$)를 각각 구하면 다음과 같다.

· 선형 시불변 고유치 :

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

· 선형 시변 SD-고유치 :

$$\lambda_1(t) = \frac{\lambda_{10}}{1 + \lambda_{10}t}, \lambda_{10} = \lambda_1(0)$$

$$\lambda_2(t) = -\lambda_1(t)$$

· 선형 시변 PD-고유치 :

$$\rho_1(t) = \frac{\rho_{10}}{1 + \rho_{10}t}$$

$$\rho_2(t) = \frac{\rho_{20}}{1 + \rho_{20}t}$$

$$\rho_{10} = \rho_1(0) \neq \rho_{20} = \rho_2(0)$$

예제 2[17] : 다음과 같이 주어지는 시스템을 고려하자.

$$\ddot{y}(t) + (3 + 4t^{-1})\dot{y}(t) + (2 + 6t^{-1} + 2t^{-2})y(t) = 0 \quad (23)$$

위 식의 해는 $y_1(t) = t^{-2}e^{-t}$, $y_2(t) = -t^{-2}e^{-2t}$ 로 주어진다. SD- 및 PD-고유치를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_1(t) = \frac{\dot{y}_1(t)}{y_1(t)} = \rho_1(t) = -2t^{-1} - 1$$

$$\lambda_2(t) = \frac{\dot{W}_2}{W_2} - \frac{\dot{W}_1}{W_1} \quad (24)$$

$$= \frac{(4t^{-5} + 3t^{-4})e^{-3t}}{-t^{-4}e^{-3t}} - \frac{(-2t^{-3} - t^{-2})e^{-t}}{t^{-2}e^{-t}}$$

$$= -2t^{-1} - 2$$

$$\rho_1(t) = \frac{\dot{y}_1(t)}{y_1(t)} = \frac{(-2t^{-3} - t^{-2})e^{-t}}{t^{-2}e^{-t}} = -2t^{-1} - 1 \quad (25)$$

$$\rho_2(t) = \frac{\dot{y}_2(t)}{y_2(t)} = \frac{(-2t^{-3} - 2t^{-2})e^{-2t}}{t^{-2}e^{-2t}} = -2t^{-1} - 2$$

(24)의 결과는 (5)에 대입하여 확인할 수 있다. (25)를 이용하여 우 PD-고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2t^{-1} - 1 & -2t^{-1} - 2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

(25)는 다음의 (27)을 만족함을 확인할 수 있다.

$$A_c(t)v_i(t) - \rho_i(t)v_i(t) = \dot{v}_i(t) \quad (27)$$

따라서, 본 예제에서는 SD- 및 PD-고유치가 동일하게 구해지는 것을 알 수 있다.

III. 선형 시변 시스템의 모드 및 총 가제어성 / 가관측성 척도

본 장에서는 II장에서 기술한 선형 시변 시스템의 고유구조를 이용하여, 선형 시변 시스템 상태공간 방정식의 해를 모드 표현(modal expression)으로 나타낸다. 또한, Hamdan과 Nayfeh가 제안한 선형 시불변 시스템에 대한 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도에 대해서 간략하게 살펴보고, 좌·우 PD-고유벡터를 이용하여 선형 시변 시스템의 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도를 제안한다.

II장에서 언급한 PD-고유치, 좌·우 PD-고유벡터를 이용하여 다음과 같이 주어지는 선형 시변 시스템 상태공간 방정식의 해를 모드 표현으로 나타낼 수 있다

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (28)$$

$$y(t) = C(t)x(t)$$

(28)의 해는 다음과 같이 주어진다[18].

$$x(t) = W(t)W^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t)W^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$y(t) = C(t)\left\{W(t)W^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t)W^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right\} \quad (29)$$

여기서, $W(t)$ 는 시스템($\dot{x}(t) = A(t)x(t)$)의 Wronskian이다. (29)는 다음의 관계에 의해서 모드 표현으로 표시된다[19].

$$W(t)W^{-1}(t_0) = V(t)X(t, t_0)U(t_0) \quad (30)$$

여기서, $V(t) = [v_1(t), \dots, v_N(t)]$, $U(t) = [u_1(t), \dots, u_N(t)]^T$ 이고 $v_k(t)$ 와 $u_k(t)$ 는 각각 우 PD-고유벡터, 좌

PD-고유벡터이다. 그리고 $X(t, t_0) = \text{diag} \left[e^{\int_{t_0}^t \rho_1(\tau) d\tau}, e^{\int_{t_0}^t \rho_2(\tau) d\tau}, \dots, e^{\int_{t_0}^t \rho_m(\tau) d\tau} \right]$ 이다. 따라서 각 상태의 초기값을 0으로 두고, (29)를 모드 표현으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^t V(t)X(t, \tau)U(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m v_i(t) \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \rho_i(\tau) d\tau} u^T(\tau) b_j(\tau) u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^N c_k(t) v_i(t) \cdot \\ &\quad \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \rho_i(\tau) d\tau} u^T(\tau) b_j(\tau) u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (31)$$

여기서, N, m, l 은 각각 시스템 행렬, 입력 행렬, 출력 행렬의 차원을 나타낸다. (31)에서 좌 PD-고유벡터 $u^T(t)$ 와 입력 행렬 $b_j(t)$ 를 이용해서 모드 가제어성을 판별할 수 있고, 출력 행렬 $c_k(t)$ 와 우 PD-고유벡터를 이용하여 모드 가관측성을 판별할 수 있다[20]. 따라서 이것들을 가지고 선형 시불변 시스템에서와 같은 방식으로 가제어성/가관측성 척도도 제시할 수 있음을 알 수 있다.

(1)과 같이 표현되는 선형 시불변 시스템을 고려하자. 시스템 행렬 A 의 i 번째 고유치에 대응하는 좌·우 고유벡터를 각각 q_i^T, p_i 라 하고, 입력 행렬에서 j 번째 입력에 해당하는 열을 b_j , 출력 행렬에서 k 번째 출력에 해당하는 행을 c_k 라고 하자. 그러면 $q_i^T b_j$ 의 크기는 다음과 같다.

$$|q_i^T b_j| = \|q_i\| \|b_j\| \cos \theta_{ij}, \quad 0 \leq \theta_{ij} \leq \frac{\pi}{2} \quad (32)$$

(32)에서 $\theta_{ij} = 90^\circ$ 이면 두 벡터는 서로 직교(orthogonal)하므로 i 번째 모드는 j 번째 입력으로는 제어불가능하다. $\theta_{ij} \neq 90^\circ$ 이지만 $\theta_{ij} \approx 90^\circ$ 이면 i 번째 모드는 j 번째 입력으로는 효과적으로 제어할 수 없다.

한편, $\|b_j\|$ 는 j 번째 입력에 의해서 각각의 상태 변수에 인가되는 에너지이다. 즉, $\|b_j\|$ 가 클수록 입력에 의해서 각 상태 변수에 인가되는 에너지가 크므로 더 효과적으로 제어할 수 있다 따라서, $\|b_j\|$ 도 가제어성 척도를 나타내는 요소가 될 수 있다.

가제어성과 가관측성은 서로 쌍대 관계에 있으므로, $|c_k p_i|$ 의 크기는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$|c_k p_i| = \|c_k\| \|p_i\| \cos \phi_{ki}, \quad 0 \leq \phi_{ki} \leq \frac{\pi}{2} \quad (33)$$

(33)에서도 가제어성과 마찬가지로 i 번째 모드의 가관측성 척도를 c_k 와 p_i 가 이루는 각으로 나타낼 수 있다. 또한, $\|c_k\|$ 도 가제어성 척도에서와 마찬가지로 해석할 수 있다.

Hamdan과 Nayfeh는 모드 가제어성/가관측성 척도를

각각 θ_{ij}, ϕ_{ki} 로 제시하였다[5]. 그러나 Hamdan과 Nayfeh가 제시한 모드 가제어성/가관측성 척도에는 입력 행렬 B 와 출력 행렬 C 의 크기가 반영되지 못하였다. 따라서 가제어성/가관측성 척도에 입력 행렬 B 와 출력 행렬 C 의 크기를 고려한 개선된 척도들이 다음 형태로 제안되었다[6][7].

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= (\cos \theta_{ij}) \|b_j\| \\ &= \frac{|q_i^T b_j|}{\|q_i\|} \quad (i=1, \dots, N, j=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \nu_{ki} &= (\cos \phi_{ki}) \|c_k\| \\ &= \frac{|c_k p_i|}{\|p_i\|} \quad (i=1, \dots, N; k=1, \dots, l) \end{aligned} \quad (35)$$

(34)와 (35)는 각각 개선된 가제어성, 가관측성 척도이다. 여기서 $\|b_j\| = 1 (j=1, \dots, m)$ 인 경우에 수정된 가제어성 척도는 Hamdan과 Nayfeh의 결과와 동일하고, 마찬가지로 $\|c_k\| = 1 (k=1, \dots, l)$ 인 경우 수정된 가관측성 척도도 Hamdan과 Nayfeh의 결과와 동일하다.

i 번째 모드와 모든 입력과의 총 가제어성 척도(gross measure of controllability)는 다음과 같이 정의된다[5].

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \|g_i\| \\ g_i &= \frac{q_i^T B}{\|q_i\|} \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (36)$$

(36)에서 $\|g_i\|$ 는 모든 입력으로부터 i 번째 모드에 인가되는 총 에너지를 나타낸다. 총 가관측성 척도(gross measure of observability)도 다음과 같이 정의된다[5].

$$\begin{aligned} \beta_i &= \|h_i\| \\ h_i &= \frac{C p_i}{\|p_i\|} \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (37)$$

앞에서 언급한 선형 시불변 시스템에 대한 모드 가제어성/가관측성 척도 개념과 II장에서 기술한 선형 시변 시스템의 고유구조를 이용하여 선형 시변 시스템의 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도를 제안하고자 한다.

먼저 다음과 같은 상태 공간 방정식으로 표현되는 선형 시변 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \quad (38)$$

여기서, $x \in R^N, u \in R^m, y \in R^l$ 이다. II장에서 언급한 바와 같이 PD-고유치, 좌·우 PD-고유벡터를 구할 수 있다. 그러면 i 번째 PD-고유치를 $\rho_i(t)$ 라 하고, 그에 대응되는 좌·우 PD-고유벡터를 각각 $u_i^T(t), v_i(t)$ 라 하자. (34) 및 (35)와 같은 개념으로 선형 시변 시스템에 대한 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도를 다음과 같이 제안한다.

제안 1(선형 시변 시스템의 모드 가제어성 척도) :

j 번째 입력에 의한 i 번째 모드의 가제어성 척도를 다음과 같이 제안한다.

$$\begin{aligned} \mu_u(t) &= (\cos \theta_v(t)) \|b_j(t)\| \\ &= \frac{|u_i^T(t) b_j(t)|}{\|u_i(t)\|} \quad (i=1, \dots, N; j=1, \dots, m) \end{aligned} \tag{39}$$

여기서 $b_j(t)$ 는 $B(t)$ 에서 j 번째 입력에 해당하는 열벡터, $u_i^T(t)$ 는 i 번째 모드에 대응되는 좌 PD-고유벡터이다.

주목 3.1 : 위의 제안에서 i 번째 모드와 j 번째 입력이 서로 직교한다면 i 번째 모드는 j 번째 입력으로는 제어 불가능하고, 이것은 선형 시변 시스템의 PBH 고유벡터 판정법[20]으로 확인할 수 있다. 또한 j 번째 입력에 대한 i 번째 모드의 모드 가제어성 척도는 j 번째 입력 $b_j(t)$ 의 크기에 비례하고, i 번째 좌 PD-고유벡터 $u_i^T(t)$ 와 j 번째 입력 $b_j(t)$ 사이의 각과는 반비례한다.

제안 2(선형 시변 시스템의 총 가제어성 척도) :

모든 입력에 의한 i 번째 모드의 총 가제어성 척도는 다음과 같이 제안한다.

$$\begin{aligned} g_i(t) &= \|g_i(t)\| \\ g_i(t) &= \frac{u_i^T(t) B(t)}{\|u_i(t)\|} \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \tag{40}$$

주목 3.2 : 벡터 $g_i(t)$ 의 각 요소는 좌 PD-고유벡터 $u_i^T(t)$ 방향에 있는 입력 행렬 $B(t)$ 의 열벡터 $b_j(t)$ 의 요소이며, i 번째 모드를 효과적으로 제어하는 에너지는 좌 PD-고유벡터 $u_i^T(t)$ 의 방향에 있는 벡터 $b_j(t)$ 의 요소에 달려있다. 따라서 $g_i(t)$ 의 2-놈(norm)은 모든 입력으로부터 i 번째 모드에 인가되는 에너지를 나타낸다.

제안 3(선형 시변 시스템의 모드 가관측성 척도) :

k 번째 출력에서 i 번째 모드의 가관측성 척도는 다음과 같이 제안한다.

$$\begin{aligned} \mu_m(t) &= (\cos \phi_k(t)) \|c_k(t)\| \\ &= \frac{|c_k(t) v_i(t)|}{\|v_i(t)\|} \quad (i=1, \dots, N; k=1, \dots, l) \end{aligned} \tag{41}$$

주목 3.3 : k 번째 출력에서 i 번째 모드의 모드 가관측성 척도도 가제어성 척도와 비슷하게 해석된다. 즉, k 번째 출력과 i 번째 모드가 서로 직교한다면, i 번째 모드는 k 번째에 출력에서 관측불가능하고, k 번째 출력에서 i 번째 모드에 대한 가관측성 척도는 k 번째 출력 $c_k(t)$ 의 크기에 비례하고, i 번째 우 PD-고유벡터 $v_i(t)$ 와 k 번째 출력 $c_k(t)$ 사이의 각과는 반비례한다.

제안 4(선형 시변 시스템의 총 가관측성 척도) :

모든 출력에서 i 번째 모드의 총 가관측성 척도는 다음과 같이 제안한다.

$$\beta_i(t) = \|h_i(t)\| \tag{42}$$

$$h_i(t) = \frac{C(t) v_i(t)}{\|v_i(t)\|} \quad (i=1, \dots, N)$$

주목 3.4 : k 번째 출력에서 i 번째 모드에 대한 정보는 우 PD-고유벡터 $v_i(t)$ 의 방향에 있는 출력 행렬 $C(t)$ 의 행벡터 $c_k(t)$ 요소에 의존한다. 만약 그것이 0이라면 k 번째 출력에서 i 번째 모드는 관측불가능하다. 따라서 벡터 $h_i(t)$ 의 2-놈(norm)은 모든 출력에서 i 번째 모드의 정보를 나타낸다.

앞에서 제안한 선형 시변 시스템의 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도를 다음의 수치 예제를 통하여 살펴본다.

예제 3(선형 시변 시스템의 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도)

다음과 같이 주어지는 선형 시변 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 + \frac{7}{2}t - t^2 & \frac{7}{2} - 2t \end{bmatrix} x(t) + \\ & \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} & e^{-\frac{1}{2}(t-\frac{3}{2})^2} \\ (\frac{3}{2}-t)e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} & (2-t)e^{-\frac{1}{2}(t-\frac{3}{2})^2} \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \tag{43}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

(43)의 일반해를 구하기 위해 SPDO를 이용해서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D(y(t)) &= \left\{ \delta^2 + (2t - \frac{7}{2})\delta \right. \\ & \left. + (t^2 - \frac{7}{2}t + 4) \right\} (y(t)) = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

(44)에서 준 시스템의 PD-고유치, 좌 · 우 PD-고유벡터를 다음과 같이 구할 수 있다.

· PD-고유치 :

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \frac{\dot{y}_1(t)}{y_1(t)} = \frac{(\frac{3}{2}-t)e^{(\frac{3}{2}t-\frac{t^2}{2})} C_1}{e^{(\frac{3}{2}t-\frac{t^2}{2})} C_1} = \frac{3}{2} - t \\ \rho_2(t) &= \frac{\dot{y}_2(t)}{y_2(t)} = \frac{(2-t)2e^{(2t-\frac{t^2}{2})} C_2}{2e^{(2t-\frac{t^2}{2})} C_2} = 2 - t \end{aligned} \tag{45}$$

· 우 PD-고유벡터 :

$$V(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \rho_1(t) & \rho_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} - t & 2 - t \end{bmatrix} \tag{46}$$

· 좌 PD-고유벡터 :

$$\begin{aligned} U(t) = V^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} u_1^T(t) & u_2^T(t) \\ 4-2t & -2 \\ -3+2t & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{47}$$

앞에서 제안한 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도를 이용하면 준 시스템의 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도는 다음과 같이 구해진다.

· 모드 가제어성 척도 :

$$\begin{aligned} \mu_{11}(t) &= \frac{|z_1^T(t) b_1(t)|}{\|u_1(t)\|_2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}}{\sqrt{(4-2t)^2 + (-2)^2}} \\ \mu_{12}(t) &= \frac{|z_1^T(t) b_2(t)|}{\|u_1(t)\|_2} = 0 \\ \mu_{21}(t) &= \frac{|z_2^T(t) b_1(t)|}{\|u_2(t)\|_2} = 0 \\ \mu_{22}(t) &= \frac{|z_2^T(t) b_2(t)|}{\|u_2(t)\|_2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\frac{3}{2})^2}}{\sqrt{(-3+2t)^2 + (2)^2}} \end{aligned} \quad (48)$$

· 총 가제어성 척도 :

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \|g_1(t)\|_2 = \mu_{11}(t) \\ \alpha_2(t) &= \|g_2(t)\|_2 = \mu_{22}(t) \end{aligned} \quad (49)$$

· 모드 가관측성 척도 :

$$\begin{aligned} \nu_{11}(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{3}{2} - t)^2}}, & \nu_{12}(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (2 - t)^2}} \\ \nu_{21}(t) &= \frac{|\frac{3}{2} - t|}{\sqrt{1 + (\frac{3}{2} - t)^2}}, & \nu_{22}(t) &= \frac{|2 - t|}{\sqrt{1 + (2 - t)^2}} \end{aligned} \quad (50)$$

· 총 가관측성 척도 :

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= \sqrt{\left(\frac{15/2 - t}{\sqrt{1 + (3/2 - t)^2}}\right)^2} \\ \beta_2(t) &= \sqrt{\left(\frac{13 - t}{\sqrt{1 + (2 - t)^2}}\right)^2} \end{aligned} \quad (51)$$

예제 3의 (48)과 같이 구해진 모드 가제어성 척도의 시간에 따른 추이를 그래프로 나타내면 그림 1, 2와 같다. 그림 1, 2에서 준 시스템은 약 4초 이후에는 제어 불가능해진다는 것을 알 수 있다. 또한, 준 시스템의 제어 목적이 시스템을 안정화하는 것이라면, 예제 3의 (45)와 같이 구해진 PD-고유치를 선형 시변 시스템의 안정도 판별법(Extended Mean Stability Criterion)[19]에 적용시키면 대략 2초까지 준 시스템이 불안정하다는 것을 알 수 있다. 선형 시변 시스템의 모드 가제어성 척도의 정보를 이용하면 준 시스템이 불안정한 구간에 있을 때 가제어성의 정도가 높다는 것을 알 수 있다. 따라서 이 구간에서 제어를 설계함으로써 시스템을 효과적으로 안정화시킬 수 있다. 즉, 선형 시변 시스템의 모드 가제어성 척도를 이용하여 시스템을 효과적으로 제어할 수 있는 구간을 결정할 수 있다. 선형 시변 시스템의 모드 가관측성 척도도 모드 가제어성 척도와 같은 방법으로 해석할 수 있다.

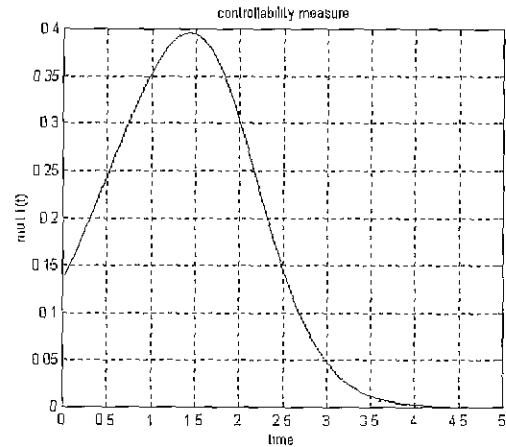


그림 1. 1번째 모드에 대한 모드 가제어성 척도 ($\mu_{11}(t)$)의 시간에 대한 추이.

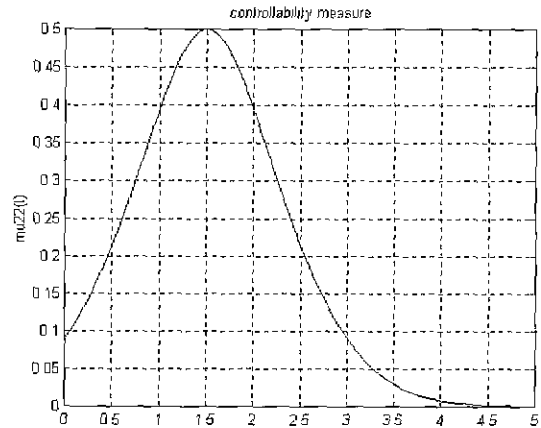


그림 2. 2번째 모드에 대한 모드 가제어성 척도 ($\mu_{22}(t)$)의 시간에 대한 추이.

IV. 결론

본 논문의 II장에서는 선형 시변 시스템에 대한 고유구조 이론을 간략히 소개하였다. III장에서는 선형 시변 시스템에서 Hamdan과 Nayfeh가 제안했던 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도에 대해 간략히 살펴보고, II장에서 소개한 선형 시변 시스템의 고유구조를 이용하여 선형 시변 시스템에 대한 모드 및 총 가제어성/가관측성 척도 개념을 새로이 제안하였다.

본 논문에서 제안한 선형 시변 시스템의 모드 및 총 가제어성 척도를 이용하여 시간에 따른 가제어성 정도의 추이를 알 수 있고, 이를 이용하여 시스템을 효과적으로 제어할 수 있는 구간을 결정할 수 있다. 또한 모드 및 총 가관측성 척도도 가제어성 척도의 경우와 비슷하게 해석할 수 있는데, 이를 이용하여 시스템의 가관측성 정도의 시간에 따른 추이를 알 수 있고, 제어기와 함께 시스템 관측기를 적용시킬 수 있는 구간을 결정할 수 있다. 또한, 선형 시변 시스템의 고유구조 지정시 바람직한 좌·우 고유벡터를 결정하는 기준으로서 응용될 수 있다.

참고문헌

- [1] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- [2] W. J. Routh, *Linear System Theory*, Prentice Hall Inc., 1996.
- [3] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall Inc., 1980.
- [4] C. N. Viswanathan, R. W. Longman, and P. W. Linkins, "A definition of the degree of controllability - A criterion for actuator placement," *Proc. of Second VPI & SU AIAA Symposium on Dynamics and Control of Large Flexible Spacecraft*, Blacksburg, VA, USA, June, 1979.
- [5] A. M. A. Hamdan, and A. H. Nayfeh, "Measures of modal controllability and observability for first- and second-order linear systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 12, no. 3, pp. 421-428, 1989.
- [6] J. W. Choi, *Control Design Methodologies Using Left and Right Eigenstructure with Applications to Flight Systems*, Ph. D. Dissertation, Seoul National University, 1995.
- [7] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, "Design of an effective controller via accommodating left eigenstructure assignment," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 2, pp. 347-354, 1995.
- [8] G. Floquet, "Equation differentielles lineaires a coefficients periodiques," *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, vol. 13, no. 2, pp. 47-88, 1883.
- [9] J. Zhu, *A Unified Eigenvalue Theory for Linear Dynamical Systems*, Ph. D. Dissertation, ECE Dept., UAH, Copyrighted and Published by University Microfilm International, Ann Arbor, MI, May, 1989.
- [10] J. Zhu, and C. D. Johnson, "Unified canonical forms for matrices over a differential ring," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 147, pp. 201-248, March, 1991.
- [11] J. Zhu, "A unified spectral theory for linear time-varying systems - progress and challenges," *Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, pp. 2540-2546, December, 1995.
- [12] J. Zhu, and C. D. Johnson, "New spectral canonical realizations for time-varying linear dynamical systems using a unified eigenvalues concept," *Proc. of the 1991 American Control Conference*, Boston, MA, pp. 1174-1178, June, 1991.
- [13] C. M. Bender, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw Hill, 1978.
- [14] D. R. Smith, "Decoupling and order reduction via the Riccati transformation," *SIAM Review*, vol. 29, no. 1, pp. 91-113, March, 1987.
- [15] G. Floquet, "Sur la theorie des equations differentielles lineaires," *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, vol. 8, no. 2, pp. 1-131, 1879.
- [16] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1956.
- [17] J. Zhu, 이호철, 최재원, "선형 시변 시스템에 대한 잘 정의된 직렬 및 병렬 D-스펙트럼," *제어·자동화·시스템공학회 논문지*, 제5권, 제5호, pp. 521-528, 1999. 7.
- [18] H. D'angelo, *Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.
- [19] J. Zhu, "A necessary and sufficient stability criterion for linear time-varying systems," *Proc. of the 28th IEEE Southeastern Symposium on Systems Theory*, Baton Rouge, LA, pp. 115-119, April, 1996.
- [20] J. Zhu, "PD-eigenstructure assignment control for multivariable nonlinear tracking and decoupling," *Final Report for the 1995 AFOSR Summer Research Extension Program*, Armament Directorate, Eglin AFB, pp. 12-16, December, 1996.



최재원

1987년 서울대 제어계측공학과 졸업. 동대학원 석사(1989), 동대학원 박사(1995). 1995년2월-1995년 3월 일본 NASDA /TKSC 방문연구원. 1995년 9월-1996년 2월 미국 USC 방문연구원. 1998년 1월-1998년 2월 미국

LSU 방문연구원. 1996년-현재 부산대학교 기계공학부 조교수. 관심분야는 견실 고유구조 지정 이론, 선형 시변 시스템 이론, 항법 및 유도제어 시스템, 자동차 현가장치 제어.



이호철

1998년 부산대 제어기계공학과 졸업. 1998년-현재 부산대 기계공학부 석사 과정. 관심분야는 선형 시변 시스템 이론, 항법 및 유도제어 시스템.



이달호

1982년 서울대 제어계측공학과 졸업. 동대학원 석사(1985), 동대학원 박사(1992). 1992년-현재 경원대 전자공학과 조교수. 1997년 7월-1998년 7월 미국 USC 교환교수. 관심분야는 추정론, 식별론, 선형 시스템 이론.