

여유구동을 지닌 인체의 능동스프링 현상에 대한 해석과 운동주파수 제어방식으로의 적용

Analysis on Active Spring Effect in Human-Body Having Redundant Actuation with Application to Motion Frequency

이 병 주
(Byung-Ju Yi)

Abstract : The purpose of this study is to analyze how the human body having more muscles than its degree-of-freedom modulates an effective stiffness using redundant actuation, and to apply this concept to the design and control of advanced machines which requires adaptable spring. To investigate the adaptable stiffness phenomenon due to redundant actuation in the human body, this paper derives a general stiffness model of the human body. In particular, for a planar 1 DOF human arm model, a planar 2 DOF human arm model, a spherical 3 DOF shoulder model, a 4 DOF human arm model, and a 7 DOF human arm model, the required nonlinear geometry and the number of required actuator for successful modulation of the effective stiffness are analyzed along with a load distribution method for modulation of the required stiffness of such systems. Secondly, the concept of motion frequency modulation is introduced to show the usefulness of adaptive stiffness modulation. The motion frequency modulation represents a control of stiffness and/or inertia properties of systems. To show the effectiveness of the proposed algorithm, simulations are performed for 2 DOF anthropomorphic robot.

Keywords : redundant actuation, human body, active spring, adaptable stiffness, frequency modulation, anthropomorphic robot

1. 서론

인체와 일반적인 동물구조 그리고 곤충의 구조를 살펴보면 공통적으로 여유구동의 형태를 지니고 있음을 살펴볼 수 있다. 여유구동을 정의하기 위하여 모빌리티의 개념을 소개하고자 한다. 특정한 시스템의 모든 위치에서의 운동을 제어하는데 필요한 최소한의 파라미터의 개수를 모빌리티라고 칭하며 다음과 같은 관계식으로 정의된다.

$$M = N(L-1) - \sum_{i=1}^L (N_i - F_i) \quad (1)$$

여기서, N , L , J , 그리고 F_i 는 각각 시스템의 작업 지점에서의 운동자유도, 시스템의 링크의 개수, 시스템의 관절의 수, 그리고 각 관절의 운동자유도를 나타낸다. 시스템이 모빌리티 보다도 많은 액추에이터로 구동되는 경우를 여유구동(redundant actuation)된 상태라고 칭하며, 일반적인 인체 시스템은 이러한 구동모드를 지님을 살펴볼 수 있다. 예를 들어서 인체 팔은 모빌리티가 7이지만 29개의 구동 액추에이터(human muscle)로 과다 여유구동(hyper-redundant actuation)의 형태를 지니고 있다. 일반적으로 인체와 동물 그리고 곤충의 구조은 이러한 여유구동을 적절히 사용하여 매우 다양한 작업을 하고 있음을 살펴볼 수 있었다[7]-[9][20].

여유구동을 지닌 시스템들[14]-[23]은 자유도 보다도

많은 액추에이터로 전체 시스템을 운용하므로 여유구동된 액추에이터 간에 동작에 필요한 힘을 적절히 분배하는 여러 가지 방법들을 제시할 수 있을 뿐만 아니라, 시스템의 정적평형 상태에서 내력을 이용하여 유용한 효과를 추가적으로 얻을 수 있다는 장점이 있다. 이 밖에도 여유구동의 특성은 시스템의 일부 액추에이터의 고장에도 견딜 수 있는 능력을 부여해 준다. 이중 암(Dual arm), 다지 손(multi-fingered hands), 보행 머신(walking machine) 등의 로봇트 메커니즘들은 여러 개의 로봇트 직렬체인이 공동으로 물체를 잡고 동작하는 경우에만 여유구동 병렬형 폐쇄체인(parallel closed chain)의 형태를 이루는 반면에, 인체와 일반적인 동물구조 그리고 곤충의 구조에서는 하나의 직렬체인(serial chain) 구조가 여러 개의 근육으로 묶어진 혼합형 체인(hybrid chain)을 이루고 있는 여유구동 시스템을 알 수 있다. 인체에서와 같이 이러한 형태의 여유구동을 지니고 있는 시스템에 대한 구체적인 연구는 국내의 전반적으로 매우 초보적인 상태이다.

또한 기존의 로봇 메커니즘 분야에서의 강성에 관한 연구는 로봇구조 자체에 대한 모델링[5][6], 그리고 피드백에 근거한 강성 제어[3][12] 등을 들 수 있다. 이와는 달리 Hogan[8][9]은 동물학적 구조에서 상반되는 여유구동(antagonistic redundant actuation)이 의하여 실제의 스프링에서와 같은 강성 효과가 발생하는 현상에 대한 개념을 최초로 소개하였으나 일자유도의 모델에 국한되었으며 정확한 수학적 모델을 제시하지 못했다. Cutkosky와 Wright[4]가 제시한 4절 기구의 조합으로 설계된 손목기구는 유압의 힘으로 미리 힘을 가함(preloading)으로

써 강성을 능동적으로 조절하는 특성을 지니고 있음을 제시하였다. 그러나, 이상의 연구에서는 이러한 강성 효과에 대한 정확한 수학적 모델링이 제시되지 않았을 뿐만 아니라, 여유구동의 형태에 따른 안정성에 관해서도 언급되지 않았고, 더욱이 인체와 같이 다자유도를 지니는 일반적인 경우에 대하여도 논하여지지 않았다.

따라서, 본 연구에서는 다양한 인체 모델에 대한 여유구동의 내력(internal force)을 이용하여 강성 효과에 대한 해석과 이에 관련된 힘 분배 방식을 통하여 강성(stiffness) 효과를 능동적으로 제어하는 현상이 인체 제어에 있어서 매우 중요한 역할을 하고 있음을 밝히고, 하나의 인체형 모델에 대한 시뮬레이션을 통하여 제시되는 강성 및 주파수 변조방식에 관한 알고리즘을 구현하고자 한다.

II. 인체 근육의 구조 및 특성

본 절에서는 일반적인 인체 근육의 구조 및 특성을 살펴보고자 한다. 예로서 인간 팔에서의 근육 모델을 고려해 본다. 인체의 팔에는 모두 29개의 근육이 존재함이 알려져 있다[2]. 이러한 근육들은 사람에 따라서 변화는 있지만 각각 부착된 위치가 다르며 그 기능들이 조금씩 다르다고 알려져 있다[2][7]. 그림 1은 인체 팔의 평면형 모델을 나타내며 대표적인 몇 개의 근육들을 소개한다. 인체 팔 근육은 완요골근(brachioradialis), 상완근(brachialis), 상완삼두근(tricep short head), coracobrachialis, 그리고 삼각근(deltoid) 등과 같이 하나의 관절을 가로지르는 단관절형(mono-articular) 근육과 상완삼두근(tricep long head), 그리고 하완이두근(bicep) 등과 같이 두 개의 관절을 가로지르는 이관절형(bi-articular) 근육으로 구분되며, 동일한 관절을 가로지르는 같은 형태의 근육들이라고 할지라도 다른 부착위치를 지님으로써 기구학적으로 다른 영향을 제공함을 살펴볼 수 있다. 이러한 모델은 2 자유도를 지닌 경우로서 7개의 근육으로 구동되는 여유구동 시스템이다. 이와 같이 인체에 필요 이상으로 많이 존재하는 근육의 용도를 Hogan [8][9]은 다음과 같이 설명하고 있다. “인체의 신경계환(neurofeedback) 시스템은 제한속도가 매우 느리기 때문에 10Hz 이상의 운동주파수가 요구되는 빠른 동작을 감당할 수 없다. 따라서, 이러한 운동주파수를 만족시키기 위한 hardware가 인체에 존재하는데 그것은 바로 여유구동일 것으로 짐작된다. 많은 근육들이 서로 힘의 평형을 이루면서 길항하는 현상으로부터 인체는 강성을 조절할 수 있음을 짐작할 수 있는데, 이러한 강성조절 능력은 neurofeedback에 의존하지 않고 개회로 방식(openloop fashion)으로 빠른 운동주파수를 조절할 수 있는 도구가 되므로, 이러한 경우를 고려할 때에 인체에 존재하는 많은 근육은 결코 많다고 간주할 수는 없을 것이다.” 그러나, Hogan뿐만 아니라 많은 생체학자들은 이러한 현상에 대한 언급을 하였을 뿐 강성 생성 현상에 대한 수학적 모델을 제시하지 못하였다.

인체의 팔은 근육들을 수축시킴으로써 견고해지는데 이러한 현상은 근육들이 서로 싸우는 상황에서 발생하

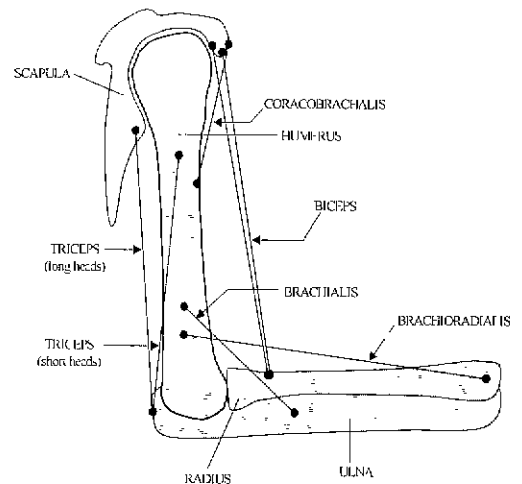


그림 1. 인간 상박의 근육 구조.

Fig. 1. Muscles in human upper-extremity.

며, 또한 시스템의 강성이 증가함을 나타낸다. 인체 팔은 resting 위치, 즉 상박이 어느 정도 접혀진 상태에서 가장 큰 힘을 생성할 수 있다고 알려져 있으며[7], 각각의 주어진 형상에서 근육들 간의 힘의 평형을 이룰 수 있다. 이러한 경우에 일반적으로 근육의 수축 힘과 수축된 근육의 길이 간의 관계가 성립하는데 이러한 모델은 생체역학 분야에서 많은 근육모델을 통하여 설명되어져 왔다. 결과적으로 등척상태(isometric state)에서 근육의 수축 힘과 근육의 수축 길이 간의 관계는 비선형 관계를 지니므로 비선형 강성을 나타낸다. 그러나, 기존의 연구에서는 단순한 하나의 근육에 대한 강성모델에 대하여만 언급하였고 이러한 모델을 활용한 jumping과 같은 동작에서 인체 근육에서의 힘을 예측하는 연구[10] 등이 진행되었을 뿐, 인체 시스템을 다자유도로 강성시스템으로 모델링하고 이에 대한 특성을 연구하는 분야는 매우 미진하였음을 살펴볼 수 있다.

Neurofeedback에 의한 강성제어는 그 한계가 있다고 알려져 왔으므로 본 연구에서는 실제로 인체의 기계적인 요소들만으로 강성을 제어하는 방식에 대하여 살펴보도록 한다. 이에 따라서, 인체 팔에서의 강성은 두 가지 요소로 모델링되는데 첫 번째로는 이미 알려진 바와 같이 근육의 길이와 근육의 수축 힘에 의하여 정해지는 근육의 강성요소이며, 두 번째로는 기구학적 자유도보다도 무수히 많은 근육들이 힘평형을 이루며 서로 싸우는 내력으로 인한 효과적인 강성으로 구성된다. 두 번째 요소는 생체역학 분야에서 전혀 고려되지 않은 사항이지만, 로봇공학의 관련분야는 이미 연구되고 있음을 살펴볼 수 있다[21]-[23].

III. 여유구동을 지닌 인체에서의 강성 모델링 및 해석

1. 기구학 모델링 방식

본 연구에서는 KIC(Kinematic Influence Coefficient) 방법과 d'Alembert의 법칙을 접목하여 시스템 관계식이 벡터형으로 표현되는 모델링 방식을 선택하였다[1]. 페루프 체인의 기구학 모델에 대한 소개에 앞서, 직렬 체인

의 기구학을 소개한다 이것은 페루프 체인은 open-tree structure 상황하에서 여러 개의 직렬 체인이 특정한 구속조건으로 묶여서 이루어져 있기 때문이다. 모델링에 앞서 표기에 대해서 간단히 소개하면, 다음에서 계속 사용될 G와 H는 각각 일차와 이차 미분을 나타내고, 윗 첨자는 고려되거나 지시하는 종속 매개변수를 나타내고, 아래 첨자는 독립 매개변수를 나타낸다.

페루프 체인의 i 번째 직렬 체인(serial chain)의 자코비안(Jacobian) $[{}^i G_{\phi}^u]$ 은 $N \times 1$ 의 차원을 지닌 독립 변수 속도 벡터 $\dot{\phi}_a$ 에 대한 $M \times 1$ 의 차원을 지닌 종속 변수 속도 벡터 \dot{u} 의 관계를 나타낸다. 다음의 속도 관계식에서

$$u = [{}^i G_{\phi}^u] \dot{\phi}_a \quad (2)$$

자코비안 $[{}^i G_{\phi}^u]$ 는 $M \times N$ 의 차원을 지니며, 아래와 같이 정의되며

$$[{}^i G_{\phi}^u] = \left[\frac{\partial u}{\partial \phi_1}, \frac{\partial u}{\partial \phi_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \phi_N} \right] \quad (3)$$

여기서, $[{}^i G_{\phi}^u]$ 의 j번째 행은 출력 벡터 u의 j번째 입력 요소 u_j 에 대한 ϕ 의 편미분이고, $[{}^i G_{\phi}^u]$ 의 j번째 열은 출력 벡터 u에 대한 j번째 입력 요소 ϕ_j 의 편미분이다. 이때 $[{}^i G_{\phi}^u]$ 를 일차 KIC(Kinematic Influence Coefficient)라 정의한다. (2)를 시간에 대하여 미분하면 다음과 같은 가속도 벡터를 구할 수 있는데

$$\dot{u} = [{}^i G_{\phi}^u] \dot{\phi} + \dot{\phi}^T [{}^i H_{\phi\phi}^u] \dot{\phi} \quad (4)$$

여기서, 삼차원 행렬 $[{}^i H_{\phi\phi}^u]$ 는 $M \times N \times N$ 의 차원을 지니며, 다음과 같이 정의된다[1].

$${}^i H_{\phi\phi}^u = \begin{bmatrix} \dot{\phi}^T [{}^i H_{\phi\phi}^u]_{(1, \cdot)} \dot{\phi} \\ \dot{\phi}^T [{}^i H_{\phi\phi}^u]_{(2, \cdot)} \dot{\phi} \\ \vdots \\ \dot{\phi}^T [{}^i H_{\phi\phi}^u]_{(N, \cdot)} \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (5)$$

(5)에서 $[{}^i H_{\phi\phi}^u]_{(j, \cdot)}$ 는 $[{}^i H_{\phi\phi}^u]$ 의 j번째 평면(plane)을 의미하고, $N \times N$ 의 차원을 지니며, 다음 식과 같이 정의된다[1].

$$[{}^i H_{\phi\phi}^u]_{(j, \cdot)} = \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial \phi \partial \phi} \right] \quad (6)$$

2 인체에서의 강성 모델링 및 힘분배 방식

1) 기구학 모델링

인체는 여러 개의 폐쇄체인으로 구성되어 있는 시스템을 살펴볼 수 있다. W개의 폐쇄체인으로 구성된 시스템을 고려하면, 독립적인 holonomic 구속방정식의 수(IC)는 다음과 같다.

$$IC = W \times Q \quad (7)$$

(7)에서 Q는 평면형/구형 시스템에서는 3, 그리고 공간형 시스템에서는 6이 된다. 이러한 독립적인 holonomic 구

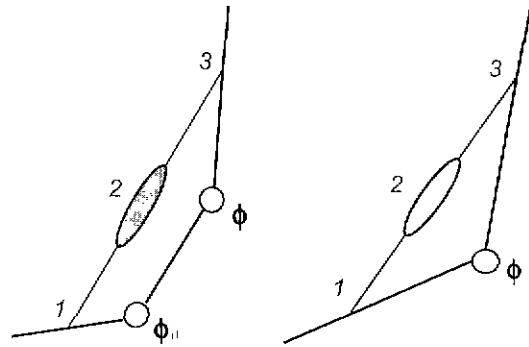


그림 2. 근육 형태. Fig. 2. Muscle types

속방정식들은 다음과 같이 Lagrangian 좌표계에 대하여 표현되며, Lagrangian 좌표는 독립좌표와 비독립좌표로 구성된다.

$$f(\phi) = f(\phi_a, \phi_b) = 0 \quad (8)$$

독립좌표(ϕ_a)와 비독립좌표(ϕ_b) 간의 속도관계는 윗 식을 시간에 대하여 미분하여 정리함으로써 다음과 같이 구해지며

$$\dot{\phi}_b = - \left[\frac{\partial f}{\partial \phi_b} \right]^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial \phi_a} \right] \dot{\phi}_a = [G_{ab}^f] \dot{\phi}_a \quad (9)$$

여기서, $[G_{ab}^f]$ 는 일차기구학적 영향계수를 나타낸다. (9)을 시간에 대하여 다시 한번 미분하면 다음과 같이 가속도 관계식이 구해지며

$$\ddot{\phi}_b = [G_{ab}^f] \ddot{\phi}_a + \dot{\phi}_a^T [H_{aa}^f] \dot{\phi}_a \quad (10)$$

여기서, $[H_{aa}^f]$ 은 이차기구학적 영향계수를 나타낸다.

인체는 대부분 두 가지 형태의 근육으로 존재하는데 그림 2에서와 같이 하나의 관절을 가로지르는 mono-articular 근육과 두 개의 관절을 가로지르는 bi-articular 근육으로 구성된다. 일반적인 로봇과는 달리 회전관절 ϕ_i 은 구동되지 않으나 강성모델링에 있어서는 편의상 회전관절들을 독립관절로 정하고 종속관절(즉, 1-3)들은 근육관절들과 액추에이터가 부착되지 않은 관절(passive joint)들로 구분된다

독립관절에 대한 근육관절의 일차 그리고 이차 기구학적 영향계수 $[G_{aa}^d]$ 와 $[H_{aa}^d]$ 는 각각 인체를 구성하는 모든 구속방정식에서 정의되는 독립관절에 대한 종속관절의 관계를 나타내는 일차 기구학적 영향계수 $[G_{ab}^d]$ 의 일부 행과 이차 기구학적 영향계수 $[H_{ab}^d]$ 의 일부 평면으로 정의된다. 여기서, d는 종속관절 중에서 근육에 해당하는 미끄럼관절을 나타낸다.

더 세분하여 표현하자면 $[G_{aa}^d]$ 과 $[H_{aa}^d]$ 는 mono-articular 근육관절들의 독립관절들에 대한 일차 그리고 이차기구학적 영향계수를 나타내는 $[{}^m G_{aa}^d]$ 와 $[{}^m H_{aa}^d]$, 그리고 bi-articular 근육관절들의 독립관절들에 대한 일차 그리고 이차기구학적 영향계수를 나타내는 $[{}^b G_{aa}^d]$ 와

$[{}^b H_{aa}^d]$ 로 구성된다.

인체는 각 관절을 가로지르는 근육이 여러 개가 존재하며 이러한 근육 힘들을 회전관절에서의 효과적인 힘(τ_a^*)으로 표현하면

$$\tau_a^* = [{}^m G_a^d]^T F_a^m + [{}^b G_a^d]^T F_a^b = [G_a^d] F_a \quad (11)$$

여기서,

$$[G_a^d] = [[{}^m G_a^d]^T; [{}^b G_a^d]^T], F_a = \begin{pmatrix} F_a^m \\ F_a^b \end{pmatrix} \quad (12)$$

(12)에서 F_a^m 와 F_a^b 는 각각 회전관절들을 가로지르는 mono-articular 근육과 bi-articular 근육에서의 힘벡터를 각각 나타낸다.

인체에서는 일반적으로 전체 근육 액추에이터의 개수가 근육들이 가로지르는 회전관절들의 개수보다 많으므로 (11)에 대한 일반 해는 다음과 같이 표현되며

$$F_a = [G_a^d]^+ \tau_a^* + (I - [G_a^d]^+ [G_a^d]) \epsilon \quad (13)$$

여기서, $[G_a^d]^+$ 는 의사역행렬을 나타낸다. 첫 번째 항은 최소놈 해를 나타내며, 두 번째 항은 시스템의 운동과 독립적인 내력을 생성하는 해를 의미한다. 두 번째 항은 다음과 같이 시스템의 근육들 간의 힘 평형 관계식으로 표현될 수 있다.

$$\tau_a^* = [{}^m G_a^d]^T (F_a^m) + [{}^b G_a^d]^T (F_a^b) = 0 \quad (14)$$

이러한 힘평형 상태에 외란이 발생하면 시스템은 더 이상 평형을 유지하지 않을 것으로 예측된다. 이러한 동작을 스프링 효과로 모델링하면 외란에 대하여 다음과 같은 복원력으로 표현되며

$$\begin{aligned} \Delta(\tau_a^*) &= \Delta[[{}^m G_a^d]^T (F_a^m) + [{}^b G_a^d]^T (F_a^b)] \\ &= \{ -[{}^m G_a^d]^T [K_{aa}^m] [{}^m G_a^d] - (F_a^m)^T \circ [{}^m H_{aa}^d] \\ &\quad - [{}^b G_a^d]^T [K_{aa}^b] [{}^b G_a^d] + (F_a^b)^T \circ [{}^b H_{aa}^d] \} \Delta \phi_a \\ &= -[K_{aa}] \Delta \phi_a \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, 'o'는 일반화된 스칼라 내적(generalized scalar dot product)을 나타내며[부록 1 참조], $[K_{aa}^m]$ 과 $[K_{aa}^b]$ 는 각각 mono-articular 근육과 bi-articular 근육들의 강성행렬을 나타낸다. 이러한 행렬들은 대각요소만 지닌다. 스칼라 내적 곱으로 표현된 항들은 시스템 자코비안들의 변위에 의하여 생성되는 효과적인 강성요소들을 의미한다.

(15)로부터 다음과 같이 독립관절에 대하여 표현된 시스템의 강성행렬이 구해진다.

$$\begin{aligned} [K_{aa}] &= -\frac{\partial \tau_a^*}{\partial \phi_a} \\ &= [{}^m G_a^d]^T [K_{aa}^m] [{}^m G_a^d] - [{}^b G_a^d]^T [K_{aa}^b] [{}^b G_a^d] \\ &\quad + (-F_a^m)^T \circ [H_{aa}^d] \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, 첫 번째와 두 번째 항은 근육의 기계적 특성을

나타내는 강성효과이며 세 번째 항은 (14)의 관계식을 만족하는 근육힘으로서 근육들 간에 힘의 평형을 이루며 싸우는 현상으로부터 형성되는 새로운 형태의 강성효과를 나타낸다. 일반적으로 인체의 팔에 힘을 주면 강성이 증가하는 현상은 이러한 영향도 많이 기여하리라 판단된다. 기존의 인체 시스템 모델링에서는 이러한 항들이 고려되지 않았다[8][9].

한편 인체의 경우에 있어서 관절공간, 즉 팔의 형상을 제어하는 경우도 있었지만 손으로 도구를 가지고 작업하는 경우가 일반적이라고 판단된다. 이러한 작업에서는 물체 또는 환경과의 친밀한 접촉을 보장하기 위하여 강성제어 또는 임피던스 제어방식들이 많이 활용되고 있다. 본 연구에서는 작업지점에서 요구되는 강성 행렬에 대하여 인체구조는 어느 정도의 강성제어 특성을 지니고 있는가에 대한 해석을 인체의 근육구조에 대한 다양한 모델들을 대상으로 수행하고자 한다.

시스템의 최소관절 벡터와 작업공간 벡터 간의 맵핑을 나타내는 자코비안을 $[G_a^d]$ 라고 한다면 주어진 작업공간에서의 강성행렬에 대한 최소관절 좌표계에서의 강성행렬은 다음과 같이 나타내어진다[21].

$$[K_{aa}] = [G_a^d]^T [K_{mm}] [G_a^d] \quad (17)$$

(17)을 (16)에 대입하여 간략한 벡터형으로 표현하면

$$K_a = [H](-F_a) \quad (18)$$

여기서 K_a 은 (16)의 오른쪽 항의 마지막 요소를 제외한 모든 행렬들의 합을 나타내는 강성행렬의 독립적인 행렬요소들(upper-diagonal elements, 즉 대각성분과 대각성분 위에 존재하는 성분들)을 순서적으로 추출하여 구성된 벡터를 의미하고, $[H]$ 는 삼차원 행렬 $[H_{aa}^d]$ 의 벡터요소들로 구성되는 행렬을 나타낸다[부록 2 참조]. 힘의 평형을 나타내는 (14)와 강성관계식을 나타내는 (18)을 하나의 행렬식으로 표현하면

$$[C] F_a = a \quad (19)$$

여기서,

$$[C] = \begin{bmatrix} -[H] \\ [G_a^d]^T \end{bmatrix}, a = \begin{pmatrix} K_a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

주어진 시스템을 평형을 유지하고 또한 요구되는 강성을 생성하기 위하여 필요한 액추에이터의 개수(즉, $[C]$ 의 행의 차원) 이상의 액추에이터가 존재하는 경우에 (18)의 일반 해는

$$F_a = [C]^+ a + ([I] - [C]^+ [C]) \epsilon \quad (21)$$

(21)의 첫 번째 항은 시스템이 평형을 유지하면서 주어진 강성효과를 생성하기 위한 근육힘을 나타내며, 두 번째 항은 시스템이 평형을 유지하고 강성효과를 생성하는데 소모한 자유도 이상의 근육이 존재하는 경우에 추가적으로 존재하는 내력공간을 의미한다. 이 내력공간은 시스템의 운동과 강성생성과 독립적으로 다른 알고리즘

을 적용할 수 있는 가능성을 제공해 준다.

2) 인체 팔 모델들에 대한 강성 생성현상에 대한 해석

다섯 가지 인체 팔 모델을 통하여 강성 생성현상에 대한 해석을 수행하고자 한다. 기존의 연구결과에서는 폐쇄체인을 지니는 일반적인 로봇 시스템에서의 여유구동 액츄에이터들의 상반구동으로 인한 효과적인 강성생성을 위한 필요조건이 언급되었다[부록 3 참조] 이러한 결과를 인체시스템에 적용하여 인체시스템의 강성생성 능력에 대한 해석을 수행하고자 한다. 첫 번째 조건으로는 시스템의 존재하는 근육의 수가 시스템의 모빌리티와 제어하고자 하는 강성행렬(관절공간 상에서 정의되는)에서의 독립적인 강성요소의 개수의 합보다 많아야 된다. 이것은 (19)의 행렬 $[C]$ 의 행의 차원이 F_i 의 차원과 일치하는 $[C]$ 의 열의 차원보다 많아야 함을 의미한다. 두 번째로는 여유구동으로 인하여 생성되는 효과적인 강성은 시스템의 비선형성에 연관되므로 시스템의 구조가 비선형의 성질을 충분히 가져야 한다. 이러한 비선형성은 일정한 크기를 지니는 시스템 자코비안으로는 생성 불가능하며 자코비안의 변화율인 헤시안(Hessian)에 의존한다. 이를 위해 비선형 holonomic 구속방정식의 개수가 제어하고자 하는 강성요소의 개수보다 많아야 된다. 일반적으로 독립적인 강성요소의 개수는 M 자유도 시스템 (또는 모빌리티 M)의 경우에 $M(M+1)/2$ 로 주어진다 [21]. 이러한 조건들은 단일한 폐쇄체인 시스템에 대한 해석결과이므로 인체와 같이 여러 개의 모듈들의 조합으로 구성된 시스템에서는 다른 조건들이 추가되어야 할 것이다

그림 3은 하나의 회전관절에 두 개의 근육이 양측에 부착된 1 자유도 인체 팔 시스템을 나타낸다. 이 시스템에서는 두 개의 근육으로 1 자유도 운동과 1 자유도의 강성이 제어가능하며 또한, 각 근육을 포함하는 폐쇄체인이 두 개의 비선형 holonomic 구속방정식, 즉 모두 네 개의 비선형 구속방정식이 제어하는 하나의 강성요소보다 많으므로 강성생성이 가능한 경우임을 살펴볼 수 있다.

그림 4는 두 개의 회전관절에 여섯 개의 근육이 부착된 2 자유도 인체 팔 시스템을 나타낸다. 이 시스템에서

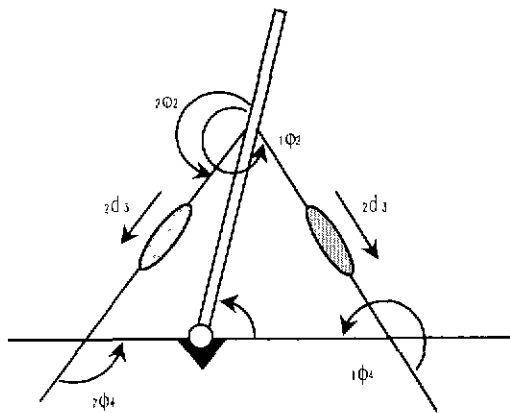


그림 3. 1 자유도 모델.
Fig. 3 1 DOF model.

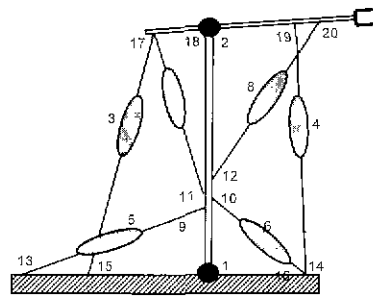


그림 4. 2 자유도 모델.
Fig. 4. 2 DOF model.

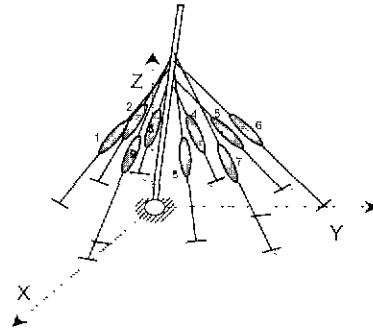


그림 5. 3 자유도 모델.
Fig. 5. 3 DOF model.

는 여섯 개의 근육으로 2 자유도 운동과 세 개의 강성요소가 제어가능하며 비선형 holonomic 구속방정식의 개수(12개)가 세 개의 강성요소보다 충분히 많으므로 역시 강성생성이 가능한 모델로 판단된다.

그림 5는 하나의 구형관절에 아홉 개의 근육이 부착된 3 자유도 어깨시스템을 나타낸다. 여기서, 각각의 근육은 6 자유도 체인으로 모델한다. 이 시스템에서는 아홉 개의 근육으로 3 자유도 회전 운동과 이에 따른 여섯 개의 강성요소가 제어가능하다. 또한 이 시스템은 공간형이므로 하나의 폐쇄체인 루프에 세 개의 독립적인 비선형 holonomic 구속방정식이 존재한다. 따라서 여덟 개의 독립적인 루프가 존재하므로 모두 24개로 여섯 개의 강성요소보다 충분히 많으므로 역시 강성생성이 가능한 모델로 판단된다.

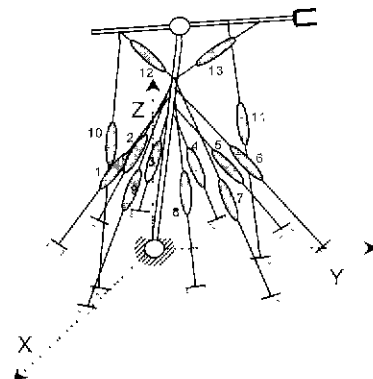


그림 6. 4 자유도 모델.
Fig. 6. 4 DOF model.

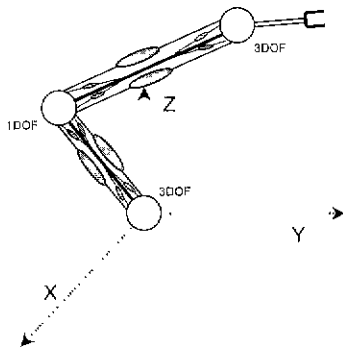


그림 7 7 자유도 모델.
Fig. 7. 7 DOF model

인체의 어깨에는 아홉 개 그리고 팔목관절에는 일곱 개의 근육이 부착된 것으로 알려져 있다. 그림 6은 하나의 어깨관절과 하나의 회전관절로 구성되며 열 여섯 개의 근육이 부착된 4 자유도 인체 팔 시스템을 나타낸다. 이 시스템에서는 열 여섯 개의 근육으로 4 자유도 운동과 열 개의 강성요소가 제어가능하며 비선형 holonomic 구속방정식의 개수가 열 개의 강성요소보다 충분히 많으므로 역시 강성생성이 가능한 모델로 판단된다.

이상에서 살펴본 시스템들 중에서 그림 3 - 그림 5는 모두 하나의 모듈로 구성된 시스템이라고 간주된다. 그림 7은 7 자유도 인체 팔 모델을 나타낸다. 인체 손목에는 열 세 개의 근육이 존재하므로 이 시스템은 모두 29 개의 근육으로 7 자유도의 운동과 28 개의 강성요소들을 제어하기에 부족한 구조임을 알 수 있다. 따라서, 일반적으로 인체 팔은 작업공간에서 주어진 강성을 충분히 제어하는 기능을 가지지 못한다고 판단된다. 이 밖에도 이 시스템은 두 개의 모듈로 구성되므로 어깨 관절과 손목 관절이 직접적인 관계를 지니지 못하며, 결과적으로 어깨 관절과 손목관절 간의 연관되는 강성요소들이 항상 0 이 된다. 이러한 사실은 주어진 작업공간에서의 강성행렬을 만족시키기 위한 관절공간에서의 강성요소들을 완벽하게 제어할 수 없다는 결론을 내리게 되므로 다른 조건들을 고려하지 않고도 강성제어가 불가능함을 판단할 수 있다. 이에 반해서 그림 4에서는 두 개의 일자유도 모델이 두 개의 biarticular 근육으로 연결된 구조를 지니며, 또한 그림 6은 한 개의 1 자유도 모델과 한 개의 3 자유도 어깨 모듈이 두 개의 biarticular 근육으로 연결된 구조를 지니므로 모듈간의 연관성이 존재하게 된다. 따라서, 인체와 같이 여러 개의 모듈들의 조합으로 구성된 시스템에서의 여유구동으로 인한 효과적인 강성생성을 위하여 추가되는 필요조건으로 모듈들을 연결해주는 biarticular 근육이 존재해야 할 것이다.

IV. 인체에서의 여유구동을 활용한 능동스프링 현상의 응용연구

본 장에서는 2 자유도 인체형 로봇을 대상으로 여유구동으로 생성되는 능동 스프링 효과를 활용하여 시스템의 운동주파수를 제어하는 응용방식에 대하여 기술하고 시뮬레이션을 통하여 그 현상을 확인하고자 한다.

1. 인체형 매니퓰레이터의 기구학/동역학 모델링

그림 8은 2 자유도 인체형 로봇을 나타낸다. 각각의 근육을 선형 액추에이터라고 가정하면 이 시스템은 기구학적으로 모빌리티가 2이며, 따라서 두 개의 액추에이터로 제어가능하나 첫 번째와 두 번째 관절 주변에 위치한 여섯 개의 근육형 액추에이터로 여유구동되는 경우를 나타낸다. 주어진 시스템에 대한 기구학은 두 단계로 구분된다. 첫 번째로는 두 개의 독립관절과 여섯 개의 근육형 액추에이터 관절들 간의 관계를 나타내는 내부기구학이며, 두 번째로는 두 개의 독립관절과 외부관절(즉, 작업지점의 위치) 간의 관계를 나타내는 외부기구학이다.

1) 내부기구학

그림 8에서의 독립관절은 편의상 링크와 링크를 연결하는 회전관절들로 정한다. 따라서, θ_1 와 θ_2 가 독립관절이 된다. 시스템을 구성하는 폐쇄체인부는 그림 9에서와 같이 두 개의 5절형 루프와 네 개의 4절형 루프로 이루어져 있음을 살펴볼 수 있다. 따라서, 각각의 루프에 대하여 정해진 독립관절들에 대한 나머지 종속관절의 위치 및 속도관계식이 구해진다. 특별히 그림 9의 두 번째 5절형 루프에 대한 내부기구학 관계식을 유도하고자 한다. 미끄럼 관절 d_2 의 끝부분을 자른다고 가정하면 5절형 기구를 구성하는 두 개의 개회로 체인은 그 지점에서 공통된 위치를 지녀야 할 것이다 이러한 위치 관계식은 아래와 같다.

$$x = l_1 \cos(\theta_1) + b_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) = a_1 + d_2 \cos(\theta_5) \quad (22)$$

$$y = l_1 \sin(\theta_1) - b_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) = d_2 \sin(\theta_5) \quad (23)$$

또한 윗 식들을 미분하여 얻는 속도 그리고 가속도 관계식도 같은 위치에서 동일하므로

$$[{}_1G_{\phi}^y]_1 \dot{\phi} = [{}_2G_{\phi}^y]_2 \dot{\phi} \quad (24)$$

그리고,

$$[{}_1G_{\phi}^y]_1 \ddot{\phi} + {}_1\dot{\phi}^T [{}_1H_{\phi\phi}^y]_1 \dot{\phi} = [{}_2G_{\phi}^y]_2 \ddot{\phi} + {}_2\dot{\phi}^T [{}_2H_{\phi\phi}^y]_2 \dot{\phi} \quad (25)$$

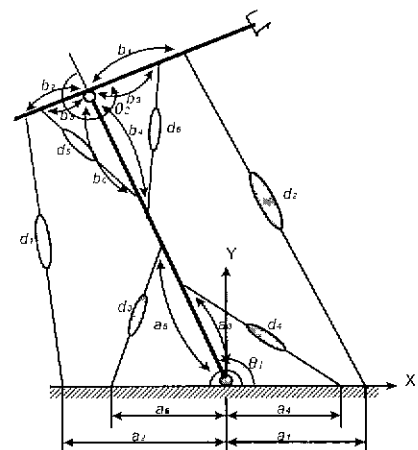


그림 8. 인체형 매니퓰레이터.
Fig. 8. Anthropomorphic manipulator

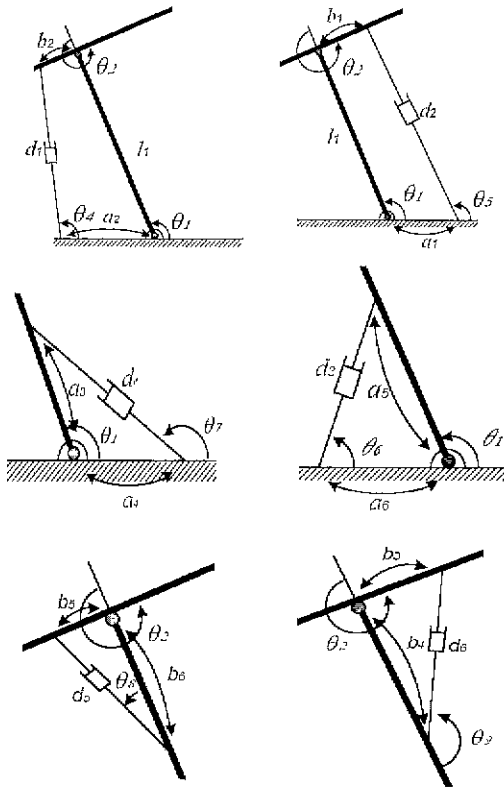


그림 9. 인체형 로봇의 여섯 개의 폐쇄 체인.
Fig. 9. Six closed-chains of anthropomorphic robot.

의 관계를 지니며, 여기서 $[{}_1G_a^a]$ 와 $[{}_2G_b^b]$ 는 각각 첫 번째 그리고 두 번째 개회로 체인의 일차 기구학적 영향 계수를 나타내고, $[{}_1H_{\phi_a}^a]$ 과 $[{}_2H_{\phi_b}^b]$ 는 각각 첫 번째 그리고 두 번째 체인의 이차 기구학적 영향계수를 나타낸다. θ_1 과 θ_2 을 5절 기구의 독립관절(ϕ_a)로 정하고 θ_3 과 d_2 를 5절 기구의 종속관절(ϕ_b)로 정하면, (24)는 다음과 같이 재구성되며

$$[A] \dot{\phi}_b = [B] \dot{\phi}_a \quad (26)$$

여기서,

$$[A] = [{}_2G_b^b] \quad (27)$$

$$[B] = [{}_1G_a^a] \quad (28)$$

$$\dot{\phi}_a = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\phi}_b = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{d}_2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

(26)의 양변에 $[A]$ 에 대한 역행렬을 곱하면 (30)이 구해지며

$$\dot{\phi}_b = [G_a^b] \dot{\phi}_a \quad (30)$$

여기서, 2×2 의 차원을 지니는 $[G_a^b]$ 는 ϕ_b 과 ϕ_a 를 연계하는 일차 기구학적 영향계수를 나타낸다. (30)으로부터 선형 액추에이터의 속도 \dot{d}_2 와 독립관절에서의 속도 벡터 간의 관계식이 다음과 같이 추출된다.

$$\dot{d}_2 = [G_a^b]_{(2,1)} \dot{\phi}_a \quad (31)$$

여기서, $[G_a^b]_{(2,1)}$ 는 $[G_a^b]$ 의 첫 번째 행을 나타낸다. 나머지 네 개의 루프에 대하여도 동일한 과정을 통하여 (31)과 같은 관계식을 구한다. 결과적으로 여섯 개의 루프에 대한 기구학식을 종합하면, 독립관절(ϕ_a)과 구동되는 액추에이터들의 위치를 나타내는 종속관절(d) 간의 일차기구학 관계식은 아래와 같이 구해지며,

$$d = [G_a^d] \phi_a \quad (32)$$

여기서, $[G_a^d]$ 는 독립관절들과 근육에 해당하는 종속관절들 간의 일차 기구학적 영향계수를 나타내며, d 는 다음과 같다.

$$d = (d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6)^T \quad (33)$$

독립관절들과 종속관절들 간의 힘평형 관계식은 (32)의 속도관계와 힘관계의 이중관계로부터

$$\tau_a = [G_a^d]^T F_d \quad (34)$$

와 같이 정의되며, 여기서 F_d 와 τ_a 는 각각 선형 액추에이터들의 힘 벡터와 독립관절에서의 효과적인 토크를 나타내며 각각 다음과 같이 주어진다.

$$F_d = (F_{d1} \ F_{d2} \ F_{d3} \ F_{d4} \ F_{d5} \ F_{d6})^T \quad (35)$$

$$\tau_a = (\tau_1 \ \tau_2)^T \quad (36)$$

또한 g_i^d 가 $\frac{\partial d_i}{\partial \theta_i}$ 를 의미한다면,

$$[G_a^d]^T = \begin{bmatrix} g_1^{d6} & g_1^{d4} & 0 & 0 & g_1^{d1} & g_1^{d2} \\ 0 & 0 & g_2^{d6} & g_2^{d4} & g_2^{d1} & g_2^{d2} \end{bmatrix}^T \quad (37)$$

마찬가지 방식으로 이차기구학적 영향계수 $[H_{aa}^d]^T$ 를 구성하는 평면 행렬들은, $[H_{aa}^d]_{(i,1)}$ 가 $[H_{aa}^d]$ 의 i 번째 평면을 나타낸다고 가정할 때에, 다음과 같이 각각 구해진다[22].

$$\begin{aligned} [H_{aa}^d]_{1,1}^T &= \begin{bmatrix} h_{11}^{d3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & [H_{aa}^d]_{2,1}^T &= \begin{bmatrix} h_{11}^{d4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [H_{aa}^d]_{3,1}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{22}^{d5} \end{bmatrix}, & [H_{aa}^d]_{4,1}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{22}^{d6} \end{bmatrix} \\ [H_{aa}^d]_{5,1}^T &= \begin{bmatrix} h_{11}^{d1} & h_{12}^{d1} \\ h_{12}^{d1} & h_{22}^{d1} \end{bmatrix}, & [H_{aa}^d]_{6,1}^T &= \begin{bmatrix} h_{11}^{d2} & h_{12}^{d2} \\ h_{12}^{d2} & h_{22}^{d2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

여기서,

$$h_{ii}^d = \frac{\partial^2 d_i}{\partial \theta_i^2} \quad (39)$$

2) 외부기구학

말단장치 위치와 시스템의 독립관절과의 관계를 나타내주는 외부기구학에 대하여 살펴본다. 본 시스템에서는 링크와 관절을 연결하는 회전관절들을 독립관절로 정했기 때문에 말단장치와 독립 관절과의 관계는 직렬형

로봇의 경우와 마찬가지로 다음과 같이 쉽게 정의된다.

$$u = [G_a^u] \phi_a \quad (40)$$

3) 동역학 모델링

본 절에서는 여러 개의 체인으로 구성된 페루프 메커니즘의 동역학 모델링을 소개하고자 한다. 그림 9에서와 같이 페루프 메커니즘은 여러 개의 직렬형 매니퓰레이터 체인이 특정한 형태의 구속조건 하에 얽여져 있는 시스템을 알 수 있다. 따라서, 각각의 직렬형 매니퓰레이터의 동역학 모델을 구한 후 이들을 구속하는 페루프 메커니즘의 기구학적 구속조건들(kinematic constraints)을 가상 일의 법칙에 근거한 관계식에 적용하여 페루프 메커니즘의 동역학 모델을 구하는 방법론을 선택한다. 각 직렬형 매니퓰레이터의 동역학 모델은 다음과 같이 주어진다[1].

$${}_{i-1}\tau_i^i = [I_{\phi\phi}^i] \ddot{\phi} + {}_{i-1}\phi^T [P_{\phi\phi}^i] \dot{\phi}, i=1,2. \quad (41)$$

여기서, 각 관절에 기준을 둔 관성행렬(effective inertia matrix)은

$$[I_{\phi\phi}^i] = \sum_{j=1}^{N_i} (m_{jk} [{}^iG_{\phi}^c]^T [{}^iG_{\phi}^c] + [{}^iG_{\phi}^j]^T [J^{jk}] [{}^iG_{\phi}^j]) \quad (42)$$

으로 정의되고, $[J^{jk}]$ 로서 i 번째 직렬 매니퓰레이터의 j 와 k 번째 관절을 이어주는 링크 jk 의 질량 관성모멘트 행렬(mass moment of inertia matrix)이며, 기준좌표계(reference frame)는 기저계(base frame)이다. m_{jk} 는 i 번째 직렬 매니퓰레이터의 링크 jk 의 질량이고, N_{in} 은 링크의 개수이며, $[{}^iG_{\phi}^c]$ 는 i 번째 직렬 매니퓰레이터의 링크 jk 의 질량 중심의 선형 속도에 대한 일차 KIC이고, $[{}^iG_{\phi}^j]$ 는 i 번째 직렬 매니퓰레이터의 링크 jk 의 회전 속도에 대한 일차 KIC 행렬이다. (41)에서 정의된 Inertial power array $[{}_{i-1}P_{\phi\phi}^i]$ 는 다음과 같이 주어진다[1].

$$[{}_{i-1}P_{\phi\phi}^i] = \sum_{j=1}^{N_{in}} \{ m_{jk} ([{}^iG_{\phi}^c]^T \cdot [{}^iH_{\phi\phi}^c]) + ([{}^iG_{\phi}^j]^T [J^{jk}] \cdot [{}^iH_{\phi\phi}^j] + [{}^iG_{\phi}^j]^T ([{}^iG_{\phi}^j]^T \cdot [{}^i\Sigma^{jk}]) [{}^iG_{\phi}^j]) \} \quad (43)$$

여기서, $[{}^iH_{\phi\phi}^c]$ 는 i 번째 직렬 매니퓰레이터의 링크 jk 의 질량 중심의 선형 가속도에 대한 이차 KIC 행렬이고, $[{}^iH_{\phi\phi}^j]$ 는 i 번째 직렬 매니퓰레이터의 링크 jk 의 회전 가속도에 대한 이차 KIC 행렬이다. 삼차원 행렬 $[{}^i\Sigma^{jk}]$ 을 구성하는 평면 행렬들은 각각 아래와 같이 정의된다.

$$[{}^i\Sigma^{jk}]_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{yz} \\ I_{xy} \end{bmatrix}, \quad [{}^i\Sigma^{jk}]_{1,2} = \begin{bmatrix} I_{yz} \\ 0 \\ -I_{xz} \end{bmatrix}, \quad [{}^i\Sigma^{jk}]_{1,3} = \begin{bmatrix} -I_{xy} \\ I_{yz} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

다음으로는 페루프 메커니즘의 기구학적 구속 조건을 사용하여 각각의 직렬 매니퓰레이터 체인의 동역학 모델을 하나의 페루프 메커니즘에 대한 동역학 모델을 구하는 과정을 설명하고자 한다.

Lagrangian 좌표계로 표시된 각 관절에서의 힘 또는 토크벡터 τ_i 와 독립관절의 토크벡터 τ_a 간의 관계식을 구하기 위하여 다음과 같이 가상 일의 법칙을 적용한다.

$$\tau_{\phi}^T \delta\phi = \tau_a^T \delta\phi_a \quad (45)$$

시스템에서 정의된 전체좌표계를 나타내는 Lagrangian 좌표계 (ϕ) 관절들과 독립관절 (ϕ_a) , 즉 최소좌표계(minimum coordinate) 관절 간의 관계식들 $([G_a^{\phi}], [H_{aa}^{\phi}])$ 을 이용하여 다음과 같이 유효능동관절에 관한 동역학식을 구한다[21].

$$\begin{aligned} \tau_a^* &= [G_a^{\phi}]^T \tau_{\phi} \\ &= \sum_{i=1}^n [G_a^{\phi}]^T ([I_{\phi\phi}^i] \ddot{\phi} + {}_{i-1}\phi^T [P_{\phi\phi}^i] \dot{\phi}) \\ &= [I_{aa}^*] \ddot{\phi}_a + \phi_a^T [P_{aaa}^*] \dot{\phi}_a \end{aligned} \quad (46)$$

여기서

$$[I_{aa}^*] = \sum_{i=1}^n [G_a^{\phi}]^T [I_{\phi\phi}^i] [G_a^{\phi}] \quad (47)$$

$$[P_{aaa}^*] = \sum_{i=1}^n ([G_a^{\phi}]^T [I_{\phi\phi}^i] \cdot [{}^iH_{aa}^{\phi}] + [G_a^{\phi}]^T ([G_a^{\phi}]^T \cdot [{}^iP_{\phi\phi}^i]) [G_a^{\phi}]) \quad (48)$$

이고, $[G_a^{\phi}]$ 는 i 번째 직렬 체인의 관절들과 로봇의 독립관절과의 관계를 나타내는 일차 KIC 행렬이고, $[{}^iH_{aa}^{\phi}]$ 는 이차 KIC 행렬을 각각 나타내며 각각 다음의 과정을 통해서 구해진다.

페루프 체인의 Open-tree structure에서의 i 번째 직렬형 매니퓰레이터 체인의 관절들 (ϕ) 은 종속 관절과 독립관절로 이루어져 있으며 종속 관절은 (30)에 의하여 독립관절로 표현되므로 다음과 같이 독립관절에 대하여 표현될 수 있다.

$$\dot{\phi} = [G_a^{\phi}] \dot{\phi}_a \quad (49)$$

여기서, $[G_a^{\phi}]$ 는 (30)의 $[G_{\phi}^a]$ 의 요소들로 구성된다.

이차 KIC $[H_{aa}^*]$ 도 (49)를 유도한 방식으로 쉽게 구할 수 있다. i 번째 직렬 체인의 관절의 가속도 $\ddot{\phi}$ 는 다음과 같이 전체 시스템의 독립 관절의 향으로 표현될 수 있다[28].

$$\ddot{\phi} = [G_a^{\phi}] \ddot{\phi}_a + \phi_a^T [H_{aa}^{\phi}] \dot{\phi}_a \quad (50)$$

여기서, $[H_{aa}^{\phi}]$ 는 $[H_{aa}^*]$ 의 요소들로 구성된다.

독립관절에 대한 동역학 모델을 활용하여 작업공간 좌표계 u 에 대한 동역학 모델이 좌표변환에 의하여 다음과 같이 구해진다[1].

$$\tau_u = [I_{uu}^*] \ddot{u} + \dot{u}^T [P_{uuu}^*] \dot{u} \quad (51)$$

여기서

$$[I_{uu}^*] = [G_u^a]^T [I_{uu}] [G_u^a] \quad (52)$$

$$[P_{uu}^*] = [G_u^a]^T ([G_u^a]^T o [P_{uu}]) [G_u^a] + ([G_u^a]^T [I_{uu}]) o [H_{uu}^a] \quad (53)$$

2. 강성 및 주파수 모델링

1) 강성 모델링

본 절에서는 2자유도를 지니며 단순한 미끄럼관절들로 모델된 인체형 로봇에 대한 강성 모델링 관계식을 유도하도록 한다. 시스템이 정적평형을 이루고 있는 상태에서 (34)는 다음과 같이 표현된다.

$$\tau_a = [G_a^d]^T F_d = 0 \quad (54)$$

이러한 상태에서 시스템에 외란이 발생하면 마치 실제의 스프링처럼 평형상태를 기준으로 하여 진동하는 현상이 발생하며, 이 경우에 강성 모델은 다음과 같다.

$$[K_{aa}] = (-F_d)^T o [H_{aa}^d]^T \quad (55)$$

작업공간좌표계와 최소좌표계 간의 강성행렬 관계식은 아래와 같이 주어지며

$$[K_{uu}] = [G_u^a]^T [K_{aa}] [G_u^a] \quad (56)$$

(55)를 (56)에 대입하여 정리하면,

$$[K_{uu}] = (-F_d)^T o [H_{uu}^d] \quad (57)$$

여기서

$$[H_{uu}^d] = [G_u^a]^T [H_{aa}^d] [G_u^a] \quad (58)$$

이며, $[G_u^a]$ 는 $[G_a^d]$ 의 역행렬을 나타낸다.

(18)에서와 같이 (57)을 벡터 형태로 바꾸어 나타내면

$$K_u = -[H_u^d] F_d \quad (59)$$

여기서 K_u 와 $[H_u^d]$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$K_u = ([K_{uu}]_{(1,1)} [K_{uu}]_{(1,2)} [K_{uu}]_{(2,2)})^T \quad (60)$$

$$[H_u^d] = \begin{bmatrix} ([G_u^a]^T [H_{aa}^d] [G_u^a])_{(1,1)} \\ ([G_u^a]^T [H_{aa}^d] [G_u^a])_{(1,2)} \\ ([G_u^a]^T [H_{aa}^d] [G_u^a])_{(2,2)} \end{bmatrix} \quad (61)$$

2) 주파수 모델링

정적 평형상태(즉, $\dot{u} = u = 0$)에서 시스템에 미소의 변위가 발생하였을 때의 시스템 운동방정식은 (51)로부터 다음과 같이 주어진다(부록 5)

$$[I_{uu}^*] \delta \ddot{u} = A([G_u^a]^T F_d) = (F_d^T o [H_{uu}^d]^T) \delta u \quad (62)$$

위의 식은 다시 아래의 식으로 표현되며,

$$[I_{uu}^*] \delta \ddot{u} + [K_{uu}] \delta u = 0 \quad (63)$$

여기서, $[K_{uu}]$ 는 (56)에 주어진 강성행렬이다. (63)의 양변에 $[I_{uu}^*]^{-1}$ 을 곱하여 정리하면,

$$\delta \ddot{u} + [I_{uu}^*]^{-1} [K_{uu}] \delta u = 0 \quad (64)$$

여기서, 주파수행렬 $[w_{uu}]$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$[w_{uu}] [w_{uu}]^T = [I_{uu}^*]^{-1} [K_{uu}] = (-F_d)^T o ([I_{aa}^*] [H_{aa}^d]). \quad (65)$$

주파수 행렬을 대각행렬이라고 가정하고(부록 4), (65)를 벡터 형태로 표현하면

$$\omega_u = -[W_u^d] F_d. \quad (66)$$

여기서 ω_u 와 $[W_u^d]$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\omega_u = (w_{xx}^2, w_{yy}^2, w_{xy}^2)^T \quad (67)$$

$$[W_u^d] = \begin{bmatrix} ([I_{uu}^*]^{-1} ([G_u^a]^T [H_{aa}^d] [G_u^a]))_{1,1} \\ ([I_{uu}^*]^{-1} ([G_u^a]^T [H_{aa}^d] [G_u^a]))_{1,2} \\ ([I_{uu}^*]^{-1} ([G_u^a]^T [H_{aa}^d] [G_u^a]))_{2,2} \end{bmatrix} \quad (68)$$

3) 힘분배 알고리즘

주어진 메커니즘의 평형 위치에서 $[w_{uu}]$ 의 주파수행렬을 합성하기 위해서는 (54)와 (66)를 다음의 행렬식으로 조합하여 힘분배를 수행한다.

$$\begin{bmatrix} [G_a^d]^T \\ -[W_u^d] \end{bmatrix} F_d = \begin{pmatrix} 0 \\ w_u \end{pmatrix} \quad (69)$$

(69)의 일반 해는 아래와 같다.

$$F_d = [G_{com}]^+ a + ([J] - [G_{com}]^+ [G_{com}]) \epsilon \quad (70)$$

여기서, $[G_{com}]^+$ 는 $[G_{com}]$ 의 의사역행렬 해를 나타내며, $[G_{com}]$ 과 a 는 다음과 같이 주어진다

$$[G_{com}] = \begin{bmatrix} [G_a^d]^T \\ -[W_u^d] \end{bmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ w_u \end{pmatrix} \quad (71)$$

또한, (70)의 두 번째 항은 주파수를 합성하고 남은 여유 액추에이터를 이용하여 내력을 다른 목적으로 사용하거나 힘을 재분배하는 목적으로 쓰이는 해를 의미한다. 예를 들어서 하나의 액추에이터의 용량이 초과되는 시에는 그 액추에이터의 힘을 고정시키고 나머지 액추에이터들로 힘분배를 할 수 있으며, 임의의 액추에이터에 고장이 발생하는 경우에는 그 액추에이터를 풀어놓은 상태에서 힘분배를 하는 등의 알고리즘들을 ϵ 을 활용하여 구현할 수 있다[21][28]. 시뮬레이션에서는 (70)의 첫 번째 항만 사용한다

3. 인체형 매니퓰레이터에 대한 시뮬레이션 결과 및 고찰

본 절에서는 여유구동을 지닌 인체형 로봇을 통하여 상반여유 구동시 개회로 방식으로 운동 주파수를 조절하는 방식에 대한 시뮬레이션을 수행한다. III장 2.2절에서 주어진 인체형 시스템은 여섯 개의 독립적인 폐쇄체인을 가지고 있으며 여섯 개의 액추에이터를 지니므로 작업공간에서의 강성 요소에 필요한 조건들을 갖추고 있음을 확인하였다. (68)로부터 관성행렬 $[I_{uu}^*]$ 가 단위행렬인

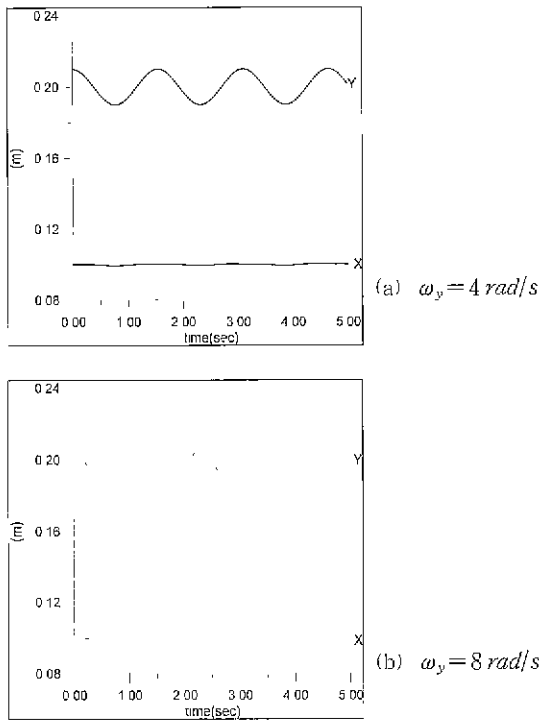


그림 10 주파수 변조 $(x, y)=(0.2, 0.1) m, \Delta y=0.01 m$.
Fig. 10. Frequency modulation.

경우에는 스프링 효과를 생성하는 조건과 운동주파수를 생성하는 기구학적 조건을 동일하다. 이에 따라, 주어진 시스템은 작업공간에서 2 자유도를 제어한다고 가정하였으므로 w_{ax}, w_{ay} , 그리고 w_{θ} 세 개의 주파수 요소를 독립적으로 제어하게 된다. 따라서 두 방향의 운동을 위한 두 개의 액추에이터와 세 개의 주파수 요소를 제어하기 위한 세 개의 액추에이터가 필요하므로 전체적으로 최소한 다섯 개의 액추에이터가 요구된다. 주어진 시스템은 폐쇄체인에서 여섯 개의 액추에이터가 존재하므로 이를 만족한다.

기구학 그리고 동력학 파라미터는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 0.2 m, \quad l_2 = 0.1 m, \quad l_3 = 0.05 m, \\
 a_i &= 0.1 m, \quad b_i = 0.05 m. \quad (i=1-6), \\
 m_1 &= 0.5 kg, \quad m_2 = 0.3 kg, \quad I_{a1} = 0.0017 kg \cdot m^2, \\
 I_{a2} &= 0.00056 kg \cdot m^2.
 \end{aligned} \tag{70}$$

여기서, 각 muscle의 기시(origin)와 저지(insertion)의 위치 및 질량은 실제 인체로부터 구한 데이터가 아닌 임의로 정한 값들이며, 관성질량은 링크의 slender bar 모델에 근거하여 계산하였다. 예제 시뮬레이션에서는 $(x, y) = (0.2, 0.1)m$ 인 지점에서 각각 x 와 y 방향으로만 $4 rad/s$ 의 주파수를 가지도록 내력을 제어한다. 시스템 액추에이터가 원하는 주파수 효과를 내도록 각 액추에이터를 구동하여 정적평형을 이룬 상태에서 y 방향으로 $1 cm$ 당겨서 놓을 경우의 진동효과를 살펴보고자 한다. 그림 10(a)로부터 인체형 시스템은 주어진 주파수를 가

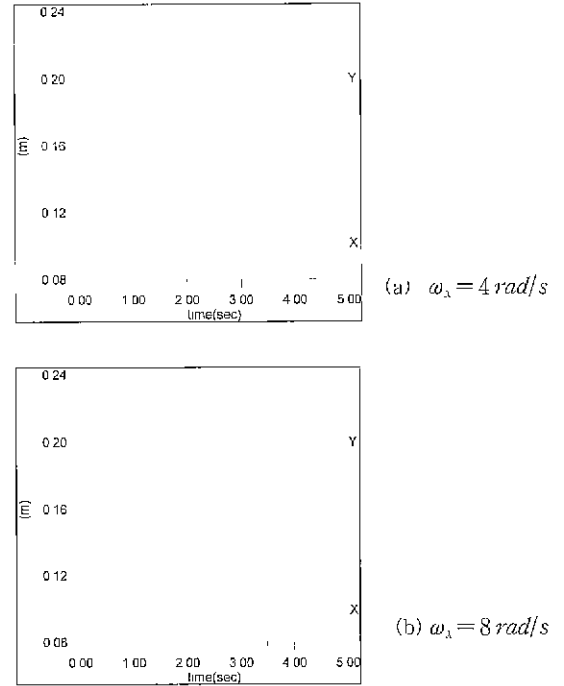


그림 11 주파수 변조 $(x, y)=(0.2, 0.1) m, \Delta y=0.01 m$.
Fig. 11. Frequency modulation.

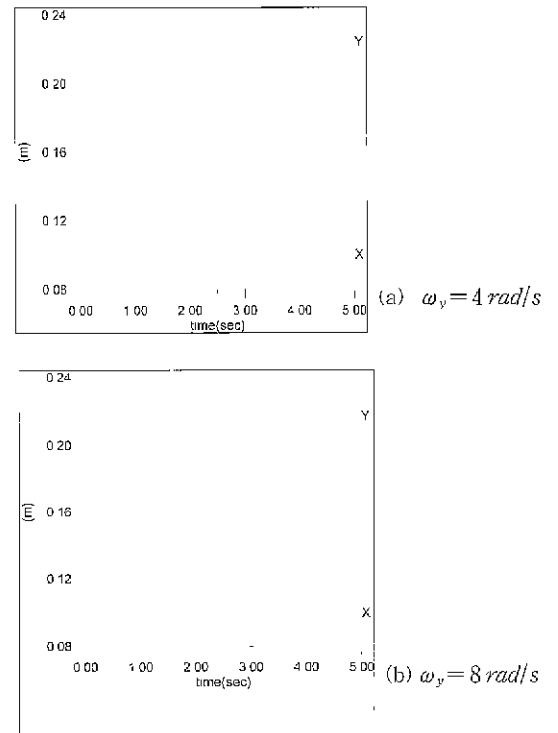


그림 12. 주파수 변조 $(x, y)=(0.22, 0.1) m, \Delta y=0.01 m$.
Fig. 12. Frequency modulation.

지고 y 방향으로 $4 rad/s$ 의 주파수를 가지고 진동하고 있음을 확인할 수 있다. 그림 10(b)는 y 방향으로 $8 rad/s$ 의 주파수를 가지도록 내력을 제어한 경우의 시뮬레이션 결과이다. 그림 11은 x 방향으로의 주파수 효과를 나타내고, 그림 12는 $(x, y) = (0.22, 0.1)m$ 인 지점에서 각

각 y방향으로 4rad/s의 주파수와 8rad/s의 주파수를 가지며 $w_{x,y}$ 와 $w_{x,y}$ 는 0이 되도록 내력을 제어하는 경우의 시뮬레이션 결과이다. 이상의 시뮬레이션에서 살펴본 바와 같이 그림 8의 인체형 시스템은 두 관절에서 형성된 폐쇄체인에서의 여유구동으로 인한 내력을 활용하여 임의의 작업지점에서 주파수 제어의 역할을 원활하게 할 수 있음을 살펴볼 수 있었다

시스템의 여유구동에 기인한 내력이 생성하는 이러한 주파수 변조 기술의 응용분야로써 진동공진과 진동차단 등의 용도를 들 수 있다. 시스템의 고유진동수는 일정한 크기의 강성을 가지는 스프링 메커니즘에서는 조절할 수 없다. 따라서 진동공진과 진동차단 등을 위하여 일정한 크기의 고유진동수를 생성하기 위해서는 가변가능한 스프링이 필요하다[25][26]. 또한 운동주파수를 변조함으로써 인한 진동효과로 자동조립 작업에서의 Peg-in-hole작업을 원활하게 하는 용도로 사용될 수 있을 것이라 기대 된다

4. 안정성 해석

본 연구에서는 스프링의 특성에 대하여 다루고 있으므로 첫 번째 안정성의 조건으로 항상 강성행렬이 양(positive definite)의 성질을 지녀야 하며, 두 번째로 본 논문에서 다루는 강성효과는 국부적(local property)으로 얻어지는 현상이므로 작업지점에서의 민감도(sensitivity)를 고려해야 한다. 민감도가 작은 경우에 더욱 안정하다고 간주할 수 있을 것이다. 첫 번째 조건은 강성(또는 주파수) 행렬을 모듈레이션할 때에 양의 성질을 가지도록 정의하지만, 두 번째 조건은 작업지점에서의 민감도를 계산해야 하므로 다음과 같이 관계식에 대한 민감도 지수를 정의한다. 다음 (69)에서 주어진 맵핑 행렬을 A라고 할 때에 SVD(Singular Value Decomposition)에 의하여

$$A = U \Sigma V^T \tag{71}$$

로 정의되고, 여기서 U와 V는 각각 입력과 출력에 해당하는 직각행렬들이며, 대각행렬 Σ 는 대각요소들이 A의 특이값들로 구성된다. 대각행렬의 i번째 특이값은 다음과 같이 표현되며

$$\sigma_i = U_i^T A V_i \tag{72}$$

A의 민감도는 이러한 특이값들의 시스템 변위에 대한 변화율로 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \phi_k} = \left(\frac{\partial U_i^T}{\partial \phi_k} \right) A V_i + U_i^T \left(\frac{\partial A}{\partial \phi_k} \right) V_i + U_i^T A \left(\frac{\partial V_i}{\partial \phi_k} \right) \tag{73}$$

(71)을 (73)에 대입하면

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \phi_k} = \left(\frac{\partial U_i^T}{\partial \phi_k} \right) U_i \sigma_i + U_i^T \left(\frac{\partial [G_k^i]}{\partial \phi_k} \right) V_i + \sigma_i V_i^T \left(\frac{\partial V_i}{\partial \phi_k} \right) \tag{74}$$

여기서, U_i 와 V_i^T 는 각각 $\left(\frac{\partial U_i^T}{\partial \phi_k} \right)$ 와 $\left(\frac{\partial V_i}{\partial \phi_k} \right)$ 에 직교이므로 첫 번째 항과 세 번째 항은 0이 되고, 두 번째 항만 존재한다. 결론적으로 모든 특이값에 대하여 이러한 민감도를 구한 후, 다음과 같이 하나의 민감도 지수

를 정의하게 된다.

$$\eta_{\Delta \sigma} = \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \phi_k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{75}$$

본 논문에서는 민감도 해석을 수행하지는 않았지만 주어진 기구의 작업공간에서 가장 작은 민감도를 지니는 구간을 해석하거나 또는 실질적으로 안정성을 고려한 최적의 기구를 설계하는 과정에서 이러한 민감도 지수가 사용될 수 있을 것이다.

V. 결론

본 연구에서는 인체에서 많은 근육을 활용하여 강성을 조절하는 기능에 대한 해석과 이러한 기능을 시뮬레이션을 통하여 구현하는 연구를 수행하였다. 가장 일반적인 인체 모델에 대한 힘분배 방식 및 강성효과에 대한 모델링 및 이러한 강성효과에 관련된 심도 있는 기구학적 해석을 수행하였으며, 인체에 관한 연구결과를 폭넓은 분야에 있어서 실질적인 핵심기술로서 활용될 수 있도록 내력을 활용한 주파수 변조방식에 대하여 기술하였다. 본 연구의 기대효과로는 인체의 구조 및 제어 방식을 해석적으로 연구함으로써 시험에만 의존하는 기존의 생체역학 분야에 새로운 방향을 제시할 수 있으리라 기대된다. 또한 인체의 근육구조를 본만 가변가능한 스프링 장치는 다양한 현가장치의 설계에 매우 유용할 것으로 기대되며[29], 가변가능한 강성제어는 조립작업과 같이 환경과 접촉이 발생하는 작업 등에서 절실히 요구되는 바 매우 중요한 연구분야인 것으로 판단된다

참고문헌

- [1] R. A. Freeman, and D. Tesar, "Dynamic modeling of serial and parallel mechanisms/ robotic systems. Part I-Methodology, Part II-Applications," *Proc of 20th ASME Mechanisms Conference*, Orlando, FL, 1988.
- [2] P. A. Spence. *Basic Human Anatomy*, The Benjamin/Cummings Pub. Co Inc., 1986.
- [3] M. R. Cutkosky, and I. Kao, "Computing and controlling the compliance of a robotic hand," *IEEE Trans. Journal of Robotics and Automation*, vol 5, no. 2, pp. 151-165, 1989.
- [4] M. R. Cutkosky, and P. K. Wright, "Active control of a compliant wrist in Manufacturing Tasks," *ASME Trans. on Journal of Eng. for Ind*, vol 108, no. 1, pp. 36-43, 1985.
- [5] A. Goswami, M. Pershikin, and J. E. Colgate, "Passive robotics and exploration of mechanical computation," *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. Cincinnati, OH, pp. 279-284, 1990.
- [6] M. Griffis, "Kinesthetic control : A novel theory for simultaneously regulating force and displacement," *Ph D Dissertation. University of Florida*. Gainesville, FL 1990.
- [7] D. B. Chaffin, and G. Andersson, *Occupational*

- biomechanics*, Wiley Interscience, 1984
- [8] N. Hogan, "Mechanical impedance control in assistive devices and manipulators," *Robot Motion: Planning and Control*, MIT Press, pp. 361-371, 1982.
- [9] N. Hogan, "Mechanical impedance of single- and multi-articular systems," *Multiple Muscle Systems, Biomechanics and Movement Organization*, Springer-Verlag, 1990
- [10] F. Anderson, J. Ziegler, M. Pandy, and R. Whalen, "Numerical computation of optimal controls for large-scale musculoskeletal systems. Int. J. Tarbell (ed.) 1993 Advances in Bio-engineering," pp. 519-522, *Am. Soc. Mech. Engr.*, New York, 1993.
- [11] J. Loncaric, "Geometric analysis of compliant mechanisms in robotics." Ph. D Dissertation, Harvard University, 1985.
- [12] D. S. Seltzer, T. L. DeFazio, and D. E. Whitney, "The instrumented remote center compliance," *Industrial Robot*, vol. 11, no. 4, pp. 238-242, 1984.
- [13] C. P. Chou, and B. Hannaford, "Static and dynamic characteristics of McKibben pneumatic artificial muscles," *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1994.
- [14] V. J. Kumar, and K. Waldron, "Force distribution in walking vehicles," *Proc of 20th Biennial Mechanism Conf.*, DE-vol. 15-3, pp. 473-480, 1988.
- [15] M. E. Pittelkau, "Adaptive load sharing force control for two arm manipulator," *Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pp. 498-503, 1988.
- [16] A. N. Meyer, and J. Angeles, "Force optimization in redundantly actuated closed kinematic chains," *Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pp. 951-956, 1989
- [17] Y. Nakamura, and M. Ghodoussi, "Dynamic computation of closed-link robot mechanisms with nonredundant and redundant actuators," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 5, pp. 294-302, 1989.
- [18] V. J. Kumar, and J. Gardner, "Kinematics of redundantly actuated closed chain," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 6, pp. 269-273, 1990.
- [19] R. Kurz, and W. Hayward, "Multiple-goal kinematic optimization of a parallel spherical mechanism with actuator redundancy," *IEEE Journal of Robotics and Automation* vol. 8, pp. 644-651, 1992.
- [20] B-J Yi, and R. A. Freeman, "Feedforward spring-like impedance modulation in human arm models," *IEEE Proc. on Robotics and Automation Conference*, pp. 3121-3128, 1995.
- [21] B-J Yi, and R. A. Freeman, "Geometric analysis of antagonistic stiffness in redundantly actuated parallel mechanisms," Special Issues on Parallel Closed-Chain Mechanism, *Journal of Robotic Systems*, vol. 10, pp. 581-603, 1993
- [22] B-J. Yi, I. H. Suh, and S-R Oh, "Analysis of a five-bar finger mechanism having redundant actuators with applications to stiffness and frequency modulation," *IEEE Proc. on Robotics and Automation Conference*, pp. 759-765, 1997.
- [23] B-J. Yi, and R. A. Freeman, "Synthesis of actively adjustable springs by antagonistic redundant actuation," *ASME Trans. Dynamic Systems, Measurement, and Controls*, vol. 114, pp. 454-461, 1992.
- [24] K. Cleary, "Software development of redundant manipulators," Ph. D Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering, The University of Texas at Austin, 1990.
- [25] K. Lakshminarayana, and B. Dizioglu, "Synthesis of spring-restrained mechanisms for amplitude-independent natural frequency of oscillation," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 7, pp. 167-190, 1972.
- [26] K. Srinath, and R. Karamakar, "Vibratory conveying by nonsinusoidal excitation," *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 202, pp. 405-408, 1988
- [27] H. J. Kang, B-J. Yi, W. Cho, and R. A. Freeman, "Constraint-embedding approaches for general closed-chain system dynamics in terms of a minimum coordinate set," *Proc. of ASME Mechanism Conf.*, De-vol. 24, pp. 125-132, 1990
- [28] H. J. Yeo, I. H. Suh, B-J. Yi, and S-R. Oh, "A closed-chain Jacobian based hybrid control for two cooperating arms with a passive joint An application to sawing task," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 15, no. 1, pp. 141-151, February, 1999
- [29] 이병주, 이재훈, 김희국, "인체의 근육구조에 대한 해석과 가변스프링 메커니즘 설계로의 적용," 제어·자동화·시스템공학 논문지, vol. 5, no. 2, pp. 208-219, 1999.

부록1

일반화된 스칼라 내적(generalized scalar scalar dot product [1]) 'o' 는 다음과 같이 정의된다. A와 B가 각각 $p \times q$ 행렬 그리고 $q \times (m \times n)$ 삼차원 행렬을 나타낸다고 하면, 스칼라 도트 프로덕트의 결과는 $p \times (m \times n)$ 의 차원을 가지는 C 행렬이 된다. $C_{(p, i, j)}$ 는 C 행렬의 p번째 평면의 i번째 행의 j번째 열의 요소를 나타내며 다음과 같이 정의된다

$$C_{(p, i, j)} = [A \circ B]_{(p, i, j)} = \sum_{k=1}^q A_{(p, k)} B_{(k, i, j)}$$

부록2

$[H_{ca}^d]_{(i, i, j)}$ 는 $[H_{ca}^d]$ 을 구성하는 모든 평면의 i번째 행의 j번째 열의 요소들로 구성되는 행벡터로 정의한다. 이 때에 $[H]$ 는 $[H_{ca}^d]$ 을 구성하는 모든 평면의 upper-diagonal 행벡터들의 다음과 같은 조합으로 정의된다.

$$[H] = \begin{bmatrix} [H_{aa}^d]_{(1,1,1)} & [H_{aa}^d]_{(2,1,1)} & \cdots & [H_{aa}^d]_{(r,1,1)} \\ [H_{aa}^d]_{(1,1,2)} & [H_{aa}^d]_{(2,1,2)} & \cdots & [H_{aa}^d]_{(p,1,2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & [H_{aa}^d]_{(i,i,2)} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ [H_{aa}^d]_{(1,r,q)} & [H_{aa}^d]_{(2,r,q)} & \cdots & [H_{aa}^d]_{(p,r,q)} \end{bmatrix},$$

여기서, p 는 $[H_{aa}^d]$ 을 구성하는 평면의 개수를 나타내고, q 는 각 평면의 upper-diagonal 요소들의 개수를 나타낸다.

부록3

여유구동 메카니즘에서의 강성효과를 위한 필요조건 [21]. 폐쇄체인 메카니즘은 다음 조건을 만족하면 여유구동에 의한 강성효과를 생성할 수 있다 첫 번째로

$$J_a \geq D + M,$$

여기서, D , M , 그리고 J_a 는 각각 독립적인 강성요소의 개수 ($=M(M+1)/2$), 운동성(system mobility), 액추에이터의 개수(number of active joints)를 의미한다. 두 번째로

$$NC = (IC - LC) \geq D.$$

여기서, NC , IC , 그리고 LC 는 각각 비선형 구속방정식, 독립 구속방정식, 그리고 선형 구속방정식의 개수들을 나타낸다

부록4

(64)의 $[I_{uu}^*]^{-1}$, 그리고 $[K_{uu}]$ 는 각각 대칭행렬이며 다음과 같은 요소들로 구성된다고 정의하면

$$[I_{uu}^*]^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}, [K_{uu}] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix},$$

주파수 행렬 $[I_{uu}^*]^{-1}[K_{uu}]$ 는 다음과 같이 표현된다.

이 별 주

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제 5권, 제 2호, 참조

$$[I_{uu}^*]^{-1}[K_{uu}] = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 & a_1b_2 + a_2b_3 \\ a_2b_1 + a_3b_2 & a_2b_2 + a_3b_3 \end{bmatrix},$$

여기서, $[I_{uu}^*]^{-1}[K_{uu}]$ 이 대각행렬이기 위한 조건은

$$a_1b_2 + a_2b_3 = 0, \quad a_2b_1 + a_3b_2 = 0,$$

이며, 이 조건들로부터

$$a_1b_1 = a_3b_3$$

이 유도되고, 결과적으로 $[I_{uu}^*]^{-1}[K_{uu}]$ 의 두 개의 대각 요소들이 동일한 값을 지니게 됨을 살펴볼 수 있다. 결론적으로 주파수 행렬의 대각 요소들을 동일한 값으로 정하는 경우에는 주파수 행렬은 항상 대각행렬로 구성된다

부록5

동역학식 (51)에 대한 선형화된 식은 다음과 같이 구해진다

$$\tau_u + \delta\tau_u = ([I_{uu}^*] + \delta[I_{uu}^*])(\ddot{u} + \delta\ddot{u}) + (\delta u + u)^T ([P_{uuu}^*] + \delta[P_{uuu}^*])(\delta\dot{u} + \dot{u})$$

힘평형 상태에서는 $u = \dot{u} = 0$, 그리고 $\tau_u = 0$ 이므로 위 식은 다음과 같이 정리되며

$$\begin{aligned} \delta\tau_u &= [I_{uu}^*]\delta\ddot{u} + \delta[I_{uu}^*]\delta\ddot{u} + \delta u^T [P_{uuu}^*]\delta u \\ &\quad + \delta\dot{u}^T \delta[P_{uuu}^*]\delta\dot{u} \\ &= [I_{uu}^*]\delta\ddot{u} + \delta u^T [P_{uuu}^*]\delta\ddot{u} + \delta u^T [P_{uuu}^*]\delta u \\ &\quad + \delta\dot{u}^T (\delta u^T \frac{\partial [P_{uuu}^*]}{\partial u})\delta\dot{u}, \end{aligned}$$

여기서, 첫 번째 항을 제외한 나머지 세 항들은 미소한 벡터들의 곱으로 표현되어 기여가 작다고 판단되므로 첫 번째 항만 고려한다.