

Analysis of Multiple Slab Waveguides by using Leaky Layer

金允中* · 徐廷勳** · 李世浩** · 金昌敏***
 (Yun-Jung Kim · Jung-Hoon Seo · Se-Ho Lee · Chang-Min Kim)

Abstract - Multiple slab waveguides are analyzed by using the transfer matrix method and by introducing a virtual leaky layer. It is shown that the analysis is conceptually equivalent to the prism coupling phenomenon. The Lorentzian function is made use of to obtain the eigenvalues of multiple waveguides. Computer simulations are performed on single layered, double layered waveguides. The calculation results are confirmed to agree well with those of the finite difference method.

Key Words : transfer matrix method, leaky layer, Lorentzian function.

1. 서 론

3차원 구조 multiple 결합 도파로는 광 분배기, fan-in devices[1] 또는 laser array[2]등에서 유용하게 사용되고 있으며, EIM(실효굴절률법)을 적용하면 등가한 2차원 구조 즉, 평판 도파구조로 대치될 수 있다. Multiple 평판 도파로를 해석하는 기법으로는 이론적으로 normal 모드 이론[3, 4]과 coupled 모드 이론[5, 6]으로 크게 나뉘며, 수치해석기법으로는 FDM(유한차분법), FEM(유한요소법), BPM(빔전송법) 또는 Transfer matrix method등이 있다.

Normal mode 개념은 여러 도파로를 하나의 구조로 생각하며 고유 모드들간의 간섭 현상을 각 도파로간의 coupling 현상 해석에 이용하는 기법이다. Coupled mode 개념은 여러 도파로를 각각의 구조로 생각하여 이웃 도파로를 섭동 요인으로 보아 각 도파로간의 coupling 현상을 해석한다. 이상의 두 개념 모두 실제적인 도파로 설계시에는 위에 열거한 수치해석 기법을 기본으로 하게 된다. FDM, FEM이 도파로 횡면에 관한 해석을 대상으로 하고 있는 반면, BPM은 도파로 종축에 따른 해석을 대상으로 하고 있다. 한편 transfer matrix method는 도파로 횡면 각 layer간의 입사파, 반사파의 관계, 혹은 파동함수 계수의 관계를 행렬 형식으로 기술하는 기법이다[7-10].

본 논문에서는 전달행렬 방법을 이용하여 leaky layer를 도입한 multiple 평판 도파로를 해석하고자 한다. Leaky layer란 core와 굴절률의 크기가 크거나 유사하며 core로부터 적절한 gap을 갖는 폭이 ∞ 인 layer를 뜻한다. Leaky layer에 대한 연구는 도파로에서의 에너지 손실을 이해하는데 있어서 매우 중요하며

최근 많은 연구가 이루어지고 있다[11-14].

Leaky layer의 해는 무수히 많은 방식모드로 구성되어진다. 도파로 내부의 파와 leaky layer 내부의 파의 에너지 비는 β 의 함수로서 Lorentzian 곡선의 형태를 이루며[13] 이 때 에너지 비는 전달행렬로서 구할 수 있다[9, 10]. 도파로 구조와 leaky layer사이의 간격을 증가시키에 따라 Lorentzian 곡선은 점점 sharp한 형태를 가지며, Lorentzian 곡선이 peak를 이루는 β 가 도파로의 고유치가 된다. Transfer matrix method를 이용하여 모의 전산하였으며 그 결과의 타당성을 검토하기 위해 FDM과 비교하였다.

2. Core와 Leaky Layer 내의 전력비

Leaky layer를 도입한 단일 평판 도파로의 굴절률 분포는 그림 1과 같다. 해석의 용이성을 위하여 도파로의 왼쪽 clad를 metal wall로 놓았다.

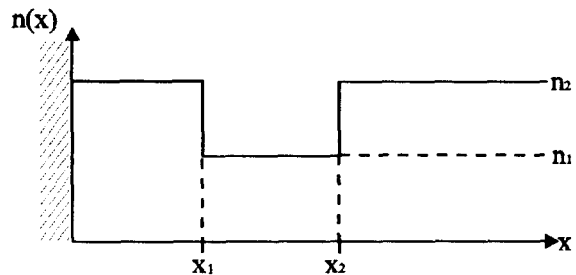


그림 1 도파 및 Leaky layer의 굴절률 분포

Fig. 1 Index profile of a guiding and a leaky layer

그림 1에서 $x \leq 0$ 에 금속으로 된 경계가 존재하므로 $x=0$ 에서는 필드가 존재하지 않는다고 가정한다. TE 모드로 입사된 전계의 분포는 다음과 같이 주어진다.

*準會員 : 서울시立大 工大 電子工學科 碩士
 **準會員 : 서울시立大 工大 電子工學科 碩士課程
 ***正會員 : 서울시立大 工大 電子電氣工學部 教授
 接受日字 : 1998年 3月 10日
 最終完了 : 1998年 11月 6日

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= A \sin px; & 0 < x < x_1 \\ \psi_{II}(x) &= B e^{\alpha(x-x_1)} + C e^{-\alpha(x-x_1)}; & x_1 < x < x_2 \\ \psi_{III}(x) &= D_+ e^{i p(x-x_2)} + D_- e^{-i p(x-x_2)}; & x > x_2 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,

$$p^2 = k_0^2 n_2^2 - \beta^2; \quad q^2 = \beta^2 - k_0^2 n_1^2 \quad (2)$$

이고 ψ 와 $d\psi/dx$ 의 연속성을 이용하여 각 전계의 계수를 구해 $0 < x < x_1$ 과 $x > x_2$ 에서의 field의 계수비를 구해보면 다음의 Lorentzian 함수가 된다[13].

$$\left| \frac{A}{D_{\pm}} \right|^2 \approx \frac{4q_g p_g \Gamma}{\beta_g (1 + q_g x_1)} \frac{1}{(\beta - \beta_g)^2 + \Gamma^2} \quad (3)$$

여기서

$$\Gamma = \frac{4p_g^3 q_g^3}{\beta_g (p_g^2 + q_g^2)^2} \frac{e^{-2q_g(x_2-x_1)}}{(1 + q_g x_1)} \quad (4a)$$

$$\beta_g = \beta_g + \Delta\beta \quad (4b)$$

$$\Delta\beta = -\frac{\Gamma(p_g^2 - q_g^2)}{2p_g q_g} \quad (4c)$$

식 (3), (4)에서의 첨자 g 는 guided-mode를 의미한다. 식 (3)의 Lorentzian함수는 $\beta = \beta_g$ 에서 최대값을 가지며 Γ 의 반치폭을 갖는다. 여기서 Γ 는 (x_2-x_1) 이 증가함에 따라 지수적으로 감소하므로 leaky 구조와 core의 간격이 클수록 Lorentzian 곡선의 반치폭이 좁아져 첨예한 바늘 형태로 접근하게 된다. 또한 $\Delta\beta$ 가 Γ 의 함수이므로 최대값이 되는 점에서 β 는 β_g 에 수렴하게 된다.

3. 전달 행렬의 구성

그림 2와 같은 평판 도파로에서 각 영역의 전계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_i &= \hat{e}_i^+ E_i^+ e^{i\omega t - (k_x \cos \phi_i)x - \beta z} \\ &+ \hat{e}_i^- E_i^- e^{-i\omega t + (k_x \cos \phi_i)x - \beta z} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 &= k_3 d_2 \cos \phi_3 \\ \Delta_4 &= k_4 (d_2 + d_3) \cos \phi_4 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\beta = k_1 \sin \phi_1 = k_2 \sin \phi_2 = \dots = k_3 \sin \phi_3, \quad (7)$$

$$k_i = k_0 n_i = \left(\frac{\omega}{c} \right) n_i$$

각 영역의 표면에 경계조건을 적용하여 행렬식으로 나타내면,

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \dots = S_1 S_2 S_3 \begin{pmatrix} E_4^+ \\ E_4^- \end{pmatrix} \quad (8)$$

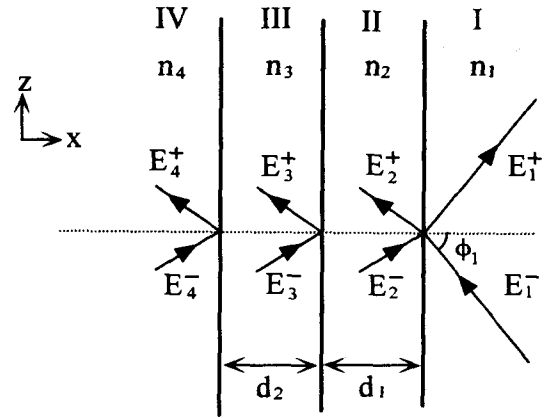


그림 2 ϕ_1 의 각도로 입사된 leaky layer 및 도파구조의 평면도

Fig. 2 Side view of a leaky layer and a guiding layer, where a beam launched in angle ϕ_1

와 같이 주어지고 각 영역의 전달행렬 S_i 는

$$S_i = \frac{1}{t_i} \begin{pmatrix} e^{i\delta_i} & r_i e^{i\delta_i} \\ r_i e^{i\delta_i} & e^{i\delta_i} \end{pmatrix} \quad (9)$$

이다. r_i 와 t_i 는 i 번째 경계 면에서의 반사계수와 투과계수를 나타내는 상수이고, $\delta_i = k_i d_i \cos \phi_i$ 이다. TE mode로 입사된 경우에 대해서 각 계수는

$$r_i = \frac{n_i \cos \phi_i - n_{i+1} \cos \phi_{i+1}}{n_i \cos \phi_i + n_{i+1} \cos \phi_{i+1}} \quad (10a)$$

$$t_i = \frac{2n_i \cos \phi_i}{n_i \cos \phi_i + n_{i+1} \cos \phi_{i+1}} \quad (10b)$$

이고 TM mode에 대해서는,

$$r_i = \frac{n_i \cos \phi_{i+1} - n_{i+1} \cos \phi_i}{n_i \cos \phi_{i+1} + n_{i+1} \cos \phi_i} \quad (11a)$$

$$t_i = \frac{2n_i \cos \phi_i}{n_i \cos \phi_{i+1} + n_{i+1} \cos \phi_i} \quad (11b)$$

이다. 이러한 2×2 전달행렬을 이용하여 β 에 따른 $|E_3^+/E_1^+|^2$ 를 구하면 앞에서 유도한 leaky구조의 전계의 계수비 $|A/D_{\pm}|^2$ 를 얻을 수 있다. 이러한 접근 방법을 이용하여 multiple 도파로의 예로써 단일 평판 도파로, 두도파로를 해석해 보기로 한다.

4. Multiple 도파로에 대한 모의 전산 결과

4.1 단일 평판 도파로의 해석

먼저 그림 3과 같이 단일 평판 도파로에 leaky layer가 도입된 경우를 TE모드에 대하여 모의전산 하였다. 그림 3에서 영역 III이 해석하고자 하는 단일 도파로의 core 부분이고 영역 I이 도파로를 해석하기 위해 도입한 leaky layer를 나타내고

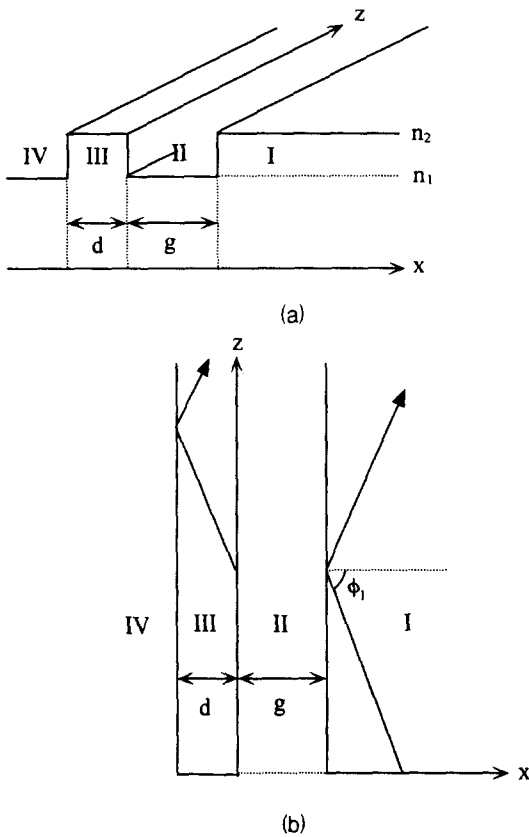


그림 3 (a) 도파구조 및 leaky layer의 굴절률 분포
 I : Leaky layer, III: 도파로, II, IV: clad
 (b) 위에서 본 도파 구조 및 leaky layer 내의 광전파 경로

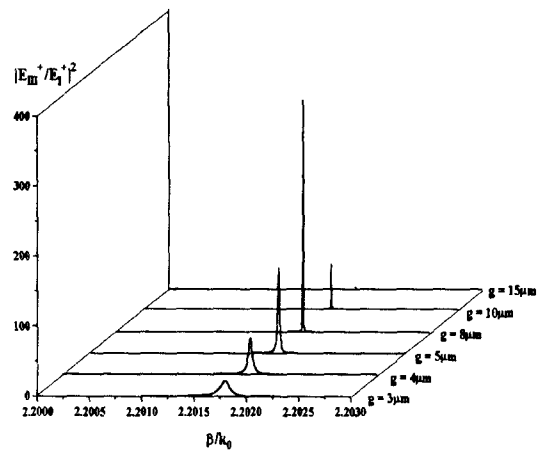
Fig. 3 (a) Index profile of a guiding and a leaky layer
 (b) Top view of beam propagation inside layers

있다. 실제 leaky layer의 굴절률은 도파로의 굴절률에 비하여 훨씬 큰 경우가 대부분이나 본 논문에서는 해석의 편의상 동일한 굴절률로 놓기로 한다.

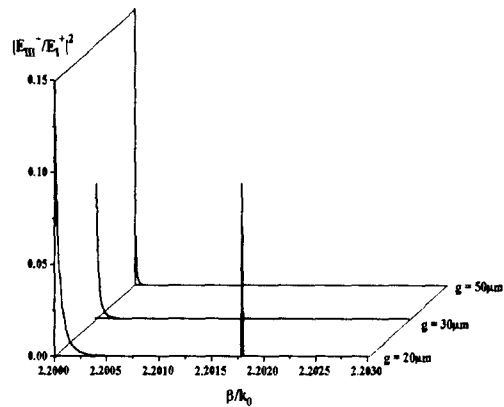
Leaky layer의 가장 좋은 예로는 prism을 들 수 있다. Leaky layer로부터 도파로를 향하여 파를 입사시킨다 함은 그림 3(b)에 보여지듯이 prism을 통하여 도파로 내에 도파모드를 여기시키는 것을 의미한다. 실제로 prism의 폭은 core에 비해 ∞ 에 가까우므로 leaky layer의 적절한 예가 된다. 식 (7)에서 $\beta/k_0 = n_1 \sin \phi_1$ 이므로, β/k_0 를 변화시키며 응답곡선을 얻는 것은 prism에서 입사각 ϕ_1 을 변화시키며 입사시키는 것과 같은 의미이다. ϕ_1 을 변화시키며 입사시킬 때 core와 prism과의 z축 전파상수가 일치되는 경우 최대의 power coupling이 일어나게 된다. 이러한 synchronous coupling의 경우 전력 결합비의 응답곡선은 peak값을 갖게 되는 것이다. 다만 leaky layer와 도파로의 간격 g의 크기에 따라 응답곡선 peak의 예민도가 달라지므로, 우리는 최적의 간격을 찾을 필요가 있는 것이다.

그림 4는 도파로 core로부터 leaky layer의 거리 g를 변화시키며, β/k_0 의 변화에 따른 전력비 $|E_m^*/E_1^*|^2$ 를 구한 것이다.

그림 4(a)에는 간격 g가 비교적 작을 때부터 적절한 경우일 때의 전력비가 그려져 있다. g가 작을 때는 Lorentzian곡선의 반치폭 Γ 가 크고 peak의 위치가 불확실하다. 그러나 g가 적절



(a)



(b)

그림 4 단일 도파로에서 β/k_0 의 변화에 따른 전력비 $|E_m^*/E_1^*|^2$
 $n_2=2.203, n_1=2.20, d=5 \mu\text{m}, \lambda=1.3 \mu\text{m}$

Fig. 4 Power ratio $|E_m^*/E_1^*|^2$ as a function of β/k_0

히 잡혀 있는 경우에는 곡선이 거의 바늘 형태가 된다. 그림 4(b)는 g가 필요이상으로 클 때의 전력비이며, 전력비의 단위가 그림 4(a)에 비하여 10^{-3} order임을 유의한다.

그림 4(a)에서 core와 leaky layer와의 간격이 좁게 되면 전파상수가 일치되지 않더라도 약간의 coupling이 일어나게 된다. 따라서 반치폭이 넓은 응답곡선을 얻어 정확한 eigenvalue를 얻지 못하게 된다. 반면에 간격이 적절하게 떨어져 있으면 매우 첨예한 needle 형태의 응답곡선을 얻는다. 이 때 peak를 갖는 β/k_0 가 도파로의 고유치가 되는 것이다.

그림 4(b)에서 보듯이 간격이 적정선을 넘어 매우 커지게 되면 prism에서의 입사광이 core와 leaky layer와의 전파상수가 일치되는 각을 이루어도 그 간격이 너무 커서 coupling이 거의 일어나지 않게 되는 것이다. 이는 방향성 결합기에서 두 도파로의 간격이 벌어질수록 결합계수의 값이 지수적으로 떨어지는 것과 동일한 현상이다. 따라서 그림 4(b)에서와 같이 peak값이 0.1 정도의 매우 작은 값을 갖게 된다. 한편, cutoff 부근에서 발산이 있는 것을 볼 수 있다. Cutoff 부근의 mode index값을 갖는 도파광은 전계 분포가 매우 폭넓게 퍼짐으로써 간격이 큼

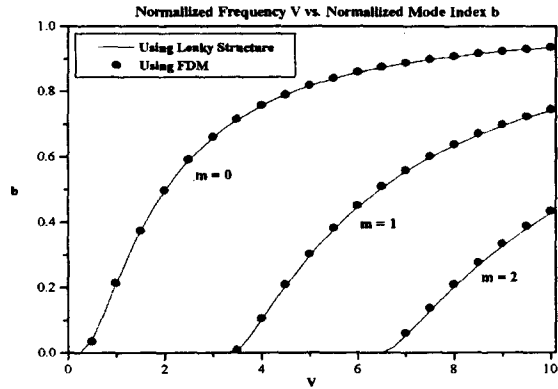


그림 5 단일 도파로의 b-V 곡선

$$b = \frac{(\beta/k_0) - n_1^2}{n_2^2 - n_1^2}, \quad V = k_0 d \sqrt{n_2^2 - n_1^2}$$

Fig. 5 b-V curve of a single waveguide

에도 불구하고 전계 분포의 tail부분이 prism에까지 이어진다. 결국 power의 coupling이 있게 되는 것이며 원하지 않는 전력비의 발산이 존재하게 된다.

적절한 gap을 설정했을 때 leaky layer를 적용한 방법은 매우 정확한 도파로의 고유치를 보인다. 적절한 gap에 대한 도파로의 b-V curve를 그림 5에 구해보았다.

그림 5에서 보는 바와 같이 FDM과 leaky layer를 이용한 방법이 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

4.2 두도파로의 해석

두도파로를 해석하기 위해 leaky layer를 도입한 굴절률 분포는 그림 6과 같다.

Leaky layer가 도입된 두도파로에서의 core내부의 전계와 leaky layer 내부의 전계의 전력비는 다음과 같이 주어진다.

여기서 해석대상이 두도파로이므로 전력비 함수는 식 (12)와 같이 두 Lorentzian 함수의 합으로 나타내어지며 peak값이 두

$$\left| \frac{E_V}{E_I} \right| \propto \sum_{n=1}^2 \frac{1}{(\beta - \beta_g')^2 + \Gamma^2} \tag{12}$$

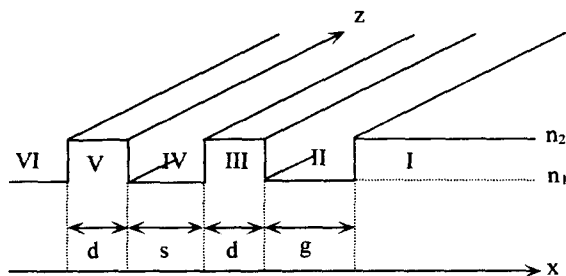
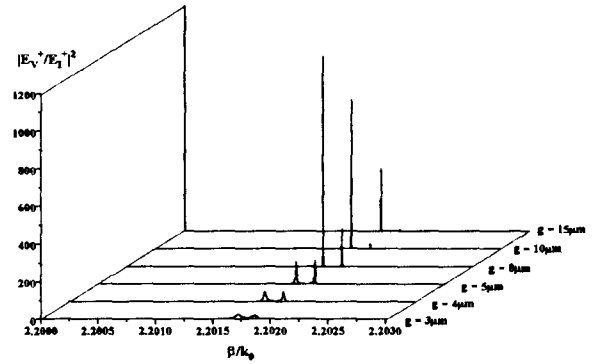
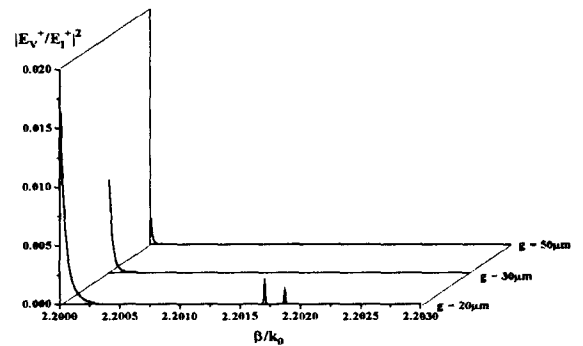


그림 6 Leaky layer가 도입된 두도파로의 굴절률 분포
I : Leaky layer, III, V : 도파로, II, IV, VI : clad

Fig. 6 Index profile of two waveguides with a leaky layer introduced



(a)



(b)

그림 7 두도파로에서 beta/k_0의 변화에 따른 전력비 |E_V*/E_I*|^2
n2=2.203, n1=2.20, d=s=5um, lambda=1.3um

Fig. 7 Power ratio |E_V*/E_I*|^2 as a function of beta/k_0

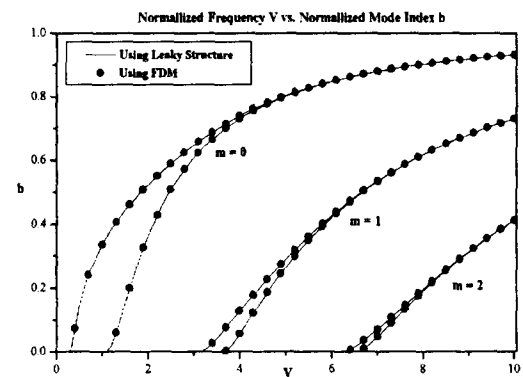


그림 8 두도파로의 b-V 곡선
왼쪽 curve : even 모드,
오른쪽 curve : odd 모드

Fig. 8 b-V curve of two waveguides

개가 나오게 된다.

x=∞에서의 경계조건을 고려한 전달행렬을 이용하여 계산된 결과를 그림 7에 나타내었다. Core로부터 leaky layer까지의 간격 g를 파라미터로 하여 전력비를 계산하였으며 그 결과는 단일 도파로 해석 결과와 유사한 경향을 보이고 있다.

두도파로에 leaky layer를 적용하여 얻은 b-V 곡선을 그림 8에 나타내었으며, FDM을 이용한 결과와 비교하여 보았다.

그림 3에서 그림 8에 이르기까지 단일 도파로, 두도파로에 대한 해석 결과를 보였으며, 이상의 해석과정은 세도파로 이상의 multiple 도파구조에 대해서도 용이하게 확장 적용된다. Leaky layer를 prism으로 비유하고, prism에서 입사광과 도파광 사이에 최대의 광 결합이 일어나기 위해서는 두 전파정수가 synchronous 해야한다는 사실을 바탕으로 도파로 해석을 시도하였다. 이러한 의미에서 일반 수치해석과는 달리 중요한 물리적 개념을 담고 있다는 사실이 주목할만하다.

5. 결 론

Leaky layer를 이용하여 단일 평판 도파로, 두도파로를 해석하였다. 도파로의 각 영역의 경계조건을 이용하여 전달행렬을 구성하였고, 이를 이용해 core와 leaky layer 내부의 전계의 진력비를 β/β_0 를 변화시켜가며 계산하였다. Core와 leaky layer와의 간격을 파라미터로 하여 Lorentzian곡선의 형태를 갖는 응답곡선의 변화를 모의 전산하였다. Core와 leaky layer와의 간격을 적절하게 잡았을 때 Lorentzian곡선은 매우 첨예한 바늘 형태를 가지며 이 때 peak 점을 찾아 도파로의 고유치를 얻었다. 이러한 결과의 타당성을 비교하기 위해 각각 b-V 곡선을 사용하여 FDM과 비교하였고 두 결과가 매우 잘 일치함을 보였다. FDM등의 수치해석이 물리적 개념과 대체로 무관한 것과는 달리, leaky layer를 이용하는 경우는 prism coupling의 물리적 개념을 담고 있을 뿐 아니라 임의의 multiple 평판 도파로에도 확장 적용될 수 있음을 보였다.

참 고 문 헌

[1] S. Kawakami and H. Haus, "Continuum analog of coupled multiple waveguides," J. Lightwave Technol., Vol. LT-4, No. 2, pp. 160-168, Feb. 1986

[2] A. Hardy and W. steifer, "Analysis of phase array diode lasers," Optic. Lett., Vol. 10, pp. 335-337, 1985

[3] E. Marom, O. Q. Ramer and Shlomd Ruschin, "Relation between normal-mode and coupled-mode analyses of parallel waveguides," IEEE J. Quantum Electron., Vol. QE-20, No. 12, pp. 1311-1319, Dec. 1984

[4] G. Lenz and J. Salzman, "Eigenmodes of multiwaveguide structures," IEEE J. Lightwave Technol., Vol. LT-8, No. 12, pp. 1803-1989, December 1990

[5] Amos Hardy, William Streifer, "Coupled mode solutions of multiwaveguide systems," IEEE J. Quantum Electron., Vol. QE-22, No. 4, pp. 528-534, April, 1986

[6] R. Syms, "Approxiamte solution of eigenmode problems for layered coupled waveguide arrays," IEEE J. Quantum Electron., Vol. QE-23, No. 5, pp. 525-532, May 1987

[7] A. K. Ghatak et al, "Numerical analysis of planar optical waveguides using matrix approach," IEEE J. Lightwave Tech., Vol. LT-5, No. 5, pp. 660-667, May 1987

[8] T. Makino "Transfer matrix formulation of spontaneous emission of DFB semiconductor laser," IEEE J. Lightwave Tech., Vol. 9, No. 1, pp. 84-91, Jan. 1991

[9] M. R. Ramadas et al., "A matrix approach to study the

propagation characteristics of a genefal nonlinear planar waveguide," J. Lightwave Technol., Vol. 7, No. 12, pp. 1901-1905 Dec. 1989

[10] W. Huang and J. Hong, "A transfer matrix approach based on local normal modes for coupled waveguides with periodic perturbations," J. Lightwave Technol., Vol. 10, No. 10, pp. 1367-1375 Oct. 1992

[11] A. K. Ghatak, "Leaky modes in optical wave-guides," Optical and Quantum Electron., Vol. 2, pp. 595-602, 1985

[12] K. Thyagarajan et al., "Analytical investigations of leaky and absorbing planar stuctures," Optical and Quantum Electron., Vol. 19, pp. 131-137, 1987

[13] A. K. Ghatak, K. Thyagarajan, Optical Electronics, Ch. 2, Cambridge Univ., 1993

[14] Y.J.Im and C.M.Kim, "Complex angle of incidence for planar optical waveguide analysis", Optical and Quantum Eletron., Vol. 29, pp. 877-881, 1997

저 자 소 개



김 윤 중(金 允 中)

1973년 10월 24일생. 1996년 2월 서울시립대학교 전자공학과 공학사. 1998년 2월 동대학원 전자공학과 석사. 주관심분야 도파/집적광학, FDM, FEM, BPM등 수치해석



서 정 훈(徐 廷 勳)

1972년 5월 2일생. 1997년 2월 서울시립대학교 전자공학과 공학사. 1997년 3월~현재 동대학원 전자공학과 석사과정 재학중. 주관심분야 도파/집적광학, 진행파전극/고속광변조기, FDM, FEM, BPM등 수치해석



이 세 호(李 世 浩)

1975년 2월 3일생. 1997년 2월 서울시립대학교 전자공학과 공학사. 1997년 3월~현재 동대학원 전자공학과 석사과정 재학중. 주관심분야 도파/집적광학, 진행파전극/고속광변조기, FDM, FEM, BPM등 수치해석



김 창 민(金 昌 敏)

1950년 4월 10일생. 1975년 2월 서울대학교 전자공학과 공학사. 1982년 2월 동 대학원 전자공학과 공학석사. 1989년 8월 U. of Florida Dept. of EE 공학박사. 1983년 5월~현재 서울시립대학교 전자전기공학부 교수. 주관심분야는 도파/집적광학, 진행파전극, 진행파전극/고속광변조기, 저분산 광섬유, 광통신시스템, FDM, FEM, BPM, SOR 등 수치해석