

비선형 시스템의 계수추정 알고리즘 연구

A Study on the Parameter Estimation Algorithm for Nonlinear Systems

李 達 鎬* · 成 相 萬**

(Dal-Ho Lee · Sang-Man Seong)

Abstract - In this paper, we proposed an algorithm for estimating parameters of nonlinear continuous-discrete state-space system. This algorithm uses the conventional extended Kalman filter(EKF) for estimating state variables, and modifies the recursive prediction error method for parameter estimation of the nonlinear system. Simulation results for both linear and nonlinear measurements under the environment of process and measurement noises show a convincing performance of the proposed algorithm.

Key Words : nonlinear parameter estimation, extended Kalman filter, recursive prediction error method

1. 서 론

시스템의 계수 추정 문제는 측정된 입, 출력 데이터로부터 시스템의 동특성을 정확히 묘사하는 수학적 모델을 구하기 위하여 시스템 공학에서 대두된 분야이다. 이는 현대 제어이론의 발달과 크게 연관되어 있으며 제어공학에서의 제반 문제를 해결하기 위한 기본적인 문제이다. 현대제어공학에서 다루는 시스템은 상태공간에서 선형이나 비선형의 미분방정식으로 표시되므로 이러한 시스템의 모델링 및 계수 추정에 관한 필터링 기법이 지난 20년간 꾸준히 연구되고 있다.

Ljung[1]은 선형 이산 상태방정식 및 측정식을 갖는 시스템에서 계수를 상태변수로 추가시켜 추정하는 방법에 대하여 연구하였는데, 이 경우 계수에 대해서는 비선형이 되므로 계수에 대해 선형화를 수행하는 방식의 확장칼만필터(extended Kalman filter)를 추정자(estimator)로 사용하였다. 일반적으로 확장칼만필터는 잡음에 대한 가정이 부정확할 경우 발산하거나 편향된 추정치를 주는데 이를 개선하는 방법과 알고리즘의 수렴성이 보장되는 특별한 선형 이산시스템을 제시하였다. Gavel 등[2]은 연속 상태방정식 및 이산 측정식을 갖는 선형시스템에 Ljung의 방법을 응용하여 적용하였는데, 상태변수 추정자로 칼만필터를 사용하고 계수 식별은 순환예측오차법을 사용하는 알고리즘을 제안하였으며 참고문헌 [1]과 유사한 방법으로 수렴성을 갖는 시스템을 제시하였다. Jakoby 등은 비선형 이산 상태방정식 및 측정식을 갖는 시스템에서 상태변수와 계수 모두에 대해 선형화하

는 방식의 확장칼만필터를 추정자로 사용하였다. 그리고 알고리즘의 장점 및 수렴성 등은 시뮬레이션을 통하여 제시하였다.

본 논문에서는 상태변수 추정에는 확장칼만필터를 사용하고 계수추정에는 순환예측오차법을 사용하여 실제에서 흔히 볼 수 있는 연속의 비선형 상태방정식과 이산의 선형 및 비선형 측정식을 갖는 시스템에 적용가능한 계수 추정 알고리즘을 제안하였다. 이는 비선형 시스템에 적용가능하다는 점에서 Ljung 혹은 Gavel 등이 제시한 알고리즘과 구별되며 또한 연속의 비선형 상태방정식을 갖는 시스템을 대상으로 한다는 점과 계수 추정에 순환예측오차법을 사용한다는 점에서 Jakoby의 방법과 구별된다. 제안된 알고리즘을 연속의 비선형 상태방정식과 이산의 선형 및 비선형 측정식을 갖는 시스템에 각각 적용한 시뮬레이션을 통하여 그 성능 및 수렴성을 확인하였으며 이를 확장칼만필터와 비교하였다.

2. 모델 및 알고리즘

본 논문에서 다루고자 하는 시스템은 동력학(dynamics)이 연속시간으로 표시되고 측정치는 샘플링으로 인해 이산시간으로 표시되는데 이는 실제에서 흔히 접할 수 있는 시스템이다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = f[\theta, x(t), u, t] + w(t) \quad (1)$$

$$z(t_k) = h[\theta, x(t_k), t_k] + v(t_k) \quad (2)$$

여기서 x , u , z 의 차원은 각각 n_x , n_u , n_z 라고 가정한다. f 와 h 는 시스템의 상태변수 $x(t)$ 에 대하여 미분 가능한 함수이고, $z(t_k)$ 는 시간 t_k 에서 주어지는 이산 측정치이며, θ 는 미지의 계수 벡터이다. 공정잡음 $w(t)$ 와 측정잡음

* 正 會 員 : 暎園大 電子工學科 助敎授 · 工博

** 正 會 員 : 서울大 電氣工學部 博士課程

接受日字 : 1999年 1月 25日

最終完了 : 1999年 5月 27日

$v(t_k)$ 는 각각 백색 가우시안(white Gaussian) 잡음으로서 그 통계적 특성은 다음과 같다.

$$E v(t) = E v(t_k) = 0$$

$$E v(t) v^T(\tau) = Q \delta(t - \tau)$$

$$E v(t_i) v^T(t_j) = R \delta_{ij}$$

여기서 Q 는 양의 반한정(positive semidefinite) 행렬, R 은 양의 한정(positive definite) 행렬이다. 식 (1)과 (2)는 θ 가 실제값과 같다면 실제 시스템을 표현한다고 가정한다.

먼저, 확장칼만필터를 사용한 상태변수 추정자는 다음과 같다[4].

$$\hat{x}(t) = f[\hat{\theta}, \hat{x}(t), u, t] \quad (3)$$

$$\epsilon_k = z(t_k) - h[\hat{\theta}, \hat{x}(t_k), t_k] \quad (4)$$

$$\hat{x}(t_k^+) = \hat{x}(t_k^-) + K(t_k) \epsilon_k \quad (5)$$

여기서 ϵ_k 는 k 번째 측정치에 의한 잉여오차(residual error)이며 $K(t_k)$ 는 칼만이득이다. 칼만이득은 다음의 식으로부터 구해진다.

$$K(t_k) = P(t_k^-) H(t_k)^T [H(t_k) P(t_k^-) H(t_k)^T + R]^{-1}$$

여기에서 $H(t_k)$ 는 (2)의 측정식을 상태변수 추정치에 대하여 선형화한 행렬로서 다음과 같다.

$$H(t_k) = \left. \frac{\partial h(\theta, x(t_k), t_k)}{\partial x(t_k)} \right|_{\theta = \hat{\theta}(t_k), x(t_k) = \hat{x}(t_k)} \quad (6)$$

상태변수만을 추정하는 확장칼만필터는 계수를 알고 있다고 가정하는데 비해 여기서는 계수는 뒤에서 설명할 계수추정 알고리즘에서 구한 추정치를 사용한다. $P(t_k^-)$ 는 다음과 같은 Riccati 방정식을 적분하여 구한다.

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q$$

여기에서 $F(t)$ 는 상태방정식 (1)을 상태변수 추정치에 대해 선형화한 행렬로 $H(t_k)$ 와는 다르게 연속적으로 구해야 하는데 $t_k \leq t < t_{k+1}$ 에서는 $\theta = \hat{\theta}(t_k)$ 를 사용한다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$F(t) = \left. \frac{\partial f(\theta, x(t), u, t)}{\partial x(t)} \right|_{\theta = \hat{\theta}(t_k), x(t) = \hat{x}(t)}$$

이상에서 상태변수 추정을 위한 확장칼만필터 부분에 대해 설명하였다.

계수를 추정하기 위하여 하는데 다음과 같은 평가함수를 최소화하는 $\hat{\theta}$ 를 찾는 순환예측오차법을 사용하였다.

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \epsilon_k^T \Lambda^{-1} \epsilon_k$$

여기서 Λ 는 임의의 양의 한정 행렬이다. $V(\hat{\theta})$ 를 최소화하기 위하여 뉴턴의 불규칙 경사 알고리즘을 사용하면 다음과 같다.

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \left(\frac{d^2 V}{d\theta^2} \right)^{-1} \left(\frac{dV}{d\theta} \right)^T \quad (7)$$

식 (7)의 오른쪽 두 번째 항에 포함된 미분치는 식 (8)과 (9)로 표시될 수 있다[5].

$$\frac{dV}{d\theta} = -\psi_k \Lambda^{-1} \epsilon_k \quad (8)$$

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} = B(t_k) \quad (9)$$

여기서

$$\psi_k = \frac{d}{d\theta} \epsilon_k$$

$$B(t_k) = \sum_{i=1}^k \psi_i^T \Lambda^{-1} \psi_i$$

식 (9)는 실제 최소점에서 예측오차가 측정치에 독립이라는 성질을 이용하여 간략화된 형태이다[5]. 잉여오차의 미분치 ψ_k 는 식 (4)로부터 다음과 같이 계산한다.

$$\psi_k = - \left. \frac{\partial}{\partial \theta} h(\theta, \hat{x}(t_k^-), t_k) \right|_{\theta = \hat{\theta}(t_k)}$$

$$- \left. \frac{\partial}{\partial \hat{x}} h(\theta, \hat{x}(t_k^-), t_k) \frac{d\hat{x}}{d\theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}(t_k)}$$

$d\hat{x}/d\theta$ 를 구하기 위하여 이를 $W(t)$ 라 정의하고 식 (5)를 사용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} W(t_k^+) &\equiv \frac{d\hat{x}(t_k^+)}{d\theta} \\ &= \frac{d\hat{x}(t_k^-)}{d\theta} + \frac{dK(t_k)}{d\theta} \epsilon_k + K(t_k) \frac{d\epsilon_k}{d\theta} \end{aligned}$$

여기서 $W(t^-) = d\hat{x}(t_k^-)/d\theta$ 는 식 (3)의 시간 전파식으로부터 다음과 같이 적분하여 구한다.

$$\dot{W}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \hat{x}, u, t) \right|_{\theta = \hat{\theta}(t_k)} + F(t)W(t)$$

$dK(t_k)/d\theta$ 를 구하기 위해서는 $\partial P(t)/\partial \theta$ 의 시간 전파식과 측정 개선식이 필요한데, 이는 참고문헌 [6]에 주어진 방법을 사용한다. 이상에서 계수 추정을 위한 순환예측오차법 부분에 대해 설명하였다.

이와 같이 상태변수 추정과 계수추정은 각각에서 발생하는 오차를 예측오차에 공통적으로 반영되어 결합된다. 두 가지 알고리즘을 시간 전파식과 측정 개선식으로 요약하면 다음과 같이 구현될 수 있다.

■ 시간 전파식

$$\hat{x}(t) = f[\hat{\theta}, \hat{x}(t), u, t] \quad (10)$$

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q \quad (11)$$

$$\dot{W}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \theta} f[\hat{\theta}, \hat{x}(t), u, t] \right|_{\theta = \hat{\theta}(t_k)} + F(t)W(t) \quad (12)$$

■ 측정 개선식

$$\epsilon_k = z(t_k) - h[\hat{\theta}, \hat{x}(t_k), t_k] \quad (13)$$

$$K(t_k) = P(t_k^-)H(t_k)^T [H(t_k)P(t_k^-)H(t_k)^T + R]^{-1} \quad (14)$$

$$\hat{x}(t_k^+) = \hat{x}(t_k^-) + K(t_k)\epsilon_k \quad (15)$$

$$P(t_k^+) = [I - K(t_k)H(t_k)]P(t_k^-) \quad (16)$$

$$W(t_k^+) = W(t_k^-) + \frac{\partial K(t_k)}{\partial \theta} \epsilon_k - K(t_k)\psi_k \quad (17)$$

$$\psi_k = -\frac{\partial}{\partial \theta} h[\hat{\theta}, \hat{x}(t_k^-), t_k] - H(t_k)W(t_k^-) \quad (18)$$

$$B(t_{k+1}) = B(t_k) + \psi_k^T \Lambda^{-1} \psi_k \quad (19)$$

$$\hat{\theta}(t_{k+1}) = \hat{\theta}(t_k) + B(t_k)^{-1} \psi_k^T \Lambda^{-1} \epsilon_k \quad (20)$$

식 (14)-(16)는 상태변수, 식 (17)-(20)는 계수의 추정을 위한 측정개선식이다.

위의 알고리즘을 이용하여 상태공간에서 비선형 이산 측정치가 주어지는 연속의 비선형 시스템의 계수들을 추정할 수 있다. 측정식이 선형으로 표시되는 경우에는 식 (6)에서 정의되는 $H(t_k)$ 를 구하지 않고 측정식의 측정행렬을 사용한다.

이상과 같이 주어진 알고리즘의 수렴성 조건과 관련된 연구로서 참고문헌 [7]이 있다. 즉, $V(\hat{\theta})$ 가 두 번 미분가능하고 그 값이 한정되어 있으며, 식 (20)의 $B(t_k)^{-1}$ 및 $B(t_k)^{-1} \psi_k^T \Lambda^{-1} \epsilon_k$ 가 한정되며, 그리고 이들 세 한정값들의 곱이 1/2보다 작으면 제시된 알고리즘은 수렴한다.

3. 시뮬레이션 결과 및 고찰

앞 절에서 제안된 알고리즘의 성능을 파악하기 위하여 측정식이 선형 및 비선형으로 주어지는 두 가지 예에 이를 적용하여 확장칼만필터의 계수추정 결과와 비교하였다.

예제 1: 먼저, 비선형 연속시스템과 선형 측정식의 경우로 다음과 같이 표시되는 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = ax^2(t) + bu(t) + w(t) \quad (21)$$

$$z(t_k) = x(t_k) + v(t_k) \quad (22)$$

위 식에서 주어지는 계수의 실제값은 $a=-0.58$, $b=0.2$ 이다. 시뮬레이션시 잡음의 크기를 $\sigma_w=0.01$, $\sigma_v=0.01$ 로 하였다. 그리고 사용된 식 (21)의 입력 $u(t)$ 를 그림 1에 도시하였다. 측정치가 주어지는 샘플링 시간을 0.01초로 정하고, 0초에서 40초까지 4000개의 데이터에 대하여 시뮬레이션을 수행하였다. 이때 필터에 사용된 계수의 초기값은 $\hat{a}(0)=-2$, $\hat{b}(0)=0$ 이다.

초기공분산에 대한 영향을 보기 위하여 계수 a , b 의 공분산의 초기값 $P_a(0)$, $P_b(0)$ 에 따른 제안한 알고리즘과 확장칼만필터의 성능을 살펴보았다. 먼저, $P_a(0)=3$, $P_b(0)=0.04$ 로 설정하였을 때 제안된 알고리즘의 계수 추정 결과

의 그림 2에 도시하였다. 그리고 이와 비교하기 위하여 같은 조건을 사용한 경우 확장칼만필터의 계수 추정 결과를 그림 3에 도시하였다. 수렴속도 및 최종 수렴값을 살펴보면 두 알고리즘이 유사한 성능을 보이며 계수에 대한 초기조건이 실제와 비슷한 경우 추정값이 실제값에 근접하는 결과를 준다.

다음은 $P_a(0)=3$, $P_b(0)=0.23$ 일 때 제안된 알고리즘의 계수 추정 결과의 그림 4에 그리고 확장칼만필터의 계수 추정 결과를 그림 5에 각각 도시하였다. 이 경우에는 제안된 알고리즘은 초기 조건에 크게 영향을 받지 않고 그림 2와 비슷한 결과를 보인 반면, 확장칼만필터는 추정값이 실제값에 대하여 편향된 값으로 수렴함을 알 수 있다.

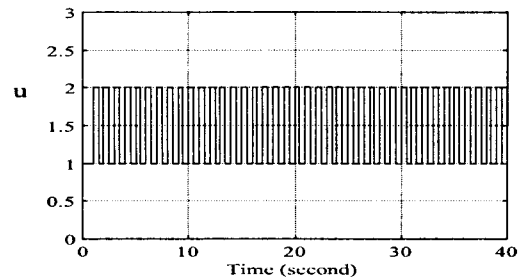
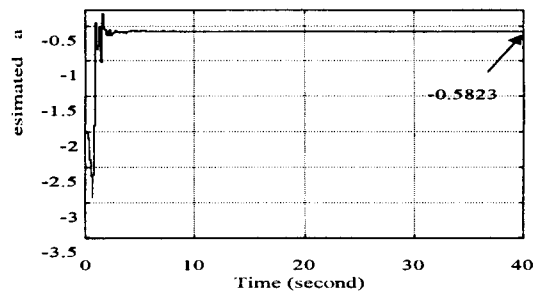
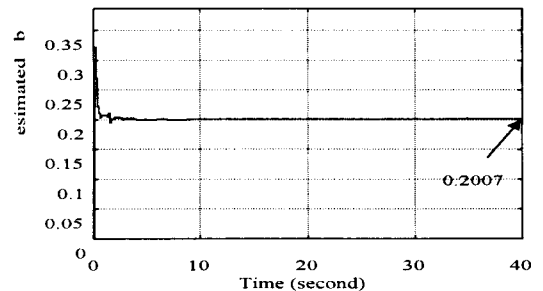


그림 1 인가된 입력
Fig. 1 Applied input



(a) \hat{a}



(b) \hat{b}

그림 2 $P_a(0)=3$, $P_b(0)=0.04$ 인 경우 제안된 알고리즘의 계수 추정 결과

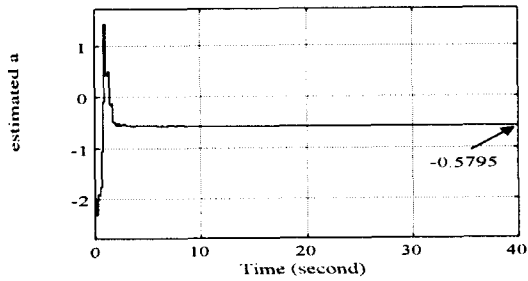
Fig. 2 Estimation results of the proposed algorithm for $P_a(0)=3$, $P_b(0)=0.04$

예제 2: 예제 1에서 식 (22)의 측정식이 다음 식 (23)과 같이 비선형인 경우를 고려한다.

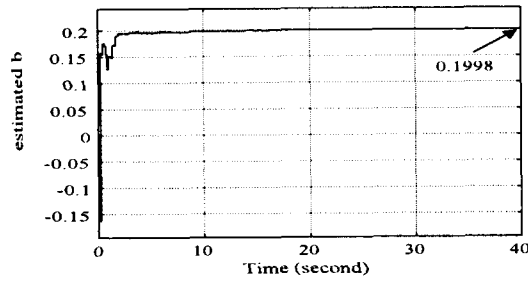
$$z(t_k) = x^2(t_k) + v(t_k) \quad (23)$$

이 예제에서도 계수의 실제값은 앞에서 사용한 $a=-0.58$, $b=0.2$ 이며, 입력 $u(t)$ 도 동일한 파형을 사용하였다. 그리고 측정치 샘플링 시간 및 시뮬레이션 시간도 동일하다.

잡음의 크기와 초기조건이 예제 1의 경우와 동일한 경우 제안된 알고리즘의 추정 결과를 그림 6에 도시하였다. 그림으로부터 측정식이 비선형인 경우에도 제안된 알고리즘의 계수 추정 결과가 실제값으로 수렴함을 확인할 수 있다. EKF의 결과도 그림 6과 유사하였으며 계수의 초기공분산의 변화시킨 결과 예제 1과 같이 편향된 추정값을 보였다.



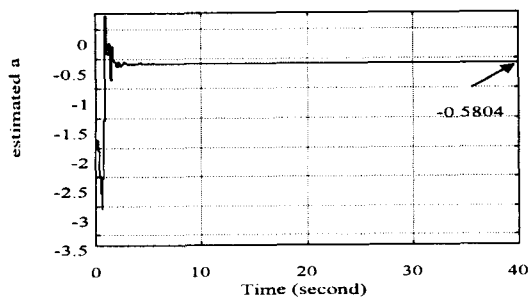
(a) \hat{a}



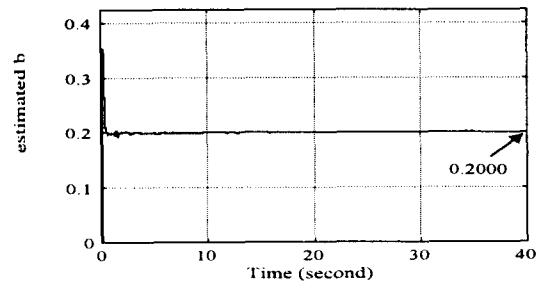
(b) \hat{b}

그림 3 $P_a(0)=3$, $P_b(0)=0.04$ 인 경우 확장칼만필터의 계수 추정 결과

Fig. 3 Estimation results of the EKF for $P_a(0)=3$, $P_b(0)=0.04$



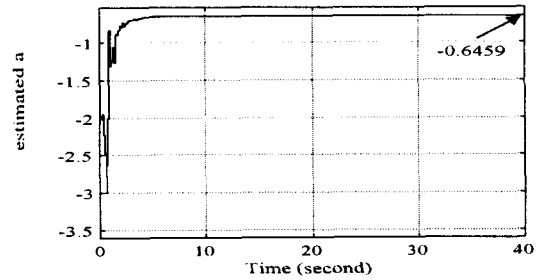
(a) \hat{a}



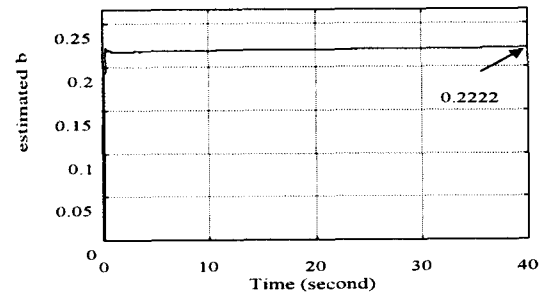
(b) \hat{b}

그림 4 $P_a(0)=3$, $P_b(0)=0.23$ 인 경우 제안된 알고리즘의 계수 추정 결과

Fig. 4 Estimation results of the proposed algorithm for $P_a(0)=3$, $P_b(0)=0.23$



(a) \hat{a}



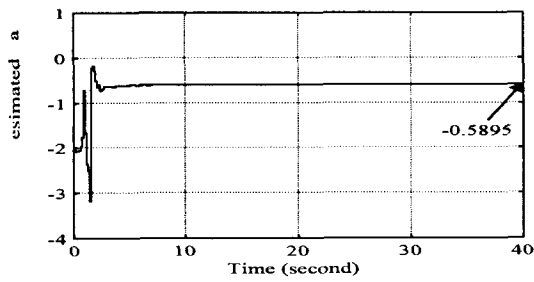
(b) \hat{b}

그림 5 $P_a(0)=3$, $P_b(0)=0.23$ 인 경우 확장칼만필터의 계수 추정 결과

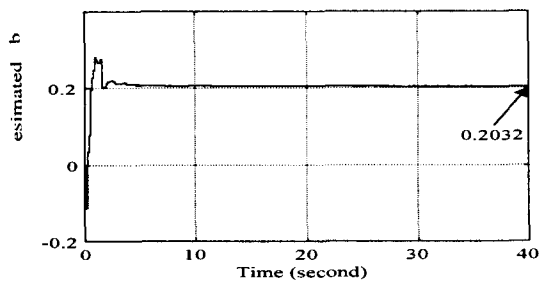
Fig. 5 Estimation results of the EKF for $P_a(0)=3$, $P_b(0)=0.23$

여러 가지 경우의 시뮬레이션을 통하여 확장칼만필터는 계수의 초기조건에 대해 민감하여 편향된 추정값으로 수렴하거나 발산하는 반면 제안된 알고리즘은 거의 영향을 받지 않고 실제값으로 수렴한다는 사실을 확인하였다.

참 고 문 헌



(a) \hat{a}



(b) \hat{b}

그림 6 제안된 알고리즘의 계수 추정 결과
Fig. 6 Estimation results of the proposed algorithm

4. 결 론

본 논문에서는 연속의 비선형 시스템과 이산 선형 및 비선형 측정치에 적용가능한 계수 추정 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 상태변수 추정에는 확장칼만필터를 사용하고 계수 추정에는 순환예측오차법을 비선형 시스템에 적용가능하도록 확장한 것이다. 이를 추정식이 선형과 비선형으로 주어지는 비선형 시스템의 계수 추정에 적용하여 공정잡음과 측정잡음이 포함된 경우에도 그 결과가 실제값에 수렴함을 확인하였다. 그리고 계수의 공분산 초기값을 변화시킬 경우 확장칼만필터는 추정값이 편향되어 나타나거나 발산하는 경우도 있으나 제안된 알고리즘은 거의 영향을 받지 않음을 알 수 있었다.

추후연구방향은 알고리즘의 수렴성 및 안정성의 해석과 측정치를 얻는 샘플링 시간에 따른 수렴속도의 영향을 분석하는 것이다.

이 논문은 1993년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었습.

- [1] L. Ljung, "Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for Linear system," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 24, No. 1, pp. 36-50, 1979.
- [2] D. T. Gavel and S. G. Azevedo, "Identification of continuous time systems -An application of Ljung's corrected extended Kalman filter," presented at the Sixth IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, USA, June 1982.
- [3] W. Jakoby and M. Pandit, "A Prediction-error-method for recursive identification of nonlinear systems," Automatica, Vol. 23, No. 4, pp. 491-496, 1987.
- [4] A. H. Jazwinski, Stochastic Process and Filtering Theory, New York: Academic Press, 1970.
- [5] L. Ljung and T. Söderström, Theory and Practice of Recursive Identification, M.I.T. Press, MA., 1983.
- [6] R. K. Mehra and J. S. Tyler, "Case Studies in Aircraft Parameter Identification," Proc. 3rd IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation, The Hague, pp. 117-145, 1973.
- [7] D. G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, New York: John Wiley & Sons, 1969.

저 자 소 개



이 달 호 (李達鎬)

1959년 7월 20일 생. 1982년 서울대 제어계측공학과 졸업. 1992년 동 대학원 졸업 (공학). 1992년~현재 경원대학교 조교수. 1997년~1998년 USC 교환교수.
Tel : (0342) 750-5320
E-mail : dhlee@mail.kyungwon.ac.kr



성 상 만 (成相萬)

1970년 8월 16일 생. 1993년 서울대 제어계측공학과 졸업. 1995년 동 대학원 석사과정 졸업. 1995년~현재 서울대 전기공학부 대학원 박사과정.
Tel : (02) 872-8290
E-mail : ssm@asrignc3.snu.ac.kr