시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성에 관한 연구

論 文
48A - 5 - 18

A Study on Robust Stability of Uncertain Linear Systems with Time-delay

李 喜 松* · 馬 三 善** · 柳 正 雄*** · 金 鎭 勳§
(Hee-Song Lee* · Sam-Sun Ma** · Jeong-Woong Ryu*** · Jin-Hoon Kim§)

Abstract - In this paper, we consider the robust stability of uncertain linear systems with time-delay in the time domain. The considered uncertainties are both the unstructured uncertainty which is only known its norm bound and the structured uncertainty which is known its structured. Based on Lyapunov stability theorem and H_∞ theory known as Strictly Bounded Real Lemma (SBRL), we present new conditions that guarantee the robust stability of systems. Also, we extend this to multiple time-varying delays systems and large-scale systems, respectively. Finally, we show the usefulness of our results by numerical examples.

Key Words : Time-delay, uncertainty, Lyapunov stability, Strictly Bounded Real Lemma (SBRL)

1. 서 론

일반적으로 제어기를 설계할 때, 수학적 모델과 실제 시스템간에는 피할 수 없는 차이가 발생한다. 이러한 차이의 대표적인 것으로 불확정성과 시간지연을 생각할 수 있다. 주로 시스템 모델링 과정의 근사화, 환경에 따른 시스템의 변화, 외부 노이즈 및 외란 등에 의한 불확정성[1]과 수송지연, 센서의 측정시간 또는 컴퓨터 상의 계산시간지연 등에서 기인된 시간지연[2]은 이들이 시스템에 포함될 경우 그 시스템의 성능 저하뿐만 아니라 시스템의 안정성까지도 보장하지 못하는 경우가 일반적이다. 따라서 최근에 불확정성과 시간지연을 갖는 시스템의 안정성을 보장하는 강인 안정성(robust stability) 문제의 연구가 계속되고 있다[4]-[11]. 시간지연을 갖는 시스템은 지연의 크기에 대한 정보의 포함 유무에 따라 크게 시간지연 종속(time-delay dependent)판별과 시간지연 독립(time-delay independent)판별로 나눌 수 있다. 주로 Razumikhin형 이론 접근법을 이용하여 해석하는 시간지연 종속판별은 지연의 크기에 대한 정확한 상한을 얻는 데 용이한 판별법이고 Lyapunov 이론 접근법을 주로 이용하는 시간지연 독립판별은 지연의 크기에 상관없이 임의의 시간지연에 대한 해석을 하는 판별법이다. [4],[6]에서는 상태변환과 Razumikhin형 이론 접근법을 통해 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성을 보장하는 조건을 제시하였고, [5],[7],[8]에서는 Lyapunov 안정성 이론 접근법을 통해 비구조적 불확정성과 구조적 불확정성을 갖는 시간지연 선형 시스템의 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 상한(upper bound)을 구하였다.

또한 [9]-[11]에서는 화학공정이나 전력, 네트워크, 교통망 분야 등에서 볼 수 있는 대규모 시간지연 시스템의 안정성 해석을 하였다. 대규모 시스템은 다수의 연관된 보조시스템으로 이루어져 있기 때문에 시스템의 내부구조가 크고 복잡하며 변수가 많은 시스템이다. 따라서 불확정성이나 시간지연의 발생 요인이 많기 때문에 이들 대규모 시스템의 강인 안정성에 관한 연구가 많이 진행되고 있다. [9]에서는 matrix measure와 comparison 이론을 이용하여 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 시스템의 강인 안정성을 보장하는 시간지연의 상한값을 구하는 조건을 제시하였다. 그리고 [10]에서는 Lyapunov 안정성 이론 접근법을 이용하여 대규모 시스템의 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 상한값을 구하는 조건을 제시하였고 이의 결과를 향상시킨 [11]의 결과가 최근에 연구되었다.

본 논문에서는 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템과 대규모 시간지연 선형 시스템의 강인 안정성을 다룬다. 고려된 불확정성은 비구조적 불확정성과 구조적 불확정성을 다루었고 시간지연은 지연에 대한 정보를 포함하지 않는 시간지연 독립을 대상으로 해석한다. 주요 결과에서는 Lyapunov 안정성 이론과 Strictly Bounded Real Lemma (SBRL)로 알려진 H_∞ 이론을 바탕으로 강인 안정성을 보장하는 새로운 조건들을 각각 제시한다. 특히 제시된 조건들은 이전 결과들에서 이용된 상태변환 행렬을 구하거나 Lyapunov 방정식을 푸는 과정을 거치지 않고 보다 간단하게 결과를 얻어낼 수 있다. 또한 대규모 시간지연 시스템 해석 시에 주로 이용되어 온 M-행렬이나 matrix measure를 이용하지 않고 보다 간단

* 準 會 員 : 忠北大 大學院 電氣工學科 博士課程
** 準 會 員 : 忠北大 大學院 電氣工學科 博士修了
*** 正 會 員 : 忠北大 工大 電氣工學科 敎授 · 工博
§ 正 會 員 : 忠北大 工大 制御計測工學科 助敎授 · 工博
接受日字 : 1998년 12월 17일
最終完了 : 1999년 3월 19일

하게 결과를 얻어낼 수 있다. 마지막으로 수치예제를 통하여 얻어진 결과의 유용성과 더불어 이전 결과보다의 우수성을 보인다.

이 논문에서 사용되는 기호 및 약어는 다음과 같다. $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고 대칭(symmetric)행렬 X에 대하여 $X>0$ 또는 $X\geq 0$는 각각 행렬 X가 양확정(positive definite), 준양확정(semi positive definite)행렬임을 나타낸다. 그리고 $\|\cdot\|_i$는 $i=1,2,\infty$에 대한 벡터 노옴 또는 이의 유사(induced)행렬을 말하며 $\|G(s)\|_\infty=\sup_{w\in R}\sigma_{\max}[G(jw)]$이다. 끝으로, I_n은 $n\times n$ 항등(identity)행렬이다.

2. 문제 기술

다음으로 기술되는 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+E(t)x(t-\tau) \tag{1}$$

여기서 $x(t)\in R^n$은 상태이고 $A\in R^{n\times n}$는 안정한 행렬이며 $\tau>0$은 임의의 알려지지 않은 시간지연을 나타낸다. 그리고 $E(t)\in R^{n\times n}$는 시변 불확정성으로 다음에 오는 비구조적 불확정성과

$$\|E(t)\|\leq\eta \tag{2}$$

다음의 구조적 불확정성을

$$E(t)=\sum_{p=1}^{M}k_p(t)E_p \tag{3}$$

고려한다. 여기서 η는 양의 상수이고 $E_p\in R^{n\times n}$는 알려진 상수 행렬이며 $k_p(t)$는 불확정성을 나타내는 시변 함수이다.

다음의 보조정리들은 앞으로 제시되는 주요 결과들의 증명에 이용된다.

보조정리1[13] : 임의의 행렬 X, Y에 대하여 다음이 성립한다.

$$\|XY\|_i\leq\|X\|_i\cdot\|Y\|_i\ ,\quad i=1,2,\infty \tag{4}$$

보조정리2[13] : 임의의 두 행렬 X, Y와 양의 스칼라 $\varepsilon>0$에 대하여 다음이 성립한다.

$$X^TY+Y^TX\leq\varepsilon X^TX+\frac{1}{\varepsilon}Y^TY \tag{5}$$

보조정리3[12] : 행렬 A가 안정할 때, 다음의 Riccati 방정식

$$A^TP+PA+PBB^TP+C^TC<0 \tag{6}$$

의 해 대칭 양확정 행렬 $P\in R^{n\times n}$가 존재 할 필요충분조건은 다음의 부등식

$$\|C(sI_n-A)^{-1}B\|_\infty<1 \tag{7}$$

을 만족하는 것이다. 여기서 $rank[C^TC]=n$이다.

3. 주요 결과

이 장에서는 본 논문의 주요 정리가 제시된다. 먼저 3.1에서는 식(1)로 기술되는 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성을 보장하는 새로운 조건을 제시하고 3.2에서는 다중 시변 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성을 해석한다. 그리고 3.3에서는 대규모 시간지연 시스템의 강인 안정성을 보장하는 조건을 제시한다.

3.1 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성

다음의 정리1은 노옴 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성(2)를 갖는 시간지연 시스템(1)의 강인 안정성 조건을 만족하는 불확정성의 상한을 나타내는 조건이다.

정리1 : 불확정성(2)를 갖는 시간지연 선형 시스템(1)에서 A는 안정하다고 하자. 만약 다음을 만족하면

$$\eta<\frac{1}{\|(sI_n-A)^{-1}\|_\infty} \tag{8}$$

시간지연 시스템(1)은 점근적으로 안정하다.

증명 : 조건식(8)로부터

$$\|(sI_n-A)^{-1}\eta I_n\|_\infty<1 \tag{9}$$

이므로 보조정리3에 의해 다음을 만족하는 대칭 양확정 행렬 $P=P^T>0$가 항상 존재한다.

$$A^TP+PA+\eta^2PP+I_n<0 \tag{10}$$

그리고 시스템(1)의 Lyapunov 후보 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$V(x)=x^T(t)Px(t)+\int_{t-\tau}^{t}x^T(s)x(s)ds \tag{11}$$

여기서 대칭 양확정 행렬 P는 식(10)의 해이다.

시스템(1)의 궤적에 따른 이의 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\dot{V}(x) = x^T(t)[A^TP + PA]x(t) + x^T(t-\tau)E^T(t)Px(t) + x^T(t)PE(t)x(t-\tau) + x^T(t)x(t) - x^T(t-\tau)x(t-\tau) \tag{12}$$

다시 보조정리2를 이용해 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{V}(x) = x^T(t)[A^TP + PA]x(t) + x^T(t)PE(t)E^T(t)Px(t) + x^T(t-\tau)x(t-\tau) + x^T(t)x(t) - x^T(t-\tau)x(t-\tau) \tag{13}$$

관계식 (10)을 이용해서 이를 다시 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^T(t)[A^TP + PA + PE(t)E^T(t)P + I_n]x(t) \\ &\le x^T(t)[A^TP + PA + \|E(t)E^T(t)\|PP + I_n]x(t) \\ &\le x^T(t)[A^TP + PA + \eta^2PP + I_n]x(t) \\ &< 0, \ \ \forall x(t) \ne 0.\end{aligned} \tag{14}$$

따라서, Lyapunov 안정성 이론에 의해 조건식(8)을 만족하면 비구조적 불확정성(2)을 갖는 시간지연 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다. ■

다음의 정리2는 구조적 불확정성(3)을 갖는 시간지연 시스템(1)의 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 상한을 나타내는 조건이다.

정리2 : 불확정성(3)을 갖는 시간지연 선형 시스템(1)에서 A 는 안정하다고 하자. 만약 다음을 만족하면

$$\sum_{p=1}^{M} k_p^2(t) < \frac{1}{\|(sI_n - A)^{-1}(\sum_{p=1}^{M} E_pE_p^T)^{\frac{1}{2}}\|_\infty^2} \tag{15}$$

시간지연 시스템(1)은 점근적으로 안정하다.

증명 : 다음에 오는 구조적 불확정성 부등식 관계를 이용하여

$$E(t)E^T(t) \le \sum_{p=1}^{M} k_p^2(t) \sum_{p=1}^{M}(E_pE_p^T) \tag{16}$$

정리1의 증명과 같은 방법으로 하면 쉽게 되므로 자세한 것은 생략한다. ■

3.2 다중 시변 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성

다음으로 기술되는 다중 시변 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{k=1}^{N} E_k(t)x(t-\tau_k(t)) \tag{17}$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 은 상태이고 $A \in R^{n\times n}$ 는 안정한 행렬이며 $\tau_k(t)$ 는 다음을 만족하는 시변 시간지연이다.

$$\begin{aligned}&0 \le \tau_k(t) \le \tau_k < \infty, \quad h_k = \max(\dot{\tau}_k(t)), \\ &\dot{\tau}_k(t) \le h_k < 1, \quad k = 1, 2, \cdots, N,\end{aligned} \tag{18}$$

그리고 $E_k(t) \in R^{n\times n}$ 는 시변 불확정성으로 다음에 오는 노옴 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성을 고려한다.

$$\|E_k(t)\| \le \eta_k \tag{19}$$

다음에 오는 정리3은 비구조적 불확정성(19)를 갖는 다중 시변 시간지연 선형 시스템(17)의 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 상한을 나타내는 조건이다.

정리3 : 불확정성(19)를 갖는 시간지연 선형 시스템(17)에서 A 는 안정하다고 하자. 만약 다음을 만족하면

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(1-h_k)} \eta_k^2 < \frac{1}{N \cdot \|(sI_n - A)^{-1}\|_\infty^2} \tag{20}$$

다중 시변 시간지연 시스템(17)은 점근적으로 안정하다.

증명 : 조건식(20)으로부터

$$\|\sqrt{N}(sI_n - A)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(1-h_k)} \eta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\|_\infty < 1 \tag{21}$$

이므로 보조정리3에 의해 다음을 만족하는 대칭 양확정 행렬 $P = P^T > 0$가 항상 존재한다.

$$A^TP + PA + P\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(1-h_k)} \eta_k^2\right)P + NI_n < 0 \tag{22}$$

그리고 시스템(17)의 Lyapunov 후보 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$V(x) = x^T(t)Px(t) + \sum_{k=1}^{N} \int_{t-\tau_k(t)}^{t} x^T(s)x(s)ds \tag{23}$$

여기서 대칭 양확정 행렬 P 는 식(22)의 해이다.

시스템(17)의 궤적에 따른 이의 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\dot{V}(x) = x^T(t)[A^TP + PA]x(t) + \sum_{k=1}^{N} x^T(t-\tau_k(t))E_k^T(t)Px(t)$$

$$+x^T(t)P\sum_{k=1}^{N}E_k(t)x(t-\tau_k(t))$$
$$+\sum_{k=1}^{N}x^T(t)x(t)-\sum_{k=1}^{N}(1-\dot{\tau}_k(t))x^T(t-\tau_k(t))x(t-\tau_k(t)) \tag{24}$$

그리고 보조정리2와 관계식 (18)과 (21)을 이용해서 이를 다시 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &\le x^T(t)\left[A^TP+PA+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(1-h_k)}PE_k(t)E_k^T(t)P+NI_n\right]x(t)\\ &\le x^T(t)\left[A^TP+PA+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(1-h_k)}\|E_k(t)E_k^T(t)\|PP+NI_n\right]x(t)\\ &\le x^T(t)\left[A^TP+PA+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(1-h_k)}\eta_k^2PP+NI_n\right]x(t)\\ &<0,\ \forall x(t)\ne 0.\end{aligned} \tag{25}$$

따라서, Lyapunov 안정성 이론에 의해 조건식(20)을 만족하면 불확정성(19)를 갖는 다중 시간지연 불확정성 시스템 (17)은 점근적으로 안정하다. ■

3.3 대규모 시간지연 시스템의 강인 안정성

다음 N개의 연관된 보조시스템(subsystems) S_i로 구성되어 있는 불확정성 대규모 시간지연 시스템 S을 고려하자. 각 보조 시스템은 다음과 같이 기술된다.

$$S_i:\ \dot{x}_i(t)=(A_i+E_i(t))x_i(t)+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}(x_j(t-\tau_{ij})),\quad i=1,2,\cdots N, \tag{26}$$

여기서 $x_i(t)\in R^{n_i}$는 보조시스템 S_i의 상태이고 A_i는 안정한 행렬이며 $A_{ij}\in R^{n_i\times n_j}$는 상수 행렬이다. 그리고 $\tau_{ij}>0$는 임의의 알려지지 않은 시간지연을 나타내고 $E_i(t)\in R^{n_i\times n_i}$은 시변 불확정성 행렬로 다음에 오는 비구조적 불확정성과

$$\|E_i(t)\|\le\eta_i,\quad i=1,2,\cdots,N, \tag{27}$$

다음의 구조적 불확정성을

$$E_i(t)=\sum_{p=1}^{M}k_{ip}(t)E_{ip},\quad i=1,2,\cdots,N, \tag{28}$$

대상으로 한다. 여기서 η_i는 양의 상수이고 $E_{ip}\in R^{n_i\times n_i}$는 알려진 상수 행렬이며 $k_{ip}(t)$는 불확정성을 나타내는 시변 함수이다.

다음의 정리4는 비구조적 불확정성(27)을 갖는 대규모 시간지연 시스템(26)의 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 상한을 나타내는 조건이다.

정리4 : 불확정성(27)을 갖는 대규모 시간지연 시스템(26)에서 A_i는 안정하다고 하자. 만약 다음을 만족하면

$$\eta_i<\sqrt{\frac{1}{\|(sI_n-A_i)^{-1}(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}A_{ij}^T+I_n)^{\frac{1}{2}}\|_\infty^2}-N},\quad i=1,2,\cdots,N, \tag{29}$$

대규모 시스템(26)은 점근적으로 안정하다.

증명 : 조건식(29)로부터

$$\|(\eta_i^2I_n+NI_n)^{\frac{1}{2}}(sI_n-A_i)^{-1}(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}A_{ij}^T+I_n)^{\frac{1}{2}}\|_\infty<1,\quad i=1,2,\cdots,N, \tag{30}$$

이므로 보조정리3으로부터 다음을 만족하는 대칭 양확정 행렬 $P_i=P_i^T>0$가 항상 존재한다.

$$P_iA_i+A_i^TP_i+P_iP_i+\sum_{j=1}^{N}P_iA_{ij}A_{ij}^TP_i+\eta_i^2I_n+NI_n<0,\quad i=1,2,\cdots,N, \tag{31}$$

그리고 시스템(26)의 Lyapunov 후보함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V=\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^T(t)P_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{N}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}x_j^T(s)x_j(s)ds\right) \tag{32}$$

여기서 대칭 양확정 행렬 P_i는 식(31)의 해이다.

시스템(26)의 궤적에 따른 이의 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}=\sum_{i=1}^{N}\Big[&x_i^T(t)A_i^TP_ix_i(t)+x_i^T(t)P_iA_ix_i(t)+x_i^T(t)E_i^T(t)P_ix_i(t)\\ &+x_i^T(t)P_iE_i(t)x_i(t)+\Big\{\sum_{j=1}^{N}x_j^T(t-\tau_{ij})A_{ij}^T\Big\}P_ix_i(t)\\ &+x_i^T(t)P_i\Big\{\sum_{j=1}^{N}A_{ij}x_j(t-\tau_{ij})\Big\}\\ &+\sum_{j=1}^{N}\{x_j^T(t)x_j(t)-x_j^T(t-\tau_{ij})x_j(t-\tau_{ij})\}\Big]\end{aligned} \tag{33}$$

그리고 보조정리2를 이용해서 식을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}=\sum_{i=1}^{N}\Big[&x_i^T(t)\{A_i^TP_i+P_iA_i+E_i^T(t)P_i+P_iE_i(t)\}x_i(t)\\ &+\sum_{j=1}^{N}\{x_j^T(t-\tau_{ij})x_j(t-\tau_{ij})+x_i^T(t)P_iA_{ij}A_{ij}^TP_ix_i(t)\}\\ &+\sum_{j=1}^{N}\{x_j^T(t)x_j(t)-x_j^T(t-\tau_{ij})x_j(t-\tau_{ij})\}\Big]\end{aligned} \tag{34}$$

또한 관계식(31)을 이용해 다시 정리하면 다음이 된다.

$$\dot{V} \le \sum_{i=1}^{N}\Big[x_i^T(t)\{P_iA_i + A_i^TP_i + P_iP_i + \eta_i^2 I_n + NI_n\}x_i(t) + \sum_{j=1}^{N} x_j^T(t)\, P_iA_{ij}^TA_{ij}P_ix_j(t)\Big]$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\Big[x_i^T(t)\Big\{P_iA_i + A_i^TP_i + P_i\big(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^TA_{ij} + I_n\big)P_i + \eta_i^2 I_n + NI_n\}x_i(t)\Big]$$
$$<0,\ \ \forall x_i(t) \ne 0. \tag{35}$$

따라서, Lyapunov 안정성 이론에 의해 정리4의 조건식(29)를 만족하면 시간지연 대규모 시스템(26)은 점근적으로 안정하다. ■

다음에 오는 정리5는 구조적 불확정성(28)을 갖는 대규모 시간지연 시스템(26)의 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 상한을 나타내는 조건이다.

정리5 : 불확정성(28)을 갖는 대규모 시간지연 시스템(26)에서 A_i는 안정하다고 하자. 만약 다음을 만족하면

$$\Big\|\Big(\sum_{p=1}^{M}k_{ip}^2(t)\sum_{p=1}^{M}(E_{ip}^TE_{ip}) + NI_n\Big)^{\frac{1}{2}}(sI_n - A_i)^{-1} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}A_{ij}^T + I_n\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_\infty < 1,$$
$$i = 1, 2, \cdots, N, \tag{36}$$

대규모 시간지연 시스템(26)은 점근적으로 안정하다.

증명 : 다음에 오는 구조적 불확정성 부등식 관계들을 이용하여

$$E_i^T(t)E_i(t) \le \sum_{p=1}^{M}k_{ip}^2(t)\sum_{p=1}^{M}(E_{ip}^TE_{ip}) \tag{37}$$

정리4의 증명과 같은 방법으로 하면 쉽게 되므로 자세한 것은 생략한다. ■

4. 수치 예제

예제1.

위에서 제시된 정리1의 유용성을 보이기 위해 잘 알려진 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템을 생각하자[3]-[8].

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + E(t)x(t-\tau) \tag{38}$$

여기서 $\tau > 0$은 임의의 알려지지 않은 시간지연을 나타내고 $E(t)$는 노옴 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성이다.

정리1에서 유도된 조건식(8)을 만족시키는 불확정성의 상한값을 얻기 위하여 MATLAB™을 이용하여 얻어진 결과가 표 1에 있다.

표 1 비구조적 불확정성의 바운드(I)

Table 1 Bounds for unstructured uncertainty(I)

	결과값	비고
Chen and Han [3]	$\eta<0.4495$	지연 없음
Cheres *et al.* [4]	$\eta<0.1780$	상태 변환
Trinh and Aldeen [5]	$\eta<0.3940$	상태 변환
Xu and Liu [6]	$\eta<0.3819$	Lyapunov 방정식
Trinh and Aldeen [7]	$\eta<0.5245$	Lyapunov 방정식
Kim [8]	$\eta<0.5402$	Lyapunov 방정식
Our result	$\eta<0.5402$	

표 1에서는 기존의 연구 결과들과 본 논문의 결과를 기술하였다. 주로 상태 변환 행렬이나 Lyapunov 방정식의 해를 풀어야 하는 기존의 결과들보다 본 논문의 결과값이 같거나 더 향상된 불확정성의 상한값을 얻을 수 있음을 알 수 있었다. 특히 [8]에서는 Lyapunov 방정식의 해를 구하기 위해 적당한 행렬 Q를 선정해야 하는 어려움이 있다. 또한 Chen 등[3]에서 주어진 STOL 비행기를 고려하자. 시스템(41)의 안정한 행렬 A는 다음과 같다[3],[7].

$$A = \begin{bmatrix} -0.201 & 0.755 & 0.351 & -0.075 & 0.033 \\ -0.149 & -0.696 & -0.160 & 0.110 & -0.048 \\ 0.081 & 0.004 & -0.189 & -0.003 & 0.001 \\ -0.173 & 0.802 & 0.251 & -0.804 & 0.056 \\ 0.092 & -0.467 & -0.127 & 0.075 & -1.162 \end{bmatrix}$$

마찬가지로 정리1에서 유도된 조건식(8)을 만족시키는 불확정성의 상한값을 표 2에 나타내었다.

표 2 비구조적 불확정성의 바운드(Ⅱ)

Table 2 Bounds for unstructured uncertainty(Ⅱ)

	결과값
Chen and Han [3]	$\eta<0.0929$
Trinh and Aldeen [7]	$\eta<0.1060$
Our result	$\eta<0.1116$

표 1,2에서 알 수 있듯이 제시된 결과값이 이전 논문의 결과값보다 우수한 것을 볼 수 있었다. 특히 이전 논문에서 이용한 상태 변환[4],[5]이나 Lyapunov 방정식을 푸는 [6],[7],[8] 과정없이 간단히 결과값을 구할 수 있었다.

예제2

정리3에서 제시된 결과의 유용성을 보이기 위해 다음에 기술되는 다중 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템을 생각하자.[7]

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + E_1(t)(t - \tau_1(t))$$

$$+E_2(t)x(t-\tau_2(t)) \tag{39}$$

여기서 $\|E_k(t)\| \leq \eta_k$이고 시변 시간지연 $\tau_k(t)$, $k=1,2$은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \tau_1(t) &= \tau_1 + 0.25\sin(t) \\ \tau_2(t) &= \tau_2 + 0.25\cos(t) \end{aligned} \tag{40}$$

모든 $\tau_k(t) \geq 0, \forall k$이므로 $\tau_k \geq 0.25$가 된다. 따라서 $\tau_k(t)$의 미분값은 $\dot{\tau}_k(t) \leq 0.25$이고 $h_k = 0.25$가 된다. 조건식(20)을 만족시키는 η_k의 상한값을 MATLAB™을 이용하여 구한 결과값이 표 3에 있다.

표 3 다중 시변 시간지연 비구조적 불확정성의 바운드
Table 3 Bounds for unstructured uncertainty of multiple time-varying delay systems

	결과값
Trinh and Aldeen [7]	$\eta_1 + \eta_2 < 0.0893$
Our result	$\eta_1 + \eta_2 < 0.1094$

위 결과값은 만약 불확정성 η_1과 η_2가 원점으로부터 반지름 0.3308 ($\sqrt{0.1094}$)을 가진 원의 1사분면 안에 선택된다면 시스템은 점근적으로 안정하다는 것을 의미한다.

예제3
정리4,5에서 제시된 결과들의 유용성을 보이기 위해 다음과 같은 대규모 시간지연 시스템을 고려한다[10][11].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \left(\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} + E_1(t)\right)x_1(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_1(t-\tau_{11}) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} x_2(t-\tau_{12}) + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} x_3(t-\tau_{13}) \\ \dot{x}_2(t) &= \left(\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} + E_2(t)\right)x_2(t) + \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} x_1(t-\tau_{21}) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_2(t-\tau_{22}) + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} x_3(t-\tau_{23}) \\ \dot{x}_3(t) &= \left(\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + E_3(t)\right)x_3(t) + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} x_1(t-\tau_{31}) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} x_2(t-\tau_{32}) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_3(t-\tau_{33}) \end{aligned} \tag{41}$$

먼저 불확정성 $E_i(t)$가 노옴 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성이라 하자. 제시된 정리4에서의 조건식(29)를 만족시키는 최대 η_i값을 MATLAB™을 이용하여 이를 구하면 다음 표 4와 같은 결과 값을 얻을 수 있다.

표 4 대규모 시간지연 시스템의 비구조적 불확정성 바운드
Table 4 Bounds for unstructured uncertainty of large-scale time-delay systems

	η_1	η_2	η_3
Wang *et al.*[10]	0.3117	0.5833	0.3117
Schoen *et al.*[11]	0.6336	0.6700	0.2850
Our results	0.7453	0.7838	0.3727

다음으로 불확정성 $E_i(t)$가 다음과 같이 기술되는 구조적 불확정성이라 하자.

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \sum_{p=1}^{3} k_{1p}(t)E_{1p} \\ &= k_{11}(t)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + k_{12}(t)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + k_{13}(t)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ E_2(t) &= \sum_{p=1}^{3} k_{2p}(t)E_{2p} \\ &= k_{21}(t)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + k_{22}(t)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_{23}(t)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ E_3(t) &= \sum_{p=1}^{3} k_{3p}(t)E_{3p} \\ &= k_{31}(t)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_{32}(t)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + k_{33}(t)\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{42}$$

제시된 정리5에서의 조건식(36)을 만족시키는 불확정성의 상한값을 MATLAB™을 이용하여 구하면 다음에 오는 표 5와 같다.

표 5 대규모 시간지연 시스템의 구조적 불확정성 바운드
Table 5 Bounds for structured uncertainty of large-scale time-delay systems

	$\sum_{p=1}^{M} k_{1p}^2(t)$	$\sum_{p=1}^{M} k_{2p}^2(t)$	$\sum_{p=1}^{M} k_{3p}^2(t)$
Wang *et al.*[10]	0.0091	0.0432	0.0092
Our results	0.0367	0.0659	0.0105

표 4와 5에서 보면 기존의 연구에서 많이 사용된 M-행렬이나 matrix measure를 이용하지 않고 본 논문에서 제시된 조건을 이용하여 구한 불확정성의 상한값이 이전 논문의 값보다 우수함을 알 수 있었다.

5. 결 론

본 논문에서는 시간지연을 갖는 불확정성 시스템의 강인안정성에 관한 연구를 하였다. 고려된 불확정성은 비구조적 불확정성과 구조적 불확정성이고 시간지연은 시간지연 독립판별을 대상으로 하였다. 주요결과에서는 Lyapunov 안정성

이론과 H_∞ 이론을 바탕으로 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성을 보장하는 새로운 조건을 제시하였다. 특히 이전 논문에서 이용하였던 상태변환이나 Lyapunov 방정식을 풀지 않고 보다 간단하게 결과를 얻어낼 수 있었다. 또한 다중 시변 시간지연 시스템과 대규모 시간지연 시스템도 고려하여 각각의 강인 안정성을 보장하는 조건을 구하였다. 마지막으로 수치예제에서는 MATLAB™을 이용해 그 얻어진 결과의 유용성과 더불어 이전 결과 값보다 우수성을 보였다.

참 고 문 헌

[1]P. P. Khargonekar, I. R. Petersen and K. Zhou, "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H_∞ Control Theory", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol.35, pp.356-361. 1990.

[2]T. Mori and H. Kokame, "Stability of $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau)$", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol.34, pp.460-462, 1989.

[3]H.-G. Chen and K.-W. Han, "Improved Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol.39, no.4, pp.807-810, 1994.

[4]E. Cheres, Z. J. Palmor and S. Gutman, "Quantitative Measures of Robustness for Systems Including Delayed Perturbations", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol.34, no.11, pp.1203-1204, 1989.

[5]H. Trinh and M. Aldeen, "On the Stability of Linear Systems with Delayed Perturbations", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol.39, no.9, pp.1948-1951, 1994.

[6]B. Xu and Y. Liu, "An Improved Razumikhin-Type Theorem and Its Applications", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol.39, no.4, pp.839-841, 1994.

[7]H. Trinh and M. Aldeen, "Stability Robustness Bounded for Linear Systems with Delayed Perturbations", *IEE. Proc-Control Theory Appl.*, vol.142, no.4, pp.345-350. 1995.

[8]J. H. Kim, "Robust Stability of Linear Systems with Delayed Perturbations", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol.41, no.12, pp.1820-1822, 1996.

[9]J.-T. Ysay, P.-L. Liu and T.-J. Su, "Robust Stability for Perturbed Large-scale Time-delay Systems", *IEE. Proc-Control Theory Appl.*, vol.143, no.3, pp.233-236. 1996.

[10]W. J. Wang, C. C. Song and C. C. Kao, "Robustness Bounds for Large-scale Time-delay Systems with Structured and Unstructured uncertainties", *Int. J. Systems Science*, vol.22, no.1, pp.209-216, 1991.

[11]G. M. Schoen and H. P. Geering, "A note robustness bounds for large-scale time-delay systems", *Int. J. Systems Science*, vol. 26, no.12, pp.2441-2444, 1995.

[12]I. R. Petersen, "Guaranteed cost LQG control of uncertain linear systems", *IEE. Proc-Control Theory Appl.*, vol.142, no.2, pp.95-102. 1995.

[13]A. Wienmann, "*Uncertain Models and Robust Control*", Springer-Verlag. 1991.

저 자 소 개

이 희 송 (李 喜 松)

1974년 10월 20일생. 1997년 대전산업대 제어계측공학과 졸업. 1999년 충북대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 동 대학원 전기공학과 박사과정.

Tel : (0431) 261-2387
E-mail : heeslee@trut.chungbuk.ac.kr

마 삼 선 (馬 三 善)

현재 충북대 대학원 전기공학과 박사수료. 현재 한국전력공사 선임연구원

Tel : (0431) 261-2387
E-mail : samsunma@kepri.re.kr

유 정 웅 (柳 正 雄)

전기학회논문지 47권 6호 참조

Tel : (0431) 261-2422
E-mail : jwryu@engine.chungbuk.ac.kr

김 진 훈 (金 鎭 勳)

전기학회논문지 48A권 1호 참조.