

선형 행렬 부등식을 이용한 준최적 강인 칼만 필터의 설계

論 文
48A - 5 - 11

Design of Suboptimal Robust Kalman Filter via Linear Matrix Inequality

陳 承 熙* 尹 泰 星** 朴 珍 培***
(Seung-Hee Jin · Tae-Sung Yoon · Jin-Bae Park)

Abstract - This paper formulates the suboptimal robust Kalman filtering problem into two coupled Linear Matrix Inequality (LMI) problems by applying Lyapunov theory to the augmented system which is composed of the state equation in the uncertain linear system and the estimation error dynamics. This formulations not only provide the sufficient conditions for the existence of the desired filter, but also construct the suboptimal robust Kalman filter. The proposed filter can guarantee the optimized upper bound of the estimation error variance for uncertain systems with parametric uncertainties in both the state and measurement matrices. In addition, this paper shows how the problem of finding the minimizing solution subject to Quadratic Matrix Inequality (QMI), which cannot be easily transformed into LMI using the usual Schur complement formula, can be successfully modified into a generic LMI problem.

Key Words : Suboptimal Robust Kalman Filtering, Lyapunov theory, Linear Matrix Inequality, Quadratic Matrix Inequality, Parametric Uncertainties.

1. 서 론

칼만 필터는 상태 추정 문제에 대한 해법의 하나로서 항법 장치, 추적 문제, 제어시스템의 설계 등 많은 분야에 걸쳐 지난 40년 동안 응용되어져 왔으며, 현재까지도 이에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다[2][4][7][18]. 그러나 이 기법은 플랜트의 상태변수에 영향을 주는 프로세스 잡음과 센서로부터 발생하는 측정잡음이 가우시안 백색 잡음이라고 하는 통계적 특성에 대한 가정이외에도 상태 방정식과 측정 방정식에 대한 정확한 수학적 모델을 얻을 수 있다고 하는 가정을 전제로 한다. 그러나 이 가정들은 실제 문제의 적용에 있어서 성립하지 않는 경우가 많은데[1][7][11][12], 이런 경우 기존의 칼만 필터 기법은 최적의 성능을 나타내지 못할 뿐만 아니라, 추정 오차의 발산을 나타내는 경우도 생긴다는 사실이 알려져 있다[7]. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위하여 지금까지 많은 논문이 발표되었는데, [1]에서는 강인한 성능을 나타내는 정상 상태(steady state) 칼만 이득을 계산하기 위하여 최악 잡음 공분산 개념(least favourable noise covariance concept)과 Bellman-Gronwall lemma를 사용하였고, [11]에서는 강인 칼만 필터링을 위하여 이차 안정 추정기(quadratic stable estimator)를 이용한 대수 리카티 방정식(algebraic Riccati equation) 기반의 설계 기법이 제안되었다. 최근 들어 컴퓨터 설계기술의 발전으로 인한 계산속도의 증가와 컨벡스

최적화 문제를 풀 수 있는 interior-point method와 같은 매우 효율적인 수치적 알고리즘이 개발됨에 따라 선형 행렬 부등식(Linear Matrix Inequality)은 제어 공학의 여러 분야에 걸쳐서 강력한 설계 도구로 인식되고 있는 실정이다 [5][13-16][19][20]. 칼만 필터링의 해(solution)와 관련된 이론적 연구분야에 이러한 선형 행렬 부등식을 적용한 몇몇 연구 결과들이 발표되었는데[15], 이들은 모두 공칭(nominal) 선형 시스템에 대해서만 주목하였을 뿐만 아니라, 잘 알려진 Schur complement[6][10][19]를 사용하여 쉽게 선형 행렬 부등식으로 변환할 수 있는 형태의 이차 행렬 부등식(Quadratic Matrix Inequality)을 다루고 있다. 본 논문에서는 시스템의 상태행렬과 측정행렬에 파라미터 불확실성이 있는 경우에 대한 상태 추정 문제를 다루기 위하여 추정 오차 분산에 대한 상한값을 보장하고, 허용 가능한 모든 파라미터 불확실성에 대해 강인한 상태 추정 성능을 나타내는 준최적 강인 칼만 필터를 선형 행렬 부등식을 이용하여 설계하고자 한다. 또한 추정 오차 분산의 최소 상한값은 설계과정에서 도입된 스케일링 파라미터의 컨벡스 함수로 표현되므로, 이 파라미터에 대해 최소 상한값이 다시 한번 최적화될 수 있음을 보이고, 본 논문의 전개 과정 중에 나타나는 문제로서, 일반적인 Schur complement를 사용해서는 선형 행렬 부등식으로 변환할 수 없는 형태의 이차 행렬 부등식에 대한 최소화 해를 구하는 해법을 제시한다. 본 논문에서 제안한 기법을 적용하기 위해서는 파라미터 불확실성을 포함한 선형 시분변 시스템과 오차의 동특성을 결합하여 구성된 확장 시스템(augmented system)이 안정해야 한다는 하나의 가정만을 필요로 한다. 2절에서는 준최적 강인 칼만 필터 설계 문제를 설정하고 앞의 가정으로부터 하나의 리아푸노프(Lyapunov) 부등식을 유도한 후, 이 부등식에 대한 해를 가지고 추정 오

* 正 會 員 : 延世大 電氣 및 컴퓨터工學科 博士課程

** 正 會 員 : 昌原大 電氣工學科 副教授 · 工博

*** 正 會 員 : 延世大 電氣 및 컴퓨터工學科 副教授 · 工博

接受日字 : 1998年 3月 10日

最終完了 : 1999年 3月 19日

차 분산의 상한값을 계산할 수 있음을 보인다. 3절은 본 논문의 주요 결과 부분으로서, 3.1절에서는 [17]에서 사용한 방법을 적용하여 리아푸노프 부등식과 상등(equivalent)한 부등식을 유도하고, 이 부등식이 성립하기 위한 충분조건으로서 얻어지는 두 개의 이차 행렬 부등식과 하나의 방정식을 이용하여 두 개의 상호 결합된 선형 행렬 부등식 문제를 구성한 후, 이에 대한 해를 구하여 강인 칼만 필터에 포함된 행렬들을 매개변수화한다. 또한 구성된 두 개의 선형 행렬 부등식 문제들에 대한 최소화 해를 구함으로써 추정 오차 분산의 최소 상한값을 계산하고, 아울러 이를 보장하는 준최적 강인 칼만 필터를 설계한다. 이 과정에서, 얻어진 두 개의 이차 행렬 부등식을 선형 행렬 부등식의 형태로 변형시키기 위하여 단순한 변수변환과 함께 새로운 선형 행렬 부등식 제한조건을 만족하는 또 하나의 행렬을 도입함으로써, 준최적 강인 칼만 필터의 설계 문제는 전형적인(generic) 선형 행렬 부등식 문제들[13][19]인 선형 목적 함수 최소화(linear objective minimization) 문제와 일반 고유값 최소화(generalized eigenvalue minimization) 문제로 변환될 수 있음을 보인다. 3.2절에서는 앞 절에서 얻어진 두 개의 선형 행렬 부등식 문제들의 최소화 해와 대수 리카티 방정식의 안정화 해(stabilizing solution)와의 관계를 증명하고 이를 통해 상태 추정 오차 분산의 최소 상한값은 설계과정에서 도입된 스케일링 파라미터의 컨벡스 함수로서 표현되어짐을 보이며, 선형 행렬 부등식 문제와 대수 리카티 방정식 문제 사이의 관계에 대해서 언급한다. 4절에서는 모의 실험을 통하여 불확실한 선형 시스템을 대상으로 제안된 강인 칼만 필터의 상태 추정 성능을 기존의 칼만 필터와 비교하고 이에 따른 결과를 분석해 본다.

2. 준최적 강인 칼만 필터 설계 문제

다음과 같은 선형 불확정 시스템을 고려한다.

$$(\Sigma) \dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + Bw(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1a)$$

$$y(t) = [C + \Delta C(t)]x(t) + v(t) \quad (1b)$$

$$z(t) = Lx(t) \quad (1c)$$

여기서 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 는 상태변수, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ 는 측정값, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ 는 추정하고자 하는 변수로서 상태변수의 선형 결합으로 나타나며, $w(t) \in \mathbb{R}^q$ 와 $v(t) \in \mathbb{R}^r$ 는 각각 다음과 같은 통계적 특성을 갖는 가우시안 백색(Gaussian white) 잡음으로서 프로세스 잡음과 측정 잡음을 나타낸다.

$$E[w(t)] = E[v(t)] = 0 \quad (2a)$$

$$E[w(t)w^T(\tau)] = W\delta(t-\tau), \quad W > 0 \quad (2b)$$

$$E[v(t)v^T(\tau)] = V\delta(t-\tau), \quad V > 0 \quad (2c)$$

$$E[w(t)v^T(\tau)] = E[v(t)w^T(\tau)] = 0 \quad (2d)$$

그리고 일반적으로 초기시간과 상태변수의 초기값은 $t_0 = 0, x_0 = 0$ 라 가정한다. A 와 B, C 그리고 L 은 적당

한 차원(appropriate dimension)을 가진 공칭 상수 행렬이고 $\Delta A(t)$ 와 $\Delta C(t)$ 는 시변 파라미터 불확실성을 나타내는 미지(unknown) 행렬로서, 다음과 같은 정합조건(matching condition)을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) \\ \Delta C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} F(t)E \quad (3)$$

$D_1 \in \mathbb{R}^{n \times i}, D_2 \in \mathbb{R}^{r \times i}$ 그리고 $E \in \mathbb{R}^{i \times n}$ 는 공칭 시스템에 파라미터 불확실성이 미치는 영향을 반영하는 임의의 상수 행렬이고, $F(t) \in \mathbb{R}^{i \times j}$ 는 다음의 놈 제한조건(norm constraint)을 만족하는 미지 행렬로서 파라미터의 외란을 나타내며[21],

$$\|F(t)\| \leq 1, \quad \forall t \quad (4)$$

$\|\cdot\|$ 는 행렬의 스펙트랄 놈 즉, 최대 특이값(maximum singular value)을 나타낸다.

본 논문의 목적은 선형 행렬 부등식을 이용하여, 조건 (3)과 (4)를 만족하는 모든 허용 가능한(admissible) 파라미터 불확실성에 대해 상태 추정 오차의 분산에 대한 상한값을 보장하는 준최적 강인 칼만 필터를 설계하는 것이며, 이는 다음과 같은 형태를 가정한다.

$$(\Sigma_f) \dot{\hat{x}}(t) = A_e \hat{x}(t) + K_r[y(t) - C_e \hat{x}(t)] \quad (5a)$$

$$= G_e \hat{x}(t) + K_r y(t)$$

$$\hat{z}(t) = L \hat{x}(t) \quad (5b)$$

여기서 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ 는 필터의 상태변수로서 시스템 (1)과 차수가 같은 full-order 필터를 구성하며, $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^l$ 은 $z(t)$ 의 추정치이다. 본 논문에서는 필터가 존재하기 위한 충분조건으로서 나타나는 하나의 방정식으로부터 A_e 와 C_e 를 정의하고, 두 개의 선형 행렬 부등식으로부터 구한 해를 통해 설계 파라미터인 준최적 강인 칼만 필터의 이득 K_r 을 구한다.

참고: 상태 추정기 (5)는 시스템 (1)과 상태-출력 속성(state-to-output properties)이 같은 다음 형태의 시스템에 대한 Luenberger-type observer[2][16]로 해석할 수 있다.

$$(\Sigma') \dot{x}(t) = A_e x(t) + \hat{w}(t) \quad (6a)$$

$$y(t) = C_e x(t) + \hat{v}(t) \quad (6b)$$

$$z(t) = Lx(t) \quad (6c)$$

이제, 추정 오차를 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 라 정의하고, 시스템 (Σ') 의 상태 방정식 (1a)와 오차 동특성을 결합하면 다음

과 같은 확장 시스템을 얻을 수 있다.

$$(\Sigma_a): \dot{x}_a(t) = A_{aug}x_a(t) + B_a n(t) \quad (7a)$$

$$e(t) = C_a x_a(t) \quad (7b)$$

여기서 $x_a(t) = [x^T(t) \ e^T(t)]^T$ 이고, $n(t)$ 는 단위 공분산(unity covariance) 행렬을 갖는 영평균(zero mean) 잡음 신호이며, 확장 시스템의 행렬들은 다음과 같은 구조를 가진다.

$$A_{aug} = A_a + D_a F(t) E_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - G_e - K_r C & G_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_1 - K_r D_2 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix} \quad (8a)$$

$$B_a = \begin{bmatrix} B W^{1/2} & 0 \\ B W^{1/2} & K_r V^{1/2} \end{bmatrix} \quad (8b)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad (8c)$$

그러면, 확장 시스템에 대한 H_2 성능지수는 다음과 같이 주어지며[10][13], 이는 상태 추정 오차의 분산을 나타낸다.

$$\|\Sigma_a\|_2^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T e^T(t) e(t) dt \right\} = \int_0^\infty \text{trace}[\sigma_a(t) \sigma_a^T(t)] dt = \|\sigma_a\|_2^2 \quad (9)$$

여기서 $\sigma_a(t)$ 는 Σ_a 의 컨벌루션 커널(convolution kernel)이며 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_a(t) = C_a \exp(A_{aug}t) B_a, \quad \forall t \geq 0 \quad (10)$$

위의 확장 시스템 (Σ_a)를 정의함으로써 본 논문에서 설계하고자 하는 강인 칼만 필터의 설계 문제는 다음과 같은 폐루프 시스템에 대하여 시스템 출력 분산의 상한값을 보장하도록 파라미터 A_e, C_e 그리고 K_r 을 설계하는 강인 LQG 조정(regulation) 문제로 풀이할 수 있다.

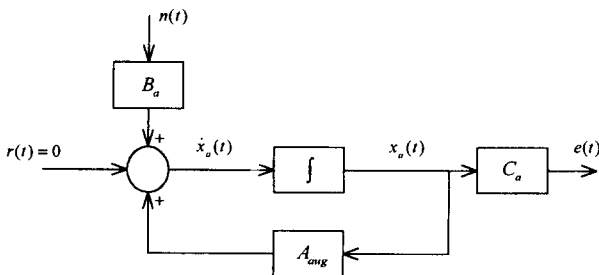


그림 1 확장 시스템 (Σ_a)에 대한 강인 LQG 조정 문제
Fig. 1 Robust LQG regulation problem for the augmented system (Σ_a)

보조정리 2.1[13]: 만일 A_{aug} 가 안정하다면, 강인 칼만 필터 (5)는 추정 오차 분산에 대해 다음과 같은 상한값을 보장할 수 있다.

$$\|\Sigma_a\|_2^2 < \text{trace}(C_a L_c C_a^T) \quad (11)$$

여기서 $L_c > 0$ 는 다음의 리아푸노프 부등식을 만족하는 행렬이다.

$$A_{aug} L_c + L_c A_{aug}^T + B_a B_a^T < 0 \quad (12)$$

증명: 만일 위의 조건이 성립한다면, 다음의 리아푸노프 방정식을 만족하는 controllability Gramian $\tilde{L}_c > 0$ 가 존재한다[10].

$$A_{aug} \tilde{L}_c + \tilde{L}_c A_{aug}^T + B_a B_a^T = 0 \quad (13)$$

위의 사실과 리아푸노프 이론에 따르면 부등식 (12)를 만족하는 행렬 L_c 가 존재함을 쉽게 알 수 있으며[4] 이 때, \tilde{L}_c 와 L_c 의 관계는 다음과 같다.

$$0 < \tilde{L}_c < L_c \quad (14)$$

식 (9)와 (10)으로부터

$$\|\Sigma_a\|_2^2 = \int_0^\infty \text{trace}[\sigma_a(t) \sigma_a^T(t)] dt = \int_0^\infty \text{trace}(C_a e^{(A_{aug}t)} B_a B_a^T e^{(A_{aug}^T t)} C_a^T) dt$$

이 성립하며, 식 (13)의 해인 (A_{aug}, B_a) 의 controllability Gramian \tilde{L}_c 는 다음과 같이 나타낼 수 있으므로

$$\tilde{L}_c = \int_0^\infty \exp(A_{aug}t) B_a B_a^T \exp(A_{aug}^T t) dt$$

H_2 성능지수는

$$\|\Sigma_a\|_2^2 = \text{trace}(C_a \tilde{L}_c C_a^T)$$

이며, 부등식 (14)의 관계로부터 (11)과 같은 상한값을 얻는다. ■

따름정리 2.2: 만일 A_{aug} 가 안정할 때 추정오차를 $e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ 라 정의하고, 이에 대한 새로운 확장 시스템을 다음과 같이 정의하면

$$(\Sigma_{az}) : \dot{x}_a(t) = A_{aug}x_a(t) + B_a n(t) \quad (15a)$$

$$e_z(t) = LC_a x_a(t) \quad (15b)$$

강인 칼만 필터 (5)는 H_2 성능지수에 대해 다음과 같은 상한값을 보장할 수 있다.

$$\|\Sigma_{az}\|_2^2 < \text{trace}(LC_a L_c C_a^T L^T) \quad (16)$$

여기서 시스템 (Σ_{az}) 의 상태변수 $x_a(t)$, 잡음 $n(t)$ 및 모든 행렬들은 앞에서 정의된 바와 같고, $L_c > 0$ 는 리아푸노프 부등식 (12)를 만족하는 행렬이다.

증명: 위와 같이 정의된 새로운 확장 시스템 (Σ_{az}) 의 임펄스 응답은 다음과 같으므로

$$\sigma_{az}(t) = LC_a \exp(A_{aug}t) B_a, \quad \forall t \geq 0$$

이를 H_2 성능지수에 대한 정의 (9)에 적용하면 보조정리 2.1에서와 같은 방법으로 쉽게 증명할 수 있다. ■

3. 주요 결과

3.1 선형 행렬 부등식 구성

시스템 제어이론의 관점에서 볼 때, 동적 시스템의 불확실성 및 그에 따른 강인성 분석, 다변수(MIMO) 시스템의 상태 피드백(state feedback) 설계, H_∞ 제어 및 필터링 문제와 loop shaping 문제 그리고 강인한 이득 예정(gain-scheduled) 제어가 설계 등 많은 문제들이 선형 행렬 부등식을 포함한 컨벡스 문제로 구성 또는 재구성되어질 수 있으며 [5][13-14][16][19-20], 일반적으로 이러한 문제들은 매우 효율적인 수치적 알고리즘을 통해 해를 구할 수 있으므로 특히 다중 제한조건(multiple constraints)을 갖는 대부분의 문제에 대하여 기존의 해석적인 방법에 대한 효과적인 대안(alternative)으로서 제시될 수 있다[13]. 따라서 본 절에서는 모든 허용 가능한 파라미터 불확실성에 대해 성능지수의 상한값 (11)을 보장하는 강인 칼만 필터를 설계하기 위하여 앞 절에서 얻어진 리아푸노프 부등식 (12)로부터 선형 행렬 부등식 문제를 구성하며, 이 중에서도 상한값을 최소화 하는 준 최적 강인 칼만 필터의 설계 문제는 일반적인 선형 행렬 부등식 문제들 중, 선형 목적 함수 최소화 문제와 일반 고유값 최소화 문제로 귀결될 수 있음을 보인다. 이와 같이 놈 제한 조건 (4)를 만족하는 미지 행렬 $F(t)$ 를 포함한 리아푸노프 부등식으로부터 이 부등식이 성립하기 위한 충분조건인 두 개의 이차 행렬 부등식과 하나의 방정식을 유도해 내기 위하여 Khargonekar [17]가 불확실한 선형 시스템의 강인 이차 안정화(robust quadratic stabilization)를 위해 사용하였던 다음의 보조정리들과 같은 예비지식에 대해 언급하고자 한다.

단 예비지식에서 사용하는 기호(notation)는 본 논문의 다른 부분에서 사용된 기호와 무관하다.

예비지식 3.1: 주어진 임의의 벡터 $x \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 다음의 관계가 성립한다.

$$\max \{ (x^T PDF(t)Gx)^2 : \|F(t)\| \leq 1 \} = x^T PDD^T Pxx^T G^T Gx \quad (17)$$

예비지식 3.2: 주어진 행렬 변수들 X, Y 그리고 Z 가 각각 $X \geq 0, Y < 0$ 그리고 $Z \geq 0$ 를 만족하는 $k \times k$ 대칭 행렬이라 하고, 모든 $\zeta \in \mathbb{R}^k, \zeta \neq 0$ 에 대해서 다음의 부등식을 만족한다고 가정하자.

$$(\zeta^T Y \zeta)^2 - 4(\zeta^T X \zeta \zeta^T Z \zeta) > 0 \quad (18)$$

그러면 다음의 부등식을 만족하는 상수 $\mu > 0$ 가 존재한다.

$$\mu^2 X + \mu Y + Z < 0 \quad (19)$$

위의 예비지식 3.1과 3.2에 대한 증명은 [8]을 참조하기 바란다.

다음의 정리는 본 논문의 주요 결과를 요약한 것이다.

정리 3.1: 임의의 상수 $\epsilon \in [0, \bar{\epsilon}]$ 이 주어졌을 때, 선형 불확정 시스템 (1)에 대해 상태 추정 오차 분산의 상한값을 보장하는 강인 칼만 필터 (5)가 존재하기 위한 충분조건들 (Sufficient Conditions: 이하 SC)은 다음과 같이 두 개의 선형 행렬 부등식 문제들(Linear Matrix Inequality Problems: 이하 LMIP)과, 방정식 형태의 상호 결합 제한 조건(coupling constraint)으로서 나타낼 수 있다. 단 $\bar{\epsilon}$ 는 다음의 선형 행렬 부등식 문제들의 해가 존재하도록 하는 ϵ 의 최대값이다.

(SC 1) LMIP 1: 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 행렬 변수 X 가 존재한다.

$$\Theta(X) = \begin{bmatrix} A^T X + XA + \epsilon E^T E & X(BWB^T + \epsilon^{-1} D_1 D_1^T)^{1/2} \\ (BWB^T + \epsilon^{-1} D_1 D_1^T)^{1/2} X & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

위의 LMIP 1에서 구해진 임의의 해 X 로부터 시스템 (Σ') 의 파라미터인 A_e 와 C_e 를 다음과 같이 정의한다.

$$A_e = A + (BWB^T + \epsilon^{-1} D_1 D_1^T)X \quad (21a)$$

$$C_e = C + \epsilon^{-1} D_2 D_1^T X \quad (21b)$$

(SC 3) LMIP 2: 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 행렬 변수 Z 가 존재한다.

$$\Gamma_1(\lambda, Z, Q) = \begin{bmatrix} -Z\bar{A} - \bar{A}^T Z + C_e^T \bar{V}^{-1} C_e & Z\bar{W}^{1/2} \\ \bar{W}^{1/2} Z & I \end{bmatrix} > 0 \quad (22)$$

여기서

$$\bar{V} = V + \epsilon^{-1} D_2 D_2^T \quad (23a)$$

$$\bar{A} = A_e - \epsilon^{-1} D_1 D_2^T \bar{V}^{-1} C_e \quad (23b)$$

$$\bar{W} = B W B^T + \epsilon^{-1} D_1 D_1^T - \epsilon^{-2} D_1 D_2^T \bar{V}^{-1} D_2 D_1^T \quad (23c)$$

이다.

위의 선형 행렬 부등식 문제 LMIP 1과 2는 feasibility 문제로 볼 수 있으며 이에 대한 해들은 A_{aug} 가 안정하다는 조건으로부터 항상 존재한다는 사실을 알 수 있다. 이 때, 추정 오차 분산의 상한값 $trace(Z^{-1})$ 을 보장하는 강인 칼만 필터의 이득은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_r = (Z^{-1} C_e^T + \epsilon^{-1} D_1 D_2^T) \bar{V}^{-1} \quad (24)$$

또한, 추정 오차 분산의 최소 상한값은 다음의 선형 행렬 부등식의 해를 순차적으로 구함으로써 얻을 수 있다.

(SC 1') LMIP 3: $\Theta(X) < 0$ 을 만족하는 $trace(X)$ 를 최소화한다.

(SC 2') 위 LMIP 3에서 구해진 최소화 해를 대입하여 A_e 와 C_e 를 구성한다.

(SC 3') LMIP 4: $\Gamma(\lambda, Z, Q) > 0$ 를 만족하는 λ 를 최소화한다.

여기서 $\Gamma(\lambda, Z, Q) = diag(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ 이며 Γ_1 은 위에서 정의된 것과 같고 나머지 블록 대각 부행렬들(block diagonal submatrices)은 다음과 같다.

$$\Gamma_2(\lambda, Z, Q) = \begin{bmatrix} Q & I \\ I & Z \end{bmatrix} \quad (25a)$$

$$\Gamma_3(\lambda, Z, Q) = -trace(Q) + \lambda \quad (25b)$$

위의 문제들로부터 구해진 해들을 강인 칼만 필터 이득에 관한 식 (24)에 대입함으로써 추정 오차 분산의 상한값을 최소화하는 준최적 강인 칼만 필터를 설계할 수 있다.

증명: 보조정리 2.1에 있는 부등식 (12)에 식 (8a)를 대입하면 다음과 같은 부등식을 얻는다.

$$[A_a + D_a F(t) E_a] L_c + L_c [A_a + D_a F(t) E_a]^T + B_a B_a^T < 0 \quad (26)$$

위의 부등식에서 $\Omega = A_a L_c + L_c A_a^T + B_a B_a^T$ 라 정의하면, 임의의 $\xi \in \mathbf{R}^{2n}$, $\xi \neq 0$ 에 대해서 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\xi^T \Omega \xi < -2 \xi^T L_c E_a^T F^T(t) D_a^T \xi$$

즉,

$$\xi^T \Omega \xi < -2 \max \{ \xi^T L_c E_a^T F^T(t) D_a^T \xi : \|F(t)\| < 1 \}$$

이 성립하며, 양변을 제곱하면

$$(\xi^T \Omega \xi)^2 > 4 \max \{ (\xi^T L_c E_a^T F^T(t) D_a^T \xi)^2 : \|F(t)\| < 1 \} \quad (27)$$

이 된다. 여기에 예비지식 3.1을 사용하면, 위의 부등식은 다음과 같으며,

$$(\xi^T \Omega \xi)^2 - 4 \xi^T L_c E_a^T E_a L_c \xi \xi^T D_a D_a^T \xi > 0$$

이 부등식에 다시 예비지식 3.2를 적용하면, 다음의 부등식을 만족하는 임의의 상수 $\epsilon > 0$ 가 존재함을 알 수 있다.

$$\epsilon^2 L_c E_a^T E_a L_c + \epsilon (A_a L_c + L_c A_a^T + B_a B_a^T) + D_a D_a^T < 0 \quad (28)$$

부등식 (28)의 양변에 ϵ^{-1} 을 곱하면 부등식 (12)와 동일한 아래의 부등식을 얻는다.

$$\Psi = A_a L_c + L_c A_a^T + B_a B_a^T + \epsilon L_c E_a^T E_a L_c + \epsilon^{-1} D_a D_a^T < 0 \quad (29)$$

여기서 각각

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix}, \quad L_c = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

라하고 부등식 (29)에 식 (8)의 파라미터를 대입한 후 Ψ 의 각 블록을 전개하면

$$\Psi_{11} = AR + RA^T + BWB^T + \epsilon RE^T ER + \epsilon^{-1} D_1 D_1^T$$

$$\Psi_{21} = (A - G_e - K_r C)R + BWB^T + \epsilon^{-1} D_1 D_1^T - \epsilon^{-1} K_r D_2 D_1^T$$

$$\Psi_{22} = G_e Y + Y G_e^T + BWB^T + \epsilon^{-1} D_1 D_1^T - \epsilon^{-1} D_1 D_2^T K_r^T - \epsilon^{-1} K_r D_2 D_1^T + K_r (V + \epsilon^{-1} D_2 D_2^T) K_r^T$$

이 되며, 부등식 (29)가 성립하기 위한 충분조건은 다음과 같다.

$$\Psi_{11} < 0, \quad \Psi_{22} < 0, \quad \Psi_{21} = 0 \quad (30)$$

이제, $X = R^{-1}$ 라 정의하고 $X\Psi_{11}X < 0$ 에 대해 Schur complement를 사용하면 LMIP 1의 선형 행렬 부등식 $\Theta(X) < 0$ 을 얻을 수 있고, $\Psi_{21} = 0$ 의 양변에 후곱연산(post-multiplication)한 후 식 (5)로부터 $G_e = A_e - K_r C_e$ 를 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$K_r \{ C_e - (C + \varepsilon^{-1} D_2 D_1^T X) \} \\ = A_e - \{ A + (BWB^T + \varepsilon^{-1} D_1 D_1^T) X \}$$

즉, A_e 와 C_e 를 식 (21a)와 (21b)와 같이 정의하면 모든 K_r 의 값에 대해서 $\Psi_{21} = 0$ 가 성립한다. 또한 주어진 시스템에 상관관계가 있는 프로세스 잡음과 측정 잡음이 발생할 경우에 기존의 칼만 이득을 구하는 공식[7][18]을 고려해 보면 K_r 을 (24)와 같이 정의할 수 있으며, 이 때 부등식 $\Psi_{22} < 0$ 는 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\Psi_{22} = \bar{A}Y + Y\bar{A}^T - YC_e^T \bar{V}^{-1} C_e Y + \bar{W} < 0 \quad (31)$$

여기서 \bar{A} , \bar{W} 그리고 \bar{V} 는 식 (23)에서 정의된 바와 같다. 그러나 (23a)에서 정의된 \bar{V} 가 양한정(positive definite) 행렬이므로 제한 조건 $\Psi_{22} < 0$ 는 일반적인 Schur complement를 사용하여 선형 행렬 부등식의 형태로 변환될 수 없다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 H_∞ 필터링 문제를 선형 행렬 부등식 문제로 재구성[16]하기 위하여 사용하는 방법과 유사한 변수변환을 사용한다. 즉, $Z = Y^{-1}$ 라 정의하고 $\Psi_{22} < 0$ 의 양변에 곱하면

$$Z\Psi_{22}Z = Z\bar{A} + \bar{A}^T Z - C_e^T \bar{V}^{-1} C_e + Z\bar{W}Z < 0$$

이 되며, 이로부터 LMIP 2의 제한 조건 $\Gamma_1(\lambda, Z, Q) > 0$ 를 얻는다.

위와 같이 구성된 LMIP 1과 2의 해 $X (= R^{-1})$ 와 $Z (= Y^{-1})$ 즉, L_c 는 A_{aug} 가 안정하다는 가정으로부터 항상 존재한다는 것을 알 수 있다.

본 논문에서는 부등식 (11)에서와 같이 상태 추정 오차의 분산(H_2 성능지수)에 대한 상한값을 구하는 것이 목적인데, 이 상한값은 식 (8c)와 L_c 에 대한 정의로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{trace} \left(\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \right) = \text{trace}(Y) \quad (32)$$

그러면 이제, 추정 오차 분산의 상한값 $\text{trace}(Z^{-1})$ 을 최소화하는 다음과 같은 문제를 생각해 보자.

$-\Gamma_1(\lambda, Z, Q) < 0$ 를 만족하는 행렬 변수 Z^{-1} 의 trace를 최소화한다. (33)

위에서 정의된 선형 행렬 부등식 문제 (33)의 목적 함수는 $\text{trace}(Z^{-1})$ 로서 이는 결정변수(decision variable)들[13]의 선형결합으로 표현될 수 없으므로 선형 목적 함수 최소화 문제로는 해결할 수 없다. 따라서 이 문제를 다루기 위하여 다음과 같은 새로운 제한조건을 만족하는 행렬 변수 Q 를 고려한다.

$$\Gamma_2(\lambda, Z, Q) > 0$$

그러면 (32)의 목적함수는 다음과 같이 쓸 수 있으며

$$\text{trace}(Z^{-1}) = \min \text{trace}(Q)$$

다음의 관계를 갖는 임의의 상수 λ 에 대하여 $\text{trace}(Z^{-1})$ 는 전역 최소값이 됨을 알 수 있다[5][13].

$$\Gamma_3(\lambda, Z, Q) > 0$$

다시 말해서, 원래의 목적함수인 추정 오차 분산의 상한값 $\text{trace}(Y)$ 에 대한 최소화 문제의 해는 정리 3.1의 LMIP 4와 같은 일반 고유값 최소화 문제의 해를 구함으로써 얻을 수 있다. 또한 부등식 $\Psi_{11} < 0$ 와 $\Psi_{22} < 0$ 가 상호 결합된 이차 행렬 부등식이라는 점에 비추어 볼 때 $\text{trace}(Y)$ 를 최소화하기 위해서는 먼저 $\Psi_{11} < 0$ 의 해 X 가 최소화되어야 하므로, LMIP 3과 같은 선형 목적 함수 최소화 문제를 구성할 수 있다. ■

3.2 선형 행렬 부등식과 대수 리카티 방정식과의 관계

앞 절에서 준최적 강인 칼만 필터를 설계하기 위하여 정리 3.1로부터 구한 LMIP 3의 최소화 해 X 와 LMIP 4의 해 $Z (= Y^{-1})$ 는 다음과 같은 두 개의 대수 리카티 방정식들 [22]을 통해서도 얻을 수 있다.

ARE 1:

$$A^T X_{Ric} + X_{Ric} A + X_{Ric} (BWB^T + \varepsilon^{-1} D_1 D_1^T) X_{Ric} + \varepsilon E^T E = 0 \quad (34)$$

ARE 2:

$$A_e^T Y_{Ric} + Y_{Ric} A_e - (Y_{Ric} C_e^T + \varepsilon^{-1} D_1 D_2^T) \bar{V}^{-1} \\ \times (C_e^T Y_{Ric} + \varepsilon^{-1} D_2 D_1^T) + BWB^T + \varepsilon^{-1} D_1 D_1^T = 0 \quad (35)$$

여기서 A_e' 와 C_e' 는 각각 식 (21a)와 (21b)의 X 대신에 $\hat{w}(t)$ 와 $\hat{v}(t)$ 를 대입하므로써 구성된 것이며, 이 때 X 그리고 Z 와 X_{Ric} , Y_{Ric} 사이에는 [14]의 보조정리 8.1(monotonicity 결과)에 의하여 다음과 같은 관계가 있음을 알 수 있다.

$$0 < X_{Ric} < X \tag{36a}$$

$$0 < Y_{Ric} < Z^{-1} (= Y) \tag{36b}$$

즉, LMIP 4로 표현된 추정 오차 분산의 상한값 ($trace(Y)$) 최소화 문제의 해를 구하는 것은 결국 ARE 2의 해 Y_{Ric} 를 구하는 것과 같다. 또한, ARE 2의 행렬들은 ARE 1의 해로부터 구성되므로 두 개의 방정식은 상호 결합되어 있음을 알 수 있는데, [3]의 결과를 이용하면 ARE 2는 다음의 (37b)와 같은 추가 제한조건을 가짐과 동시에 ARE 1의 안정화 해와 상호 비결합(decoupled)된 방정식 (37a)으로 표현될 수 있다.

$$AM + MA^T + \epsilon ME^T EM - (MC^T + \epsilon^{-1} D_1 D_2^T) \bar{V}^{-1} \times (CM + \epsilon^{-1} D_2 D_1^T) + BWB^T + \epsilon^{-1} D_1 D_1^T = 0 \tag{37a}$$

$$\rho_s(X_{Ric} M) = \max |\lambda_i(X_{Ric} M)| < 1 \tag{37b}$$

여기서 $\rho_s(\cdot)$ 는 spectral radius를 나타내며 X_{Ric} , Y_{Ric} 그리고 M 사이의 관계는 다음과 같다.

$$Y_{Ric} = (M^{-1} - X_{Ric})^{-1} \tag{38}$$

이제 정리 3.1에서 구해진 최소 상한값이, 예비지식 3.2를 적용함으로써 도입된 스케일링 파라미터 ϵ 에 대해, 컨벡스 함수로 표현되는지를 알아보기 위하여 ARE 1의 이차 미분(second derivative)을 구해보면 다음과 같이 쓸 수 있는데

$$A_e' \tau \frac{d^2 X_{Ric}}{d\epsilon^2} + \frac{d^2 X_{Ric}}{d\epsilon^2} A_e' + 2 \frac{dX_{Ric}}{d\epsilon} BWB^T \tau \frac{dX_{Ric}}{d\epsilon} + \frac{2}{\epsilon^3} \left(X_{Ric} - \epsilon \frac{dX_{Ric}}{d\epsilon} \right) D_1 D_1^T \left(X_{Ric} - \epsilon \frac{dX_{Ric}}{d\epsilon} \right) = 0$$

A_e' 는 안정하므로 $d^2 X_{Ric}/d\epsilon^2 \geq 0$ 가 성립하고, [9]에서 Theorem 5의 증명에 사용한 방법을 사용하면 $d^2 M^{-1}/d\epsilon^2 \leq 0$ 의 관계도 역시 성립한다. 따라서 (38)의 관계로부터 $d^2 Y_{Ric}/d\epsilon^2 \geq 0$ 임을 알 수 있는데 이는 $trace(Y_{Ric})$ 가 $\epsilon \in [0, \bar{\epsilon}]$ 에 대한 컨벡스 함수임을 나타낸다. 또한 2.1절의 참고에서 언급한 바와 같이 ARE 2 (또는 LMI 4)는 식 (6)의 시스템 (Σ')에 대하여 정상 상태 칼만 필터를 설계하기 위한 방정식으로 생각할 수 있는데, 그 구조를 보면 식 (6a)와 (6b)에 나타난 잡음 $\hat{w}(t)$ 와 $\hat{v}(t)$ 은 다음과 같은 통계적 특성을 갖는 백색 잡음으로 생각할 수 있다.

$$E[\hat{w}(t)] = E[\hat{v}(t)] = 0 \tag{39a}$$

$$E[\hat{w}(t) \hat{w}^T(\tau)] = (BWB^T + \epsilon^{-1} D_1 D_1^T) \delta(t - \tau) \tag{39b}$$

$$E[\hat{v}(t) \hat{v}^T(\tau)] = \bar{V} \delta(t - \tau) \tag{39c}$$

$$E[\hat{w}(t) \hat{v}^T(\tau)] = E[\hat{v}(t) \hat{w}^T(\tau)] = \epsilon^{-1} D_1 D_2^T \delta(t - \tau) \tag{39d}$$

다시 말해서, 강인 칼만 필터를 설계하기 위한 본 논문에서의 접근방법은 선형 불확정 시스템 (1)로부터 변형된 시스템 (Σ')에 대하여 일반적인 칼만 필터를 설계하는 것과 같다고 말할 수 있다. 이를 나타내기 위하여 식 (21a)와 (21b)에서 구해진 행렬들을 준최적 강인 칼만 필터 (5)에 대입하여 다시 쓰면 다음과 같다.

(Σ_f)

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A + \Delta A_f) \hat{x}(t) + K_f [y(t) - (C + \Delta C_f) \hat{x}(t)]$$

$$\hat{z}(t) = L \hat{x}(t)$$

여기서

$$\Delta A_f = (BWB^T + \epsilon^{-1} D_1 D_1^T) X, \quad \Delta C_f = \epsilon^{-1} D_2 D_1^T X$$

이며, 이들은 필터의 구조에 파라미터 불확실성이 미치는 영향을 나타낸다. 이러한 사실들을 고려해 볼 때 선형 불확정 시스템 (1)에 파라미터 불확실성이 없을 경우, $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, 그리고 $E = 0$ 의 값으로 설정하면 강인 칼만 필터는 기존의 칼만 필터와 같은 결과를 나타낸다.

이제, 준최적 강인 칼만 필터를 설계하기 위한 대수 리카티 방정식 기반의 설계법과 선형 행렬 부등식 기반 설계법의 특징을 비교하기 위하여 다음과 같은 가정을 만족하는 시스템을 고려해 보자.

가정 1: (C_e, A_e)가 검출가능(detectable)하다.

가정 2: (\bar{A}, \bar{W})가 제어가능(controllable)하다.

잘 알려진 바와 같이 H_∞ 제어와 같은 문제를 다루는데 있어서 선형 행렬 부등식을 이용한 접근은 대수 리카티 방정식의 안정화 해가 존재하기 위한 정규 조건(regularity restriction)을 필요로 하지 않음으로써 더 넓은 범위의 시스템에 대하여 적용 가능하다[13-14]는 장점을 갖고 있다. 컨벡스 최적화를 통한 H_∞ 필터링[16]에서 저차 선형 행렬 부등식(size-reduced LMI) 구성을 통해 증명된 선형 행렬 부등식과 대수 리카티 방정식 사이의 관계를 고려해 보면, 이러한 장점은 강인 칼만 필터를 설계하기 위하여 본 논문에서 제시한 선형 행렬 부등식 기반 설계법에도 적용됨을 알 수 있다. 즉, 식 (34)에 나타난 대수 리카티 방정식의 안정화 해가 존재하기 위해서는 주어진 선형 불확정 시스템이 위의 가정 1과 2를 동시에 만족하여야 하는 반면에 본 논문에서 제시한

선형 행렬 부등식 기법은 (\bar{A}, \bar{W}) 에 대한 어떠한 가정도 필요로 하지 않는다. 구체적으로 말하자면, 기존의 대수 리카티 방정식으로는 해결할 수 없는, (\bar{A}, \bar{W}) 가 임의의 제어 불가능한 $j\omega$ -mode를 갖는 경우에 대해서도 본 논문에서 제안한 선형 행렬 부등식 기법은 적용 가능하다. 일반적으로, 선형 행렬 부등식을 푸는 것보다 대수 리카티 방정식을 푸는 것이 훨씬 덜 복잡하므로[14], 위에서 언급한 두 개의 가정 1, 2를 만족하는 정상(regular) 시스템에 대해서는 대수 리카티 방정식을 사용하는 것이 계산상 더 효율적이라고 말할 수 있다. 그러나 가정 2를 만족하지 않는 특이(singular) 시스템에 대해서 대수 리카티 방정식을 사용할 경우에는 알고리즘이 성공적으로 수행되지 않기 때문에, 본 논문에서 제안한 선형 행렬 부등식 접근법을 사용함으로써 수치적으로 안정한(sound) 대안을 제시할 수 있다.

4. 모의 실험 및 결과 고찰

다음과 같이 상태행렬과 측정행렬에 파라미터 불확실성을 포함한 선형 시불변 시스템을 고려해 보자.

$$(\Sigma:) \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 + \delta(t) \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (40a)$$

$$y(t) = [-100 \quad 100 + \rho(t)]x(t) + v(t) \quad (40b)$$

$$z(t) = [1 \quad 0]x(t) \quad (40c)$$

여기서 $w(t)$ 와 $v(t)$ 는 상관관계가 없으며 단위 공분산 행렬을 갖고 있는 영평균 백색 잡음이고, δ 와 ρ 는 각각 다음과 같은 범위를 갖는 불확실한 파라미터들이다.

$$|\delta| \leq 0.3, \quad |\rho| \leq 12 \quad (41)$$

위의 주어진 시스템을 식 (3)과 같은 형태와 일치시키기 위하여 불확실성의 구조를 다음과 같이 선택한다.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = 40, \quad E = [0 \quad 0.3] \quad (42)$$

본 모의 실험의 목적은 임의의 상수 $\epsilon \in [0, \bar{\epsilon}]$ 가 주어졌을 때, 위와 같은 불확정 시스템에 대해 정상 상태에서의 추정 오차 분산에 대한 최소 상한값을 보장하는 준최적 강인 칼만 필터를 설계하는 것으로서 이는 본문에서 언급한 바와 같이 다음의 구조를 가정하며

$$(\Sigma_r:) \hat{x}(t) = A_\epsilon \hat{x}(t) + K_r[y(t) - C_\epsilon \hat{x}(t)] \quad (43a)$$

$$\hat{z}(t) = [1 \quad 0] \hat{x}(t) \quad (43b)$$

여기서 A_ϵ , C_ϵ 그리고 K_r 은 정리 3.1의 LMP 3과 4로부터 구한 행렬들이다.

또한 추정 오차를

$$e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t)$$

로 정의하고 시스템 (Σ_r) 에 위의 필터를 적용했을 경우에 H_2 성능 지수와 이에 대한 최소 상한값은 따름정리 2.2에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T e_z^T(t) e_z(t) dt \right\} < \text{trace} \left\{ [1 \quad 0] Z^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

3.2절에서 언급한 것처럼 위와 같이 구해진 최소 상한값은 설계과정에서 도입된 스케일링 파라미터 ϵ 에 대한 컨벡스 함수로서 표현되며(그림 2), 본 모의 실험의 경우 파라미터의 최대값은 $\bar{\epsilon} = 0.3285$ 이고 최적값은 $\epsilon_{opt} = 0.318$ 이며 이 때의 최적화된 최소 상한값은 7.0341이다.

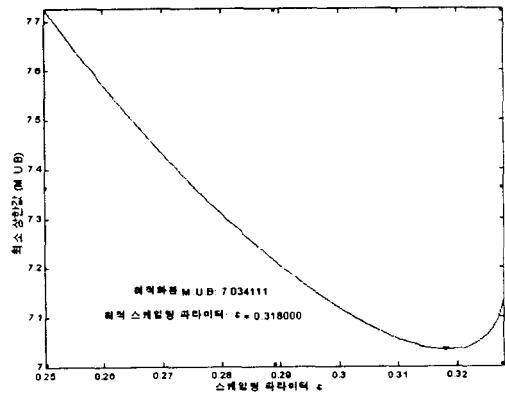


그림 2 스케일링 파라미터 ϵ 에 대한 컨벡스 함수로서의 최소 상한값.

Fig. 2 Minimum upper bound as the convex function of a scaling parameter ϵ

그림 3은 $\delta = 0.3$, $\rho = 12$ 인 경우의 기존 칼만 필터와 본 논문에서 제안한 강인 칼만 필터의 상태 추정 성능을 시간 영역에서 나타낸 것이고, 그림 4는 추정 오차 신호를 비교한 것인데 이 그림들로부터 기존 칼만 필터의 추정 오차는 정상 상태에서 큰 값의 분산을 가지며 매우 불규칙한 형태를 나타내는 반면, 강인 칼만 필터의 추정 오차 분산은 일정하게 상한값 내로 유지된다는 사실을 알 수 있다. 또한 주파수 영역에서 필터의 페루프 이득을 비교한 그림 5를 보면 기존 칼만 필터의 경우 저주파 대역에서의 이득이 단위 이득(unity gain)보다 클 뿐만 아니라 고주파 대역에서의 이득도 큰 반면, 강인 칼만 필터는 cut-off 주파수 근처에서만 기존 칼만 필터와 같은 수준의 이득을 갖고 나머지 대역에서는 더 작은 이득을 갖는 저주파 통과(low-pass) 필터의 특성을 나타낸다. 따라서 필터의 출력인 상태 추정치는 강인 칼만 필터의 경우 저주파 성분을 많이 포함한 부드러운 형상을 나타내고, 이에 비해 기존 칼만 필터는 고주파 성분을 많이 포함한 불규칙한

형상을 나타내게 된다(그림 3 참조). 각 필터에 대하여 상태 추정 오차 신호의 파워 스펙트럼 밀도 함수를 고려해 보면, 강인 칼만 필터의 경우 PSD곡선은 그 면적이 일정한 상한값을 넘지 않으면서 고주파 대역까지 넓게 퍼져있는 납작한 종 모양을 나타내는 반면, 기존 칼만 필터의 경우는 면적에 대한 상한값이 없는 폭이 좁고 높은 종 모양을 갖는다는 것을 알 수 있다.

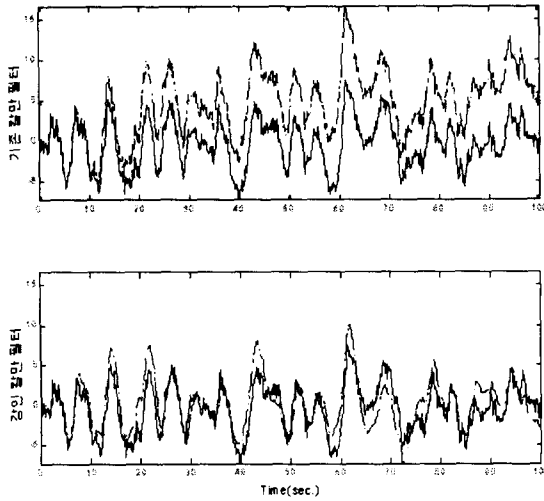


그림 3 기존의 칼만 필터와 제안된 강인 칼만 필터의 상태 추정 성능 비교

Fig. 3 State estimation performance comparison between the standard Kalman filter and the proposed filter

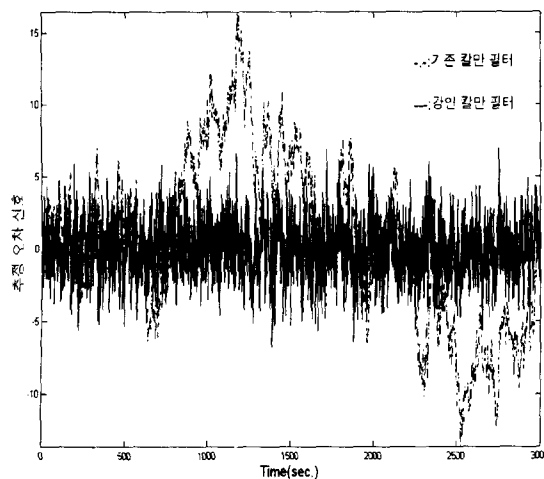


그림 4 상태 추정 오차 신호의 비교

Fig. 4 Comparison of state estimation error signals

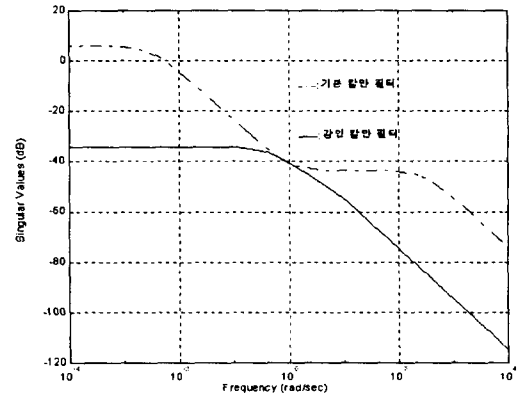


그림 5 필터 폐루프 이득의 비교

Fig. 5 Comparison of filter closed-loop gains

이제, 불확실한 파라미터 δ 와 ρ 값들의 변화에 따른 실제 성능 지수 즉, 상태 추정 오차의 분산을 비교해 보면 다음의 표 1과 같다.

표 1 불확실한 파라미터 값들의 변화에 따른 상태 추정 오차 분산의 비교

Table 1 Comparison of state estimation error variances according to the changes of uncertain parameter values

	상태 추정 오차의 분산					
	δ	0	0.3	0.3	-0.3	-0.3
ρ	0	12	-12	12	-12	
기존의 칼만 필터	0.014	35.59	0.518	0.137	12.46	
제안된 강인 칼만 필터	1.301	3.172	1.643	1.216	1.354	

표 1을 보면 알 수 있듯이 기존의 칼만 필터는 불확실성이 전혀 없는 경우 외에 파라미터의 값들이 서로 반대 극성 (opposite signs)을 갖는 경우에도 더 나은 상태 추정 성능을 보인다. 그러나 기존의 칼만 필터는 추정 오차의 분산이 임의의 큰 값을 나타내는 반면에 강인 칼만 필터의 추정 오차 분산은 어떠한 경우에도 계산된 최적 상한값 7.0341을 넘지 않는다는 사실을 알 수 있으며, 또한 위의 분산에 대한 평균값들을 구해보면 기존의 칼만 필터는 9.7438을 나타내는데 비해, 본 논문에서 제안된 강인 칼만 필터의 경우 1.7372의 값을 가지므로, 평균적인 의미에서는 제안된 필터가 파라미터 불확실성에 대해 훨씬 강인한 상태 추정 성능을 갖는다는 사실을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 불확정 선형 시불변 시스템에 대하여 정상 상태에서 강인한 상태 추정 성능을 나타내는 준최적 강인 칼만 필터를 설계하기 위한 선형 행렬 부등식 기법을 제안하였다. 제안된 설계 기법을 적용하기 위해서는 불확정 선형 시스템의 상태 방정식과 추정 오차의 동특성을 결합하여 구성된 확장 시스템이 안정하다는 하나의 가정만을 필요로 한다. 이러한 가정 하에서 얻을 수 있는 리아푸노프 부등식의 해로부터 상태 추정 오차 분산에 대한 상한값을 계산할 수 있음을 보이고, 이 부등식이 성립하기 위한 충분조건으로서 얻어지는 하나의 방정식과 두 개의 이차 행렬 부등식으로부터, 간단한 변수 변환과 함께 새로운 선형 행렬 부등식 조건을 만족하는 또 하나의 행렬을 도입함으로써, 강인 칼만 필터를 설계하기 위한 두 개의 상호 결합된 선형 행렬 부등식 문제들을 구성하였다. 또한 구성된 선형 행렬 부등식 문제들에 대한 최소화 해를 이용하여 추정 오차 분산에 대한 최소 상한값을 계산하고, 이를 다시 스케일링 파라미터에 대하여 최적화 함으로써 최적 상한값을 계산함과 동시에 이를 보장하는 준최적 강인 칼만 필터를 설계하였다. 본 논문에서 제안한 선형 행렬 부등식 기반의 설계 방법은 대수 리카티 부등식을 이용한 설계 방법에 비해 더 넓은 범위의 시스템에 대하여 적용이 가능하며, 정상 시스템에 대하여 적용 경우에는 거의 같은 결과를 얻을 수 있을 뿐만 아니라, 컴퓨터의 계산 속도 향상과 효율적인 컨벡스 최적화 알고리즘의 개발로 인해, 리카티 방정식을 푸는데 요구되는 시간에 필적할 만한 시간 내에 해를 구할 수 있으므로 수치적으로 안정하고 합리적인 대안으로서 제시될 수 있다. 마지막으로 이론적인 문제점으로서, 공칭 시스템에 파라미터 불확실성이 미치는 영향을 반영하는 상수 행렬을 선택하는 최적 알고리즘이 아직까지 없는 실정이며, 임의의 선택에 대해서는 해가 존재하지 않는 경우도 발생하므로 이에 대한 연구도 아울러 요구되는 바를 할 수 있다.

감사의 글

본 연구를 수행하는 데에 많은 도움 말씀을 주신 포항공대 박 부건 교수님께 감사 드립니다.

참 고 문 헌

[1] Bor-Sen Chen and Tay-Yuh Dong, "Robust Stability Analysis of Kalman-Bucy Filter under Parametric and Noise Uncertainties", *Int. J. Contr.*, vol. 48, no. 6, pp. 2189-2199, 1988.

[2] D.G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems, Theory, Models, and Applications*, John Wiley & Sons, 1979.

[3] D.J.N. Limebeer, B.D.O. Anderson, P.P. Khargonekar and M. Green, "A Game Theoretical Approach to H_∞ Control of Time-Varying Systems", *SIAM J. Control. Optim.* 30, pp. 262-283, 1992.

[4] Dorato, Abdallah, Cerone, *Linear-Quadratic Control: An Introduction*, Prentice Hall, 1995.

[5] E. Feron, V. Balakrishnan, S. Boyd, "Numerical Methods for H_2 Related Problems", <http://www-isl.stanford.edu/people/boyd>.

[6] E. Kreindler and A. Jameson, "Conditions for Nonnegativeness of Partitioned Matrices", *IEEE Trans. Automat. Contr.* AC-17:147-148, 1972.

[7] G. Minkler and J. Minkler, *Theory and Application of Kalman filtering*, Magellan Book Company.

[8] I. R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems", *System & Control Letters* 8, pp. 351-357, 1987.

[9] I. R. Petersen and D. C. McFarlane, "Optimizing the guaranteed cost in the control of uncertain systems" *Robustness of Dynamical systems with parameter Uncertainties*, Monte Verita, 1992.

[10] Kemin Zhou, John C. Doyle and Keith Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

[11] Lihua Xie and Yeng Chai Soh, "Robust Kalman Filtering for Uncertain Systems", *System & Control Letters* 22, pp. 123-129, 1994.

[12] Minyue Fu, Carlos E. De Souza and Lihua Xie, " H_∞ Estimation for Uncertain Systems", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 2, pp. 87-105, 1992.

[13] Pascal Gahinet et al, *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB*, The MathWorks Inc.

[14] Pascal Gahinet and Pierre Apkarian, "A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ control", *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, pp. 421-448, 1994.

[15] PooGyeon Park and Thomas Kailath, "Convergence of the DRE Solution to the ARE Strong Solution", *IEEE Trans. on Automat. Contr.* vol. 42, no. 4, pp. 573-578, April 1997.

[16] PooGyeon Park and Thomas Kailath, " H_∞ filtering via convex optimization", *Int. J. Contr.* vol. 66, no. 1, pp. 15-22, 1997.

[17] P.P. Khargonekar, I.R. Petersen, and Kemin Zhou, "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stability and H_∞ Control Theory", *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol. 35, no. 3, pp. 356-361, March 1990.

[18] R.G. Brown and P.Y.C. Hwang, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, Third Edition, John Wiley & Sons, 1997.

[19] S. Boyd et al, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics.

[20] S. Boyd, V. Balakrishnan, E. Feron and L. ElGhaoui, "Control System Analysis and Synthesis via Linear

Matrix Inequalities", In Proc. ACC. pp. 2147-2154, 1993.

[21] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L.H. Keel, Robust Control: The Parametric Approach, Prentice Hall, 1995.

[22] 진승희, 김경근, 박진배, 윤태성, "파라미터 불확실성을 갖는 선형 시스템에 대한 준최적 강인 칼만 필터 설계", 대한전기학회 창립 50주년 하계학술대회 논문집, pp. 620-623, 1997년 7월.

저 자 소 개



진 승 희 (陳 承 熙)

1970년 12월 22일 생. 1993년 연세대 공대 전기공학과 졸업. 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 동 대학원 전기 및 컴퓨터 공학과 박사과정.

Tel : (02) 361-2773

E-mail : shjin@control.yonsei.ac.kr



윤 태 성 (尹 泰 星)

1956년 6월 23일 생. 1978년 연세대 공대 전기공학과 졸업. 1980년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1988년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1994년~1995년 2월 미국 Vanderbilt 대학교 전기공학과 객원교수. 1989년~현재 창원대 전기공학과 부교수.

E-mail : tsyoon@sarim.changwon.ac.kr



박 진 배 (朴 珍 培)

1954년 8월 7일 생. 1977년 연세대 공대 전기공학과 졸업. 1985년~1990년 Kansas State University 공대 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(공학박사). 1990년~1991년 Kansas State University 공대 전기 및 컴퓨터 공학과 조교수. 현재 연세대 공대 전기 및 컴퓨터 공학과 부교수.

Tel : (02) 361-2773

E-mail : jbpark @control.yonsei.ac.kr