불확정성 선형 시스템의 강인 성능 보장 제어

論 文
48A - 5 - 10

Robust Guaranteed Performance Control of Uncertain Linear Systems

金 鎭 勳*
(Jin-Hoon Kim)

Abstract - The robust control problem of the linear systems with uncertainty is classified as the robust stability problem guaranteeing the stability and the robust performance problem guaranteeing the desired performance. In this paper, we considered the robust performance analysis problem, which find the upper bound of the quadratic performance of the uncertain linear system, and the robust guaranteed performance controller design problem which design a controller guaranteeing the desired quadratic performance. At first, we treated the analysis problem and presented the two results: one is dependent on the performance of the nominal system and another is independent on this. And we treated the design problem and presented a controller design method guaranteeing the desired performance for the uncertain linear systems. Finally, we show the usefulness of our results by numerical examples.

Key Words : Uncertain Linear Systems, Guaranteed Performance, Quadratic Performance, Analysis Problem, Design Problem.

1. 서론

일반적으로 강인 제어는 확정적이지 못한 불확정성을 포함하는 시스템을 대상으로 제어기를 설계하거나 설계된 시스템을 해석하는 것을 말한다. 시스템에 불확정성이 존재하는 경우 이를 고려하지 않고 설계된 제어기는 시스템의 원하는 성능을 보장하지 못할 뿐만 아니라 시스템의 안정성까지도 보장하지 못하는 것이 일반적이다. 그리고 강인 제어는 크게 안정도에 중점을 두는 강인 안정성 제어기 설계/해석과 시스템의 성능에 중점을 두는 강인 성능 제어기 설계/해석으로 나뉘어진다. 여기서 강인 안정성 제어기라는 것은 설계된 제어기가 주어진 불확정성에 대하여 안정성이 보장되는 것을 말하며, 또한 강인 성능 제어기라는 것은 설계된 제어기가 주어진 불확정성에 대하여 원하는 성능이 보장되는 것을 말한다.

이러한 강인 제어 문제는 70년대까지는 주로 주파수영역에서 정성적으로 다루어져오다 80년대에 이르러 상태공간 및 주파수 영역에서 정량적으로 다루어지기 시작하여 현재에는 상태 공간 뿐만 아니라 주파수 영역의 제어 이론 분야 중 가장 활발히 연구가 행하여지고 있는 분야 중의 하나이다. 이 중 강인 안정성에 관한 연구는 매우 활발히 전개되어 현재에는 많은 연구 결과가 있고[1]-[4], 지금도 매우 활발히 연구가 진행되고 있다. 이는 제어 시스템에서 안정성은 더 말할 필요도 없이 가장 중요한 요소 중 하나이기 때문이다. 그러나 안정성의 보장 뿐만 아니라 제어 시스템의 성능 또한 중요한 문제이다. 이는 제어를 행하는 근본 목적이 제어 시스템의 동적 특성이 원하는 바가 되도록 하는 것이기 때문이다. 그러나 이 분야의 연구는 아직 미미한 수준이지만[5]-[11], 최근에 이르러 매우 활발히 연구가 진행되어지고 있다.

지금까지의 강인 성능 문제는 불확정성이 존재하는 경우 i) 불확정 시스템 극점 변화의 바운드 ii) 불확정 시스템의 2차 성능함수 상한을 시스템 파라미터와 불확정성 바운드의 함수로 표시하는 것이었다. 그러나 불확정성이 존재하는 경우에 불확정성이 존재하지 않는 경우와의 직접적으로 성능을 비교할 수 있는 결과는 아직 없다. 이 논문에서는 불확정성이 존재하는 시스템의 2차 성능 함수 바운드를 불확정성이 존재하지 않는 시스템의 2차 성능함수 바운드의 스칼라 배(1보다 크거나 같음)의 함수로 표시하고 이 스칼라 값의 최소값을 구한다.

다음으로 기술되는 불확정성을 갖는 선형 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t)=[A+\Delta A(t)]x(t)+[B+\Delta B(t)]u(t),\ \ x(0)=x_0 \qquad (1)$$

여기서 $x(t)\in R^n$은 상태 벡터(state vector), $u(t)\in R^m$은 제어 입력 벡터(control input vector)이고, 행렬 $A\in R^{n\times n}$와 $B\in R^{n\times m}$는 상수 행렬(constant matrix)로써 $\{A,B\}$는 제어 가능쌍(controllable pair)이다. 그리고 불확정성을 나타내는 행렬 $\Delta A(t)\in R^{n\times n}$, $\Delta B(t)\in R^{n\times m}$는 다음으로 표시된다.

*正 會 員 : 忠北大 工大 制御計測工學科 助敎授 · 工博
接受日字 : 1998年 1月 16日
最終完了 : 1999年 3月 24日

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t)] = DF(t)[E_1 \quad E_2], \qquad F^T(t)F(t) \le I_q, \forall t \ge 0 \tag{2}$$

여기서 $D \in R^{n \times q}, E_1 \in R^{q \times n}, E_2 \in R^{q \times m}$인 알려진 상수 행렬이다. 그리고 시스템의 성능을 나타내는 다음의 2차 성능지수(quadratic performance index)를 생각하자.

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \tag{3}$$

여기서 $Q \in R^{n \times n}$, $R \in R^{m \times m}$는 양확정(positive definite) 행렬이다. 그리고 시스템 (1)에서 불확정성을 무시한 시스템을 공칭 시스템(nominal System)이라 하면 다음으로 기술된다.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t), \quad \tilde{x}(0) = x_0 \tag{4}$$

여기서 상태를 $x(t)$, $\tilde{x}(t)$로 각각 구별한 것은 불확정성 시스템과 공칭 시스템의 궤적이 다르기 때문에 이를 분명히 하기 위함이다. 위에서 $\{A, B\}$가 제어 가능쌍이라 했으므로 이 공칭 시스템 (4)의 점근적 안정성(asymptotic stability)이 보장되게 하는 다음의 상태 제어기가

$$\tilde{u}(t) = -K\tilde{x}(t) \tag{5}$$

항상 존재하며, 이 제어기를 공칭 시스템 (4)에 가하면 다음의 점근적 안정성이 보장되는 공칭 폐루프 시스템을 얻게 된다.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - BK)\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(0) = x_0 \tag{6}$$

여기서 점근적 안정성이 보장된다고 하는 것은 $\mathrm{Re}\lambda_i(A - BK) < 0$을 의미한다. 또한 이 공칭 폐루프 시스템에 대한 (3)에 정의된 2차 성능지수는 다음으로 주어진다.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t)R\tilde{u}(t)]dt \\ &= \int_0^\infty [\tilde{x}(t)(Q + K^TRK)\tilde{x}(t)]dt \\ &= x_0^T\left[\int_0^\infty e^{(A-BK)^Tt}(Q + K^TRK)e^{(A-BK)t}dt\right]x_0 \\ &= x_0^TPx_0 \equiv J^o \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 양확정행렬 $P \in R^{n \times n}$는 다음의 Lyapunov 행렬 방정식의 해이다.

$$(A - BK)^TP + P(A - BK) + K^TRK + Q = 0 \tag{8}$$

그리고 위의 2차 성능지수 (3)을 최소로 하는 제어기는 잘 알려진 다음의 최적제어기이고,

$$u(t) = -Kx(t)\ ; \ K = R^{-1}B^TP^o$$

2차 성능지수의 최소값은 다음으로 주어진다[14].

$$J^{opt} = x_0^TP^ox_0$$

여기서 양확정 행렬 $P>0$는 다음의 Riccati 방정식의 해이다.

$$A^TP^o + P^oA - P^oBR^{-1}B^TP^o + Q = 0$$

또한 (7)의 성능 지수는 초기상태 $x(0)$의 함수이므로, 이 초기상태를 $E\{x(0)\} = 0$이고 $E\{x(0)x^T(0)\} = I_n$인 무작위(random) 변수라 하고, (7)의 2차 성능지수의 기대치(Expected value)를 구하면 다음이 된다.

$$E\{J\} = E\{x^T(0)Px(0)\} = \mathrm{Tr}(P) \tag{9}$$

위에서 점근적 안정성이 보장되는 공칭 시스템에 대한 성능지수는 (7)과 같이 구하여짐을 알았다. 다음으로는 불확정성을 포함하는 시스템 (1)에 공칭 시스템의 안정성을 보장하는 다음의 상태궤환 제어기를

$$u(t) = -Kx(t) \tag{10}$$

가하여 얻어진 다음의 불확정성 폐루프 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = [A - BK]x(t) + [DF(t)(E_1 - E_2K)]x(t), \quad x(0) = x_0 \tag{11}$$

위의 불확정성을 포함하는 시스템 (11)에 대하여 (3)에 정의된 2차 성능지수를 구하는 것은 불확정성을 포함하지 않은 공칭 시스템의 경우와는 다르게 쉽지 않다. 이는 불확정성을 포함하기 때문에 공칭 시스템의 경우와 같이 해를 구하기가 불가능하고, 불확정성의 성질에 따라 이의 값이 가질 수 있는 범위만이 구하여질 뿐이다. 여기서 불확정성이 포함된 폐루프 시스템 (1)에 대한 (3)에 정의된 2차 성능지수의 상한을 구하는 것을 강인 성능 제어기 해석이라 하고, 또한 주어진 2차 성능지수를 만족하도록 하는 제어기 (3)을 설계하는 것을 강인 성능 보장 제어기 설계라 한다.

이 논문에서는 먼저 불확정성 시스템 (1)에 공칭 시스템을 안정화하는 제어기 (10)을 가하여 얻어진 폐루프 시스템 (11)에 대하여 (3)에 정의된 2차 성능지수의 상한을 제시한다. 이 상한은 공칭시스템의 2차 성능지수인 (7)의 몇 배 형태로 표시되는 것과 공칭 시스템의 상한의 몇 배 형태가 아닌 새로운 형태의 상한이 각각 제시된다. 다음으로는 강인 성능보장 제어기 설계 문제인 주어진 2차 성능지수에 대하여 이를 만족하도록 하는 제어기의 설계 방법을 제시한다. 즉, 원하는 2차 성능함수를 만족하는 제어기 설계에 관한 결과를 제시한다.

이 논문에서는, $\lambda_i(\cdot)$는 행렬의 고유치(eigenvalue), $\lambda_{\max}(\cdot)$는 대칭행렬의 최대 고유치, $\mathrm{Tr}(\cdot)$는 행렬의 트레이스(trace), $\mathrm{Re}(\cdot)$는 실수부(real part), $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose), $\mathrm{E}\{\cdot\}$는 기대치(expected value)를 나타낸다. 그리고, 대칭행렬 $V, W \in R^{n \times n}$에 대하여 $V < W$는 행렬 $W - V$가 양확정행렬(positive definite matrix)을 나타내고, $V \le W$는 행렬 $W - V$가 준양확정행렬

(semi-positive definite matrix)을 나타낸다. 끝으로, I_n은 $n \times n$ 항등행렬(identity matrix)임을 나타낸다.

2. 강인 성능 제어기 해석

불확정성이 없는 공칭 시스템 (4)에 대하여는 위의 (7)에서 볼 수 있듯이 이의 2차 성능지수의 값은 공칭 폐루프시스템의 해를 곧바로 구할 수 있기 때문에 잘 구하여진다. 그러나 불확정성을 포함하는 시스템에서는 이의 해를 구하기가 어렵기 때문에 이의 2차 성능지수 값을 구하는 것이 매우 어렵게 되고, 또한 이의 해는 유일해가 아닌 불확정성에 따른 함수이기에 상한 정도만이 구하여질 뿐이다. 또한 불확정성 폐루프 시스템이 불안정하면 이의 값이 무한대가 되기 때문에 무의미하고, 단지 점근적 안정성이 보장되는 경우만이 의미가 있다.

다음의 보조정리는 다음의 주요결과의 증명에 사용된다.

보조정리 1:[4] 행렬 $V, W \in R^{n \times n}$과 스칼라 $\varepsilon > 0$에 대하여 다음이 성립한다.

$$V^T W + W^T V \le \varepsilon V^T V + \frac{1}{\varepsilon} W^T W$$

보조정리 2:[13] 임의의 행렬 $W \in R^{n \times n}$과 양확정 대칭 행렬 $V \in R^{n \times n}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lambda_{\min}(I_n - V) = 1 + \lambda_{\min}(-V) = 1 - \lambda_{\max}(V),$$
$$W^T V W \le \lambda_{\max}(V)\, W^T W.$$

다음의 정리 1은 불확정성 시스템 (1)에 공칭 시스템의 점근적 안정성을 보장하는 제어기 (10)을 가하여 얻어진 불확정성 폐루프 시스템 (11)에 대하여 점근적 안정성을 보장하면서, 이 불확정성 폐루프 시스템에 대한 (3)에 정의된 2차 성능지수의 상한 값이 공칭 시스템에 대한 2차 성능지수 (7)의 몇 배인지를 나타내는 결과이다.

정리 1:
불확정성 (2)를 갖는 불확정 시스템 (1)에 공칭 폐루프 시스템 (6)의 점근적 안정성을 보장하는 제어기 (10)을 적용하여 얻은 불확정성 폐루프 시스템 (11)을 생각하자. 또한, 양확정행렬 P를 (8)의 해라하고, $\Omega \in R^{n \times n}$과 스칼라 $\gamma > 0$를 다음으로 정의하자

$$\begin{aligned} \Omega(\varepsilon, P) &\equiv \varepsilon (E_1 - E_2 K)^T (E_1 - E_2 K) + \frac{1}{\varepsilon} P D D^T P \\ \gamma(\varepsilon, P) &\equiv 1 - \lambda_{\max}[(Q + K^T R K)^{-1/2} \Omega(\varepsilon, P) \\ &\qquad \cdot (Q + K^T R K)^{-1/2}] \end{aligned} \tag{12}$$

만약, $\gamma(\varepsilon, P) > 0$이 되게 하는 $\varepsilon > 0$이 존재하면 불확정성 폐루프 시스템 (11)은 점근적으로 안정하고, 또한 이 불확정성 폐루프 시스템 (11)에 대한 (3)에 정의된 2차 성능지수는 다음으로 주어진다.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \\ &\le \frac{1}{\gamma(\varepsilon, P)} x_0^T P x_0 = \frac{1}{\gamma(\varepsilon, P)} J^o \end{aligned} \tag{13}$$

여기서 J^o는 (7)에 정의된 공칭 시스템에 대한 (3)에 정의된 2차 성능지수이다.

증명 :

먼저, 행렬 $P > 0$를 (8)의 해라하고, $V(x) = x^T P x$라하자. 그리고 불확정성 폐루프 시스템 (11)의 궤적에 따른 이의 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot V(x) &= x^T[(A - BK)^T P + P(A - BK) \\ &\quad + (E_1 - E_2 K)^T F^T(t) D^T P + P D F(t)(E_1 - E_2 K)] x \\ &\le x^T[-Q - K^T R K + \varepsilon (E_1 - E_2 K)^T (E_1 - E_2 K) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} P D F(t) F^T(t) D^T P] x \\ &\le x^T[-Q - K^T R K + \varepsilon (E_1 - E_2 K)^T (E_1 - E_2 K) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} P D D^T P] x \\ &= x^T[-(Q + K^T R K) + \Omega(\varepsilon, P)] x \\ &= -x^T (Q + K^T R K)^{1/2} [I_n - (Q + K^T R K)^{-1/2} \Omega(\varepsilon, P) \\ &\quad \cdot (Q + K^T R K)^{-1/2}] (Q + K^T R K)^{1/2} x \\ &\le -\lambda_{\min}[I_n - (Q + K^T R K)^{-1/2} \Omega(\varepsilon, P) \\ &\quad \cdot (Q + K^T R K)^{-1/2}] x^T (Q + K^T R K) x \\ &= -\gamma(\varepsilon, P) x^T (Q + K^T R K) x \end{aligned}$$

여기서, $\gamma(\varepsilon, P) > 0$ 이므로 위의 불확정성 폐루프 시스템 (11)은 Lyapunov 안정성 정리에 의하여 점근적으로 안정하고, 따라서 $\lim_{t \to \infty} V(x(t)) \to 0$이다. 그리고 위의 관계식으로부터 다음을 얻고,

$$x^T (Q + K^T R K) x(t) \le -\frac{1}{\gamma(\varepsilon, P)} \dot V(x)$$

따라서, 불확정성 폐루프 시스템 (11)에 대한 (3)에 정의된 2차 성능지수의 상한은 다음으로 구하여진다.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \\ &= \int_0^\infty [x^T (Q + K^T R K) x] dt \\ &\le -\frac{1}{\gamma(\varepsilon, P)} \int_0^\infty \dot V(x) dt \\ &= \frac{1}{\gamma(\varepsilon, P)} V(x(0)) = \frac{1}{\gamma(\varepsilon, P)} x_0^T P x_0 = \frac{1}{\gamma(\varepsilon, P)} J^o \end{aligned}$$

여기서, $\lim_{t \to \infty} V(x(t)) \to 0$이 이용되었고, J^o는 (7)에 있는 공

칭 시스템에 대한 2차 성능지수이다. ■■■

Remark 1: 위의 정리1은 불확정성 폐루프 시스템 (11)의 2차 성능지수의 상한을 공칭 시스템의 2차 성능지수 값의 몇 배($J = \frac{1}{\gamma(\varepsilon, P)} J^o$)의 형태로 제시하였다. 이의 상한을 최소화하기 위하여는 (12)에 있는 $\gamma(\varepsilon, P) > 0$를 최대로 하는 $\varepsilon > 0$을 택하여야하는 데, 이는 잘 알려진 제어용 툴인 MATLAB™을 이용하면 쉽게 구할 수 있다(다음의 수치 예제 참조).

다음으로는 폐루프 공칭시스템 (5)의 점근적 안정성을 보장하는 제어기 (10)을 불확정성 시스템 (1)에 가하여 얻어진 불확정성 폐루프 시스템 (11)의 점근적 안정성을 보장하고, (3)에 정의된 2차 성능지수의 상한을 공칭 시스템의 성능지수의 함수의 몇 배 형태가 아닌 일반적인 형태의 2차 성능지수의 상한을 제시한다.

정리 2:

불확정성 (2)를 갖는 불확정 시스템 (1)에 공칭 폐루프 시스템 (6)의 점근적 안정성을 보장하는 제어기 (10)을 적용하여 얻은 불확정성 폐루프 시스템 (11)을 생각하자. 그리고 $\Omega \in R^{n \times n}$을 다음으로 정의하자.

$$\Omega(\varepsilon, \hat{P}) \equiv \varepsilon (E_1 - E_2 K)^T (E_1 - E_2 K) + \frac{1}{\varepsilon} \hat{P} D D^T \hat{P} \tag{14}$$

만약, 다음을 만족하는 스칼라 $\varepsilon > 0$과 양확정행렬 $\hat{P}$가 존재하면

$$(A - BK)^T \hat{P} + \hat{P}(A - BK) + \Omega(\varepsilon, \hat{P}) + Q + K^T R K \le 0 \tag{15}$$

불확정성 폐루프 시스템 (11)은 점근적으로 안정하고, 또한 이 불확정성 폐루프 시스템에 대한 (3)의 2차 성능지수의 상한은 다음으로 주어진다.

$$J = \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \le x_0^T \hat{P} x_0 \tag{16}$$

여기서 행렬 $\hat{P} > 0$는 (15)를 만족하는 행렬이다.

증명 :

먼저 $\hat{P} > 0$는 (15)를 만족하는 행렬이라 하고, $V(x) = x^T \hat{P} x$ 라하자. 그리고 불확정성 폐루프 시스템 (11)의 궤적에 따른 이의 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= x^T [(A - BK)^T \hat{P} + \hat{P}(A - BK) + (E_1 - E_2 K)^T \\
&\quad \cdot F^T(t) D^T \hat{P} + \hat{P} D F(t) (E_1 - E_2 K)] x \\
&\le x^T [(A - BK)^T \hat{P} + \hat{P}(A - BK) + \varepsilon (E_1 - E_2 K)^T \\
&\quad \cdot (E_1 - E_2 K) + \frac{1}{\varepsilon} P D F(t) F^T(t) D^T \hat{P}] x \\
&\le x^T [(A - BK)^T \hat{P} + \hat{P}(A - BK) + \varepsilon (E_1 - E_2 K)^T \\
&\quad \cdot (E_1 - E_2 K) + \frac{1}{\varepsilon} P D D^T \hat{P}] x \\
&= x^T [(A - BK)^T \hat{P} + \hat{P}(A - BK) + \Omega(\varepsilon, P)] x \\
&\le -x^T (Q + K^T R K) x
\end{aligned}$$

따라서 Lyapnov 안정성 정리에 의하여 시스템 (1)은 안정하고, $\lim_{t \to \infty} V(x(t)) \to 0$이다. 또한 위의 관계식으로부터 다음을 얻고,

$$x^T [Q + K^T R K] x \le -\dot{V}(x)$$

따라서 불확정성 폐루프 시스템 (11)에 대한 (3)에 정의된 2차 성능지수의 상한은 다음으로 주어진다.

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \\
&= \int_0^\infty [x^T (Q + K^T R K) x] dt \\
&\le \int_0^\infty -\dot{V}(x) dt \\
&= V(x(0)) = x_0^T \hat{P} x_0
\end{aligned}$$

여기서, $\lim_{t \to \infty} V(x(t)) \to 0$이 이용되었고, $\hat{P} > 0$는 (15)를 만족하는 행렬이다. ■■■

Remark 2: 위의 정리2는 불확정성 폐루프 시스템 (11)의 2차 성능지수의 상한을 정리1과는 다르게 공칭 시스템의 2차 성능지수의 몇 배 형태가 아닌 일반적인 형태로 제시되었다. 따라서 이의 2차 성능지수와 공칭시스템의 2차 성능지수와의 관계는 직접적으로 비교가 곤란하고, 이의 기대치인 트레이스로 비교하여야한다. 또한 (16)에 제시된 2차 성능지수의 상한을 최소화하는 것은 이의 기대치($\mathrm{Tr}(\hat{P})$)를 최소화하는 것이고, 이는 (15)식을 만족하면서 $\mathrm{Tr}(\hat{P})$를 최소화하는 (14)식의 $\varepsilon > 0$를 선택하는 문제이다. 이는 Remark 1에서 언급한 바와 같이 MATLAB™를 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

Remark 3: 수정된 Riccati 방정식인 수식 (15)를 만족하는 양확정 행렬 $\hat{P}$의 존재 조건은 참고문헌[15, pp.108]에 있는 필요충분조건 한정된 실수 정리(Bounded Real Lemma)에 의하여 쉽게 확인할 수 있다.

위에서는 주어진 공칭 시스템의 점근적 안정성을 보장하는 제어기를 불확정성 시스템 (1)에 적용하여 얻은 불확정성 폐루프 시스템 (11)에 대한 (3)에 정의된 2차 성능지수의 상한에 대한 결과를 두 개의 정리 형태로 제시하였다. 다음으로는 주어진 2차성능함수를 보장하는 제어기를 설계하는 강인 성능보장 제어기 설계에 관한 결과를 제시한다. 즉, 2차 성능지수의 상한을 규정하는 양확정행렬 $\tilde{P} > 0$가 주어져 불

확정성 폐루프 시스템 (11)에 대한 (3)에 정의된 2차 성능지수가 $J \le x_0^T \widetilde{P} x_0$ 가 되도록 하는 제어기 (10)를 구하는 강인 성능 보장 제어기 설계에 관한 결과를 제시한다.

정리 3:

불확정성 (2)를 갖는 불확정 시스템 (1)을 생각하자. 만약, 주어진 성능보장 양확정행렬 $\widetilde{P}>0$에 대하여 다음을 만족하는 $\epsilon_1>0$, $\epsilon_2>0$, $\rho>0$가 존재하면

$$A^T\widetilde{P} + \widetilde{P}A + \frac{1-2\rho}{\rho^2}\widetilde{P}B(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}B^T\widetilde{P} + (\epsilon_1+\epsilon_2)\widetilde{P}DD^T\widetilde{P} + Q + \frac{1}{\epsilon_1}E_1^TE_1 \le 0 \tag{17}$$

다음의 상태 궤환 제어기는

$$u(t) = -Kx(t)\ ;\ K = \frac{1}{\rho}(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}B^T\widetilde{P} \tag{18}$$

불확정성 시스템 (1)를 점근적으로 안정화하고, 또한 이 불확정성 폐루프 시스템의 (3)에 정의된 2차 성능지수는 원하는 2차 성능지수인 다음을 갖는다.

$$J \le x_0^T\widetilde{P}x_0 \tag{19}$$

여기서 $\widetilde{P}>0$은 불확정성 폐루프 시스템의 2차성능보장 행렬이다.

증명 :

먼저, $\widetilde{P}>0$를 불확정성 폐루프 시스템의 2차성능보장 행렬이라 하고, $V(x)=x^T\widetilde{P}x$라하자. 그리고 불확정성 시스템 (1)에 설계된 제어기 (18)를 적용하여 얻어진 불확정성 폐루프 시스템 (11)의 궤적에 따른 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= x^T[(A-BK)^T\widetilde{P} + \widetilde{P}(A-BK) + (E_1-E_2K)^T \\
&\quad \cdot F^T(t)D^T\widetilde{P} + \widetilde{P}DF(t)(E_1-E_2K)]x \\
&\le x^T[(A-BK)^T\widetilde{P} + \widetilde{P}(A-BK) \\
&\quad + (\epsilon_1+\epsilon_2)\widetilde{P}DD^T\widetilde{P} + \frac{1}{\epsilon_1}E_1^TE_1 \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon_2}K^TE_2^TE_2K]x \\
&= x^T[(A^T\widetilde{P} + \widetilde{P}A - K^TB^T\widetilde{P} \\
&\quad - \widetilde{P}BK + (\epsilon_1+\epsilon_2)\widetilde{P}DD^T\widetilde{P} \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon_1}E_1^TE_1 + \frac{1}{\epsilon_2}K^TE_2^TE_2K]x
\end{aligned}$$

여기에 설계된 제어기 (18)를 인가하고, 조건 (17)을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &\le x^T[A^T\widetilde{P} + \widetilde{P}A - \frac{2}{\rho}\widetilde{P}B(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1} \\
&\quad \cdot B^T\widetilde{P} + (\epsilon_1+\epsilon_2)\widetilde{P}DD^T\widetilde{P} + \frac{1}{\epsilon}E_1^TE_1 \\
&\quad + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{P}B(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2\right) \\
&\quad \cdot (R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}B^T\widetilde{P}]x \\
&\le x^T[-Q - \frac{1}{\rho^2}\widetilde{P}B(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}B^T\widetilde{P} \\
&\quad + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{P}B(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2\right) \\
&\quad \cdot (R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}B^T\widetilde{P}]x \\
&\le x^T[-Q - \frac{1}{\rho^2}\widetilde{P}B(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}B^T\widetilde{P} \\
&\quad + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{P}B(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1} \\
&\quad \cdot (R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}B^T\widetilde{P} \\
&\quad - \frac{1}{\rho^2}\widetilde{P}B(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1} \\
&\quad \cdot R(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}B^T\widetilde{P}]x \\
&= x^T[-Q - \frac{1}{\rho^2}\widetilde{P}B(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1} \\
&\quad \cdot R(R+\frac{1}{\epsilon_2}E_2^TE_2)^{-1}B^T\widetilde{P} \\
&= -x^T(t)[Q+K^TRK]x(t)
\end{aligned}$$

따라서 주어진 양확정행렬 $\widetilde{P}>0$에 대하여 (17)을 만족하는 $\epsilon_1>0$, $\epsilon_2>0$, $\rho>0$가 존재하면 위에서 설계된 제어기 (18)을 가지는 불확정성 폐루프 시스템 (11)은 Lyapunov 안정성 정리에 의해 점근적으로 안정하다. 따라서 $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) \to 0$이다. 위로부터 다음을 얻게 되어

$$x^T(Q+K^TRK)x \le -\dot{V}(x)$$

위에서 설계된 제어기 (18)을 가지는 불확정성 폐루프 시스템 (11)에 대한 (3)에 정의된 성능지수의 상한은 다음이 된다.

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \\
&= \int_0^\infty [x^T(Q+K^TRK)x]dt \\
&\le \int_0^\infty -\dot{V}(x)dt \\
&= V(x(0)) = x_0^T\widetilde{P}x_0
\end{aligned}$$

여기서, $\widetilde{P}>0$는 주어진 성능보장 양확정행렬이다.

■■■

Remark 4: 위의 정리3은 불확정성 폐루프 시스템 (11)의 2

차 성능지수의 상한이 원하는 값인 $J \le x_0^T \widetilde{P} x_0$를 만족하도록 하는 제어기 (10)의 설계에 관한 결과이다. 여기서 원하는 2차 성능지수의 값은 공칭시스템에 대한 최적제어를 행하였을 때의 값인 $J^{opt} = x_0^T P^o x_0$보다는 큰 값이어야 한다. 또한, 주어진 원하는 2차 성능지수 행렬 $\widetilde{P} > 0$에 대하여 (17)을 만족하는 $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\rho > 0$가 존재하여야, 정리3에 의하여 제어기를 설계할 수 있다. 이의 존재 여부는 잘 알려진 MATLAB™을 이용하여 (17)의 왼편 행렬의 최대 고유치를 최소화하는 $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\rho > 0$를 구하면 쉽게 해결할 수 있다.

3. 수치 예제

여기에서는 위에서 제시된 결과의 유용성을 보이는 수치 예제를 보인다. 먼저 예제1은 강인 성능 제어기 해석에 관한 예제이고, 예제2는 강인 성능 보장 제어기 설계에 관한 예제이다.

예제 1:

강인 성능 보장 제어기 해석에 관한 예제로써 다음의 불확정성을 포함하는 선형 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t) \tag{19.1}$$

여기서

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \Delta B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{19.2}$$

그리고 (3)에 정의된 2차 성능지수는 다음으로 하자.

$$J = \int_0^\infty [x^T Q x + u^T R u] dt \ ; \ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1 \tag{20}$$

먼저 불확정성이 없는 공칭시스템에 대하여 생각하자. 이 공칭 시스템은 개루프상태에서 $\lambda_i(A) = \{0, 0\}$이기에 불안정하다. 여기에 극배치(pole assignment) 제어를 행하여 폐루프 시스템의 극점이 $\lambda_i(A - BK) = \{-1, -1\}$ 되도록 하는 상태제어기를 구하면 다음이 되고,

$$u(t) = -Kx(t); \ K = [2 \ \ 3] \tag{21}$$

이 공칭 시스템에 대하여 수식 (20)에 정의된 2차 성능지수를 구하면 다음이 된다.

$$J^o = x_0^T P x_0 \ ; \ P = \begin{bmatrix} 1.75 & 1 \\ 1 & 1.75 \end{bmatrix}; \ \mathrm{E}\{J^o\} = 3.5$$

다음으로 위의 제어기 (21)을 불확정성이 있는 시스템 (19)에 적용하여 얻어진 불확정 폐루프 시스템에 대하여 (20)에 정의된 2차 성능지수의 상한을 구하자. 먼저 정리 1에서 γ를 최대로 하는 $\varepsilon > 0$을 구하면 $\varepsilon = 28.5$를 얻게 되고, 이를 (12)에 적용하면 $\gamma = 0.5634$를 얻게 수식 (13)에 의하여 이 불확정성 폐루프 시스템의 2차 성능지수의 상한은 다음으로 주어진다.

$$J \le J^1 \equiv \frac{1}{\gamma} x_0 P x_0 = 1.7749 \times J^o \ ; \ \mathrm{E}\{J^1\} = 6.2121$$

다음으로 정리2를 이용하여 이를 구하기 위하여 (15)를 만족하는 $\mathrm{Tr}(\widehat{P})$를 최소로 하는 $\varepsilon > 0$을 구하면 $\varepsilon = 15.5$을 얻게되고 이 때의 $\widehat{P} > 0$ 및 2차 성능지수의 상한은 (15) 및 (16)에 의하여 다음으로 주어진다.

$$J \le J^2 \equiv x_0^T \hat{P} x_0 \ ; \ \hat{P} = \begin{bmatrix} 1.9925 & 1.1660 \\ 1.1660 & 1.9582 \end{bmatrix} \ ; \ \mathrm{E}\{J^2\} = 3.9507.$$

위의 결과를 비교하기 위한 기대치 $E\{J\}$가 다음의 표1에 있다.

표 1. 2차 성능지수의 기대치 비교

Table 1. Expected values of quadratic performance index

	공칭 시스템	정리1의 결과	정리2의 결과
기대치 (Expected value)	$\mathrm{E}\{J^o\} = 3.5$	$\mathrm{E}\{J^1\} = 6.2121$	$\mathrm{E}\{J^2\} = 3.950$

예제 2:

여기에서는 원하는 성능지수를 보장하는 강인 성능보장 제어기 설계에 관한 예제이다. 대상 시스템은 위의 예제 1의 시스템 (19)이다. 시스템 (19)의 공칭 시스템에 대하여 2차성능 지수 (20)를 최소화하는 값을 최적제어를 이용하여 구하면 다음이 된다.

$$u(t) = -Kx(t); \ K = [1 \ \ 1.7321]$$

$$J^{opt} = x_0^T P x_0 \ ; \ P^o = \begin{bmatrix} 1.7321 & 1 \\ 1 & 1.7321 \end{bmatrix} \ ; \ \mathrm{E}\{J^{opt}\} = 3.4641$$

다음은 불확정성 시스템 (19)의 원하는 2차 성능지수가 다음으로 주어진 경우

$$J = x_0^T \tilde{P} x_0 \ ; \ P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \ ; \ \mathrm{E}\{J\} = 4$$

이 불확정성 시스템의 점근적 안정성이 보장되고, 또한 이의 (20)에 정의된 2차 성능지수가 위의 값이 되도록 보장하는 제어기를 구하는 것이다. 이를 위하여 정리3을 이용하면, 조건 (17)에서 다음을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1 - 2\rho}{\rho^2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + 0.0001} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \le 0$$

여기서 편의상 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$로 하면 위의 조건은 다음이 된다.

$$\begin{bmatrix} 5.01 & 10 \\ 10 & 19 \end{bmatrix} + \frac{1-2\rho}{\rho^2} \cdot \frac{1}{1.0001} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \le 0$$

따라서 $\rho \le 0.2895$이면 위의 조건을 만족한다. 따라서 정리3의 조건 (18)에 의하여 다음의 상태 궤환 제어기는

$$u(t) = -Kx(t);\ K = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{1.0001} \cdot [1 \ \ 2],\ \rho \le 0.2895$$

위의 불확정성 시스템 (19)의 점근적 안정성을 보장하고, 또한 (20)에 정의된 2차 성능지수 값을 원하는 값인 $E\{J\} = 4$를 보장하는 강인 성능 보장 제어기이다.

4. 결 론

이 논문에서는 불확정성을 갖는 선형 시스템의 강인 성능 보장 제어기의 해석 및 설계에 관하여 다루었다. 여기서 강인 성능 보장 제어기는 불확정성이 존재함에도 불구하고 주어진 성능을 보장하는 제어기를 말한다. 먼저, 불확정성을 가지는 시스템에 대하여 2차 가격함수의 상한을 제시하였다. 제시된 상한은 두 가지로써, 하나는 공칭시스템의 가격함수의 몇 배 형태를 가지며, 또 다른 하나는 공칭 공칭시스템의 가격함수로 표시되지 않는 상한이다. 다음으로는 주어진 성능함수를 만족하는 강인 성능 보장 제어기를 다루었으며, 불확정성을 가지는 선형 시스템에서 주어진 2차성능함수를 보장하도록 하는 제어기의 설계에 관한 결과를 제시하였다. 끝으로 제시된 강인 성능 제어기 설계 및 해석에 관한 결과는 각각 수치 예제를 통하여 이들의 유용성을 보였다.

참 고 문 헌

[1] R.V. Patel and M. Toda, "Quantitative measures of robustness for multivariable systems", in *Proc. Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, CA, TP8-A, 1980.

[2] R.K. Yedavalli, "Perturbation bounds for robust stability in linear state space models", *Int. J. Control,* Vol.42, pp.1507-1517, 1985.

[3] M. E. Sezer and D. D. Siljak, "A note on robust stability bounds," *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol.AC-34, no.11, pp.1212-1214, 1989.

[4] Z. Bien and J.-H. Kim, "A Robust Stability Bound of Linear Systems with Structured Uncertainty", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.37, no.10, pp.1549-1551, 1992.

[5] S.S.L. Chang and T.K.C. Peng, "Adaptive guaanteed cost control of systems with uncertain parameters", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol-17, pp.474-483, 1972.

[6] D.S. Bernstein, W.M. Haddad, "LQG control with an H_∞ performance bound: A Riccati equation approach, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol-34, pp.293-305, 1989.

[7] O.I. Kosmidou, "Robust stability and performance of systems with structured and bounded uncertainties: and extension of the guarateed cost control approach", *Int. J. Control*, vol52, pp627-640, 1990.

[8] I.R. Petersen and D.C. McFarlane, "Optimal Guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems", *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol-39, pp.1971-1977, 1994.

[9] I.R. Petersen, "Guaranteed Cost LQG control of Uncertain Linear Systems", *Proc. IEE, Pt. D*, 1995.

[10] S.O.R. Moheimani and I.R. Petersen, "Optimal guaranteed cost control of uncertain systems via static and dynamic output feedbaack", *Automatica*, vol32, pp.575-579, 1996.

[11] A. Fishman, J.M. Dion, L. Dugard and A.T. Neto, "A linear matrix inequality approach for guaranteed cost control", *Proc. of 13th Triennial World Congree*, Sanfrancisco, pp.197-202, 1996.

[12] J.-H. Kim, "Robust stability of linear systems with delayed perturbations", *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol-41, pp.1820-1822, 1996.

[13] A. R. Amir-Moez, "Extreme properties of eigenvalues of a hermitian transformation and singular values of the sum and product of linear transformations", *Duke Math. J.*, vol.23, pp.463-467, 1956.

[14] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal control systems*, New York: Willey, 1972.

[15] M. Green and D.J.N. Limebeer, Linear robust control, Prentice-Hall, 1996.

저 자 소 개

김 진 훈 (金 鎭 勳)

1961년 10월 8일생. 1985년 공대 전기공학과 졸업. 1985년~1987년 신영전기(주) 연구원 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(석사). 1993년 동 전기미 전자공학과 졸업(공박). 1993년~1994년 경상대 공대 제어계측공학과 전임강사. 현재 충북대학교 전기전자공학부 조교수.

Tel : (0431) 261-2387

E-mail : jinhkim@cbucc.chungbuk.ac.kr