

## ◎ 논문

# Moody 마찰계수식을 사용한 래버린스 실의 회전체 동역학적 해석

하태웅\*

Rotordynamic Analysis of a Labyrinth Seal Using  
the Moody's Friction-Factor Model

Tae Woong Ha\*

*Key Words:* Rotordynamic Coefficient(회전체동역학적 특성계수), Labyrinth Seal(래버린스 실), Moody Friction-Factor Model(무디 마찰계수식), Leakage(누설량)

## ABSTRACT

The leakage and rotordynamic coefficients of see-through type gas labyrinth seals are determined using a two-control-volume-model analysis with Moody's wall-friction-factor formula which is defined with a large range of Reynolds number and relative roughness. Jet flow theory are used for the calculation of the recirculation velocity in the cavity. For the reaction force from the labyrinth seal, linearized zeroth-order and the first-order perturbation equations are developed for small motion about a centered position. The leakage and rotordynamic coefficient results of the present analysis are compared with Scharrer's theoretical analysis using Blasius' wall-friction-factor formula and Pelletti's experimental results. The comparison shows that the present analysis using Moody's wall-friction-factor formula and Scharrer's theoretical analysis using Blasius' wall-friction-factor formula give the same results for a smooth seal surface and the range of Reynolds number less than  $10^5$ .

## 1. 서 론

고성능 압축기 및 가스(증기) 터빈과 같은 터보기계의 실(seal) 요소로서, 래버린스 실(labyrinth seal)은 비교적 제작비가 저렴하고, 밀봉 특성이 우수하기 때문에 효율을 향상시킬 수 있는 장점이 있어 가장 보편적으로 사용되고 있다. 그러나 래버린스 실을 통한 불안정화 유체력으로 인하여 회전축계의 불안정 진동을 유발하는 원인이 되기 때문에 래버린스 실을 통한 유체

력의 정밀한 해석이 요구되고 있어 많은 연구결과<sup>(1,6)</sup>가 발표되었다. 특히 Iwatsubo<sup>(2)</sup>는 래버린스 공동(cavity)에 한 개의 제어체적을 설정한 one-control-volume model을 사용하여 간략화된 해석결과를 제시하였고, 최근 Scharrer<sup>(5)</sup>와 하 등<sup>(6)</sup>은 래버린스 실에서 유체의 흐름형상을 고려한 two-control-volume model 해석을 통하여 개선된 결과를 보여주었다.

래버린스 실의 이론적 해석은 일반적으로 실 틈새에서의 유속 분포를 평균 유속을 갖는 균일 유동으로 가정하는 벌크유동(bulk flow)개념을 사용하며, 유체접성에 의한 손실은 단지 시일 표면에서의 전단응력으로 표현되며

\* 경원대학교 기계설계학과

때문에 표면 마찰계수의 정의는 래버린스 실 해석의 정확도 및 해석 프로그램 사용의 용이성 면에서 매우 중요하다. 실의 해석에서는 원관 유동의 표면마찰계수를 정의하는 식 (1)에 나타낸 Moody 마찰계수 식과 일부 제한된 레이놀즈 수 범위에서만 정의된 식 (2)의 Blasius 마찰계수 식이 사용될 수 있다. 지금까지 래버린스 실의 이론적 해석에서는 비교적 단순하기 때문에 레이놀즈 수 만의 함수인 Blasius의 마찰계수 식이 사용되었으나, 이 식은 실 표면의 거칠기에 따른 상수  $n$ 과  $m$ 을 실험에 의해 구하여야 하며, 매끈한 표면의 경우에도 일부 레이놀즈 수 범위에서만 Moody 식의 결과와 일치하고 표면 거칠기가 증가할수록 차이가 커지는 단점이 있다<sup>(7)</sup>. 반면에 Moody 식은 레이놀즈 수와 표면 절대거칠기( $e$ )에 대한 관 지름( $D$ )비인 상대거칠기( $\frac{e}{D}$ )의 함수로서 정의된 원관 유동의 대표적인 표면 마찰계수 식이다.

$$f_M = 0.00137 \left[ 1 + (20000 \times \frac{e}{D} + \frac{10^6}{Rey})^{\frac{1}{3}} \right] \quad (1)$$

$$f_B = n (Rey)^m \quad (2)$$

Fig. 1은 매끈한 원관 유동에서 레이놀즈 수에 대한 Moody 식과 Blasius 식의 표면 마찰계수를 비교하고 있다. 매끈한 관의 경우  $n=0.079$ ,  $m=-0.25$ 를 사용하였으며,  $\frac{e}{D}=0.0001$ 을 사용하였다. Fig. 1에 나타낸 것처럼 Blasius 마찰계수 식은 레이놀즈 수  $1 \times 10^5$  범위까지

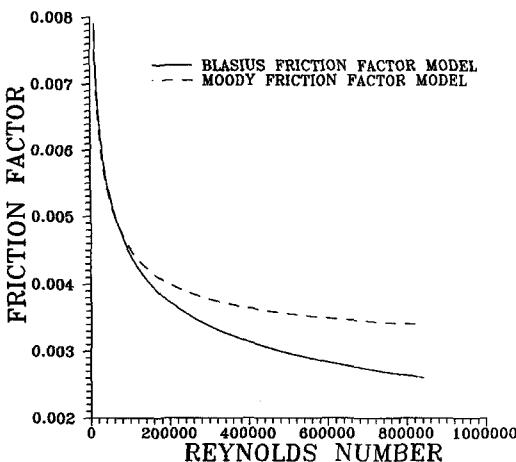


Fig. 1 Friction factor vs. Reynolds number

지는 Moody 마찰계수 식과 거의 같은 결과를 보이지만, 그 이상의 레이놀즈 수 범위에서는 오차가 커지는 것을 알 수 있다.

실의 이론적 해석에서 Moody 마찰계수 식의 사용은 실의 넓은 흐름조건에 대하여 해석의 정확도를 높일 수 있고, 또한 실의 표면거칠기에 따른 상대거칠기 만이 입력데이터로 요구됨으로 다양한 실에 대하여 편리하게 사용할 수 있는 장점이 있다. 따라서 본 연구에서는 기 발표된 two control volume model 해석방법<sup>(5,6)</sup>에서 표면 마찰계수로 Moody의 마찰계수 식을 사용한 래버린스 실의 동특성계수 해석기법과 그 결과를 제시하고자 한다.

## 2. Two-Control-Volume 해석

Fig. 2는 래버린스 이(tooth)가 회전체(rotor)에 있는 teeth-on-rotor 래버린스 실의 형상을 보여주고 있으며, Fig. 3은 래버린스 실의 수학적 모델링을 위하여 래버린스 이 상부와 고정자(stator) 사이에 제트부 제어체적을, 공동내에 와류부 제어체적을 설정한 two-control volume 설정 모습을 보여주고 있다.

Fig. 2에서  $R_s$ ,  $B$ ,  $L_i$ ,  $T_p$ ,  $C_r$ 는 각각 회전체의 원주 방향 반경, 래버린스 이의 깊이, 래버린스 이의 피치(pitch), 래버린스 이 선단부의 두께, 래버린스 실 틈새를 나타낸다. Fig. 3에서 사용된 변수  $P$ ,  $W$ ,  $U$ ,  $\dot{m}$ 은 각각 압력, 원주방향 유속, 축방향 유속, 질량유량을 나타낸다. 각 변수의 아래첨자에 사용된 숫자 1, 2는 각각 제어체적 I, 제어체적 II의 변수임을 나타내며, 아래첨자  $i$ 는  $i$  번째 래버린스 공동을 의미한다.

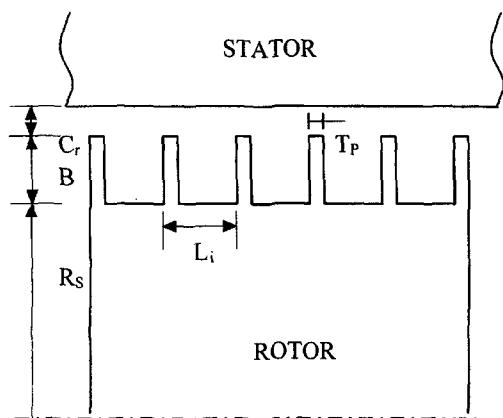


Fig. 2 Labyrinth seal geometry

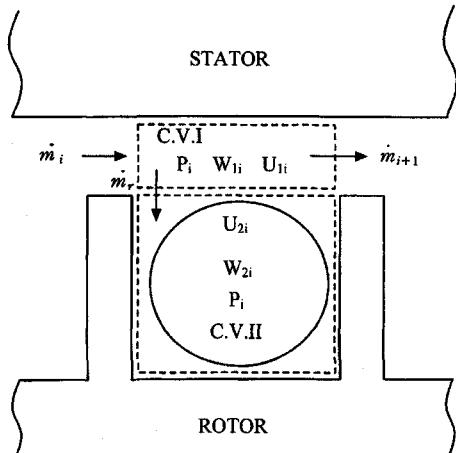


Fig. 3 Definition of two-control-volume

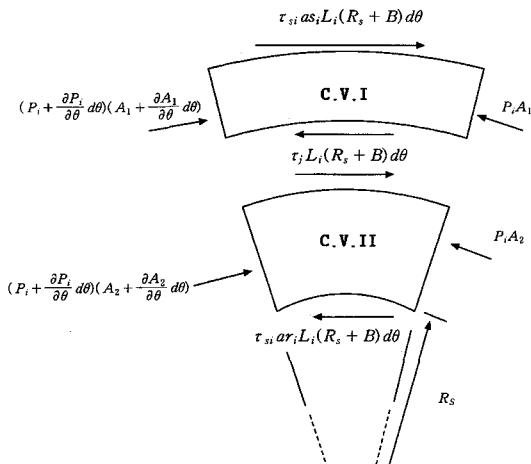


Fig. 4 Forces on control volumes

Fig. 4는 Fig. 3에서 정의된 제어체적에 작용하는 힘의 관계를 보여주고 있다. 여기서  $A$ 는 원주방향 제어체적의 단면적,  $\tau_s$ ,  $\tau_r$ ,  $\tau_j$ 는 각각 고정자 표면의 전단응력, 회전체표면의 전단응력, 제어체적 I, II 사이의 전단응력을 나타낸다.

Fig. 4에 보인 단위 원주방향 폭의 제어체적에 대한 연속방정식이 식 (3)에 나타나 있다.

$$\frac{\partial(\rho A_1)}{\partial t} + \frac{1}{R_s + B} \frac{\partial(\rho W_1 A_1)}{\partial \theta} + \dot{m}_{i+1} - \dot{m}_i + \frac{\partial(\rho A_2)}{\partial t} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial(\rho W_2 A_2)}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

여기서  $\rho$ 는 밀도를 나타내며,  $A_1=L_i$   $C_r$ ,  $A_2=L_i$   $B$

이다. 제어체적에 작용하는 힘의 평형으로부터 원주방향의 운동량 방정식을 유도하면, 식 (4)와 식 (5)로 나타낼 수 있다.

#### 제어체적 I :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho W_1 A_1}{\partial t} + \frac{2\rho W_1 A_1}{R_{s+B}} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} + \frac{\partial W_1^2}{R_{s+B}} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \\ & + \frac{W_1^2 A_1}{R_{s+B}} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \dot{m}_r W_{oi} + \dot{m}_{i+1} W_{1i} \\ & - \dot{m}_i W_{1i-1} = - \frac{A_1}{R_{s+B}} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} + \tau_j L_i \\ & - \tau_{si} as_i L_i \end{aligned} \quad (4)$$

#### 제어체적 II :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho W_2 A_2}{\partial t} + \frac{2\rho W_2 A_2}{R_s} \frac{\partial W_2}{\partial \theta} + \frac{\partial W_2^2}{R_s} \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \\ & + \frac{W_2^2 A_2}{R_s} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - \dot{m}_r W_{oi} \\ & = - \frac{A_2}{R_s} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} - \tau_j L_i + \tau_{ri} ar_i L_i \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $as$ 와  $ar$ 은 각각 고정자와 회전체에서 전단응력이 작용되는 무차원화된 길이로써  $as_i=1$ ,  $ar_i=(2B+L_i)/L_i$ 이며  $W_{oi}$ 는 제어체적 경계면의 원주방향 유속이다. 식 (4)와 (5)에 포함된 고정자 표면의 원주방향 전단응력  $9\tau_{si}$ 와 회전체표면의 원주방향 전단응력  $\tau_{ri}$ 는 기 발표된 논문<sup>(5,6)</sup>에서 사용한 식 (2)의 Blasius 마찰계수 식 대신에 식 (1)의 Moody 마찰계수 식을 사용하면, 식 (6)과 (7)로 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_{si} &= \frac{1}{2} \rho \sqrt{W_{1i}^2 + U_{1i}^2} W_{1i} \times 0.00137 \\ & \left[ 1 + \left( 20000 \times \frac{e}{Dh_{1i}} + \frac{10^6 \cdot \nu}{Dh_{1i} \sqrt{W_{1i}^2 + U_{1i}^2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (6) \\ Dh_{1i} &= \frac{2 C_r L_i}{(C_r + L_i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{ri} &= \frac{1}{2} \rho \sqrt{(R_s \omega - W_{2i})^2 + U_{2i}^2} (R_s \omega - W_{2i}) \times 0.00137 \\ & \left[ 1 + \left( \frac{20000 \cdot e}{Dh_{2i}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \\ & \left[ \frac{10^6 \cdot \nu}{Dh_{2i} \sqrt{(R_s \omega - W_{2i})^2 + U_{2i}^2}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (7) \\ Dh_{2i} &= \frac{2 B L_i}{(B + L_i)} \end{aligned}$$

여기서  $Dh_{li}$  와  $Dh_{ri}$ 는 각각 제어체적 I과 II의 수력지름의 정의이다. 제어체적 I의 축방향 유속은  $U_1 = \dot{m}/\rho C_r$ , 로 나타낼 수 있다. 식 (4)와 (5)에 포함된 제어체적의 경계면에서의 전단응력  $\tau_j$ 와 원주방향 속도성분  $W_{oi}$  및 식 (7)에 포함된 래버린스 공동 내의 와류속도 성분  $U_2$ 는 Abramovich<sup>(8)</sup>의 일차원 난류 제트 흐름의 속도분포 식과 혼합두께와 경계층 두께의 비( $y/b$ )를 0.5로 가정함에 의해 식 (8)~(10)으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_j &= 0.142 \rho_i \sqrt{(W_{2i} - W_{1i})^2 + (U_{2i} - U_{1i})^2} \\ &\quad \cdot (W_{2i} - W_{1i})) \end{aligned} \quad (8)$$

$$W_{oi} = W_{1i} + 0.208 (W_{2i} - W_{1i}) \quad (9)$$

$$U_{2i} = 0.206 U_{1i} \quad (10)$$

이상기체의 상태방정식과 등온변화의 가정으로부터 밀도  $\rho$ 는 식 (11)로 대체될 수 있다.

$$\rho_i = \frac{p_i}{RT} \quad (11)$$

여기서 R은 기체상수이며, T는 절대온도이다. 질량흐름을  $\dot{m}_i$  는 Neumann<sup>(9)</sup>의 실험식에 의해 식 (12)로 나타낼 수 있으며, 이때 운동에너지 carryover 상수  $\mu_{2i}^{(10)}$ 와 유동계수(flow coefficient)  $\mu_{1i}^{(11)}$ 는 식 (13)과 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{m}_i = \mu_{1i} \mu_{2i} H_i \sqrt{\frac{p_{i-1}^2 - p_i^2}{RT}} \quad (12)$$

$$\mu_{2i} = 1 / [1 - \alpha]^{1/2}, \alpha = 8.52 / ((L_i - Tb_i) / C_r + 7.23) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mu_{1i} &= \frac{\pi}{\pi + 2 - 5s_i + 2s_i^2}, \\ s_i &= \left( \frac{p_{i-1}}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \end{aligned} \quad (14)$$

식 (12)~(14)와 식 (10)을 이용하여 축방향 유속  $U_i$

및  $U_2$ 를 구할 수 있으며 결국 지배방정식 (3)~(5)는 각 공동에 대하여 주 변수인  $W_{1i}$ ,  $W_{2i}$ ,  $p_i$ 만의 함수가 된다. 래버린스 실 틈새로부터 섭동압력에 의한 유체력을 구하기 위하여 주 변수들은 회전축 중심에 대한 성분(zeroth order)과 미소변위에 대한 성분(first order)를 포함하는 섭동변수로 다시 정의되어 지배방정식 (3)~(5)에 적용하여 전개하면 정상상태(zeroth order)식과 비정상상태(first order)식이 된다.

정상상태 식과 비정상상태 식을 래버린스 실의 입구 및 출구조건으로부터 수치해석 기법을 사용하여 해<sup>(5,6)</sup>를 구하면, 래버린스 실을 통한 누설량과 섭동압력 분포로부터 래버린스 실의 유체력을 나타내는 동특성계수( $K$ ,  $k$ ,  $C$ ,  $c$ )를 각각 구할 수 있다.

### 3. 해석 결과 및 고찰

본 절에서는 앞 절에서 설명한 Moody 마찰계수식을 사용한 래버린스 실의 해석결과를 Blasius 마찰계수식을 사용한 Scharrer<sup>(5)</sup>의 해석결과 및 기 발표된 Pelletti<sup>(12)</sup>의 실험결과와 비교함으로써 본 해석결과의 신뢰성을 검증하고자 한다. 비교 대상의 래버린스 실은 Pelletti의 seal #1 실험결과로 래버린스 이가 고정자에 있는 teeth-on-stator 형태의 래버린스 실로서 형상 및 운전조건이 Table 1에 나타나 있다.

Table 1 Geometry of labyrinth seal and test conditions

Labyrinth seal geometry(teeth-on-stator)	
Inlet radius of seal rotor ( $R_s$ )	75.7 mm
Tooth height ( $B$ )	3.175 mm
Tooth pitch ( $L$ )	3.175 mm
Tooth width ( $T_p$ )	0.152 mm
Number of labyrinth teeth	8
Operating condition	
Inlet pressure ( $P_r$ )	7.9 bar
Outlet pressure ( $P_s$ )	5.3 bar
Inlet swirl ratio( $W_l(0)/(R_s \omega)$ )	0
Rotor speed ( $\omega$ )	5030 rpm 12000 rpm 16000 rpm
Seal clearance ( $C_s$ )	0.229 mm
Inlet temperature	300 K
Gas constant ( $R$ )	287 J/(kg K)
Specific heat ratio ( $\gamma$ )	1.4

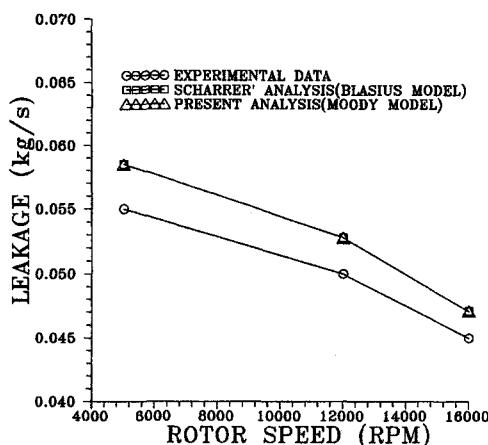


Fig. 5 Leakage vs. rotor speed

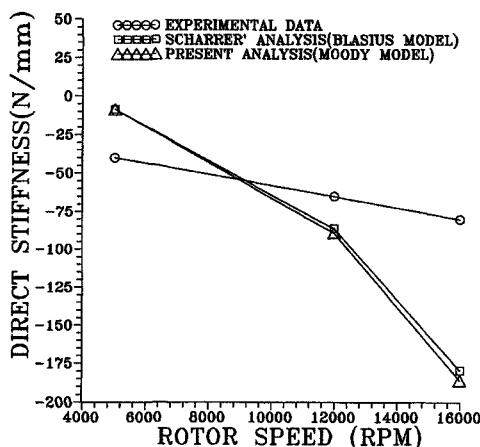


Fig. 6 Direct stiffness vs. rotor speed

Fig. 5~8은 회전체의 회전수가 5030 rpm, 12000 rpm, 및 16000 rpm으로 증가될 때, 대상 래버린스 실을 통한 누설량 및 동특성계수의 결과를 비교하고 있다. 원형 심볼은 Pelletti의 실험결과를 나타내고, 네모 심볼은 Blasius 마찰계수 식을 사용한 Scharrer의 해석결과이며, 세모 심볼은 Moody 마찰계수 식을 사용한 본 논문의 해석결과를 나타낸다.

Fig. 5에 보인 것처럼 래버린스 실을 통한 누설량의 경우, Blasius 마찰계수 식을 사용한 Scharrer의 해석 결과와, Moody 마찰계수 식을 사용한 본 논문의 해석 결과는 일치함을 보였으며 실험결과보다 약 7%정도 크게 예측됨을 보여 비교적 예측 결과가 정확함을 나타냈다. 회전수가 증가함에 따라서 누설량은 감소함을 나타내는데 이는 회전수가 증가함에 따라서 원심력에

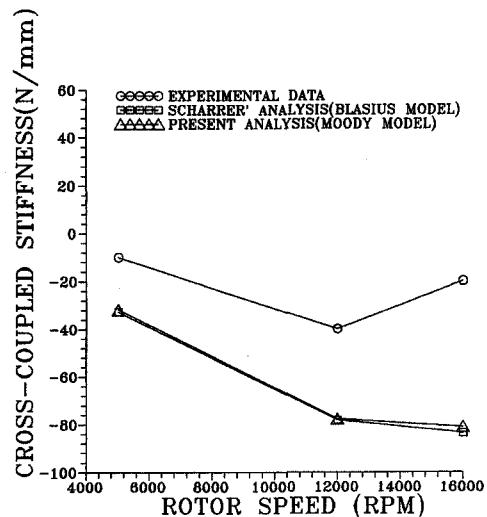


Fig. 7 Cross-coupled stiffness vs. rotor speed

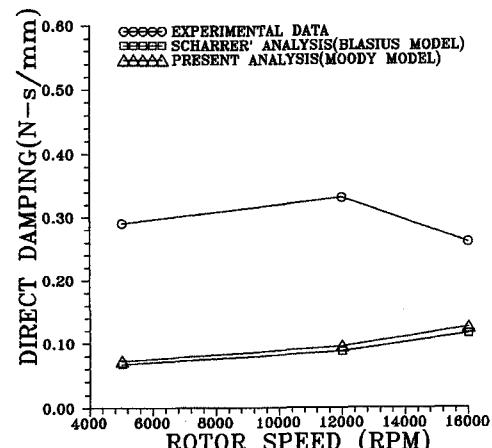


Fig. 8 Direct damping vs. rotor speed

Table 2 Growth of rotor with rotational speed<sup>(12)</sup>

Rotor speed(rpm)	Radial rotor growth(mm)
5030	0.0045
12000	0.0231
16000	0.0425

의해 회전체의 반경이 커지는 변형이 일어나 실제 실의 틈새 깊이가 줄어든 결과이며, Table 2에 나타낸 Pelletti의 회전체 속도에 따른 회전체 반경의 성장 변형량 측정 결과를 해석시 고려하였다.

Blasius 마찰계수 식을 사용한 Scharrer의 해석 결

과와 Moody 마찰계수 식을 사용한 본 논문의 해석 결과가 일치함을 보인 것은 대상 실의 운전조건에서는  $1.9 \times 10^4$  레이놀즈 수를 갖게되며 Fig. 1에 나타낸 것처럼 이 레이놀즈 수 범위에서는 두 마찰계수 식의 마찰계수 결과가 거의 일치하기 때문이다.

Fig. 6~8은 래버린스 실을 통한 유체력을 나타내는 동특성 계수인 강성계수( $K$ ), 연성강성계수( $k$ ), 및 감쇠 계수( $C$ )의 결과를 각각 나타내고 있다. 누설량의 결과에서처럼 Blasius 마찰계수 식을 사용한 Scharrer의 해석결과와 Moody 마찰계수 식을 사용한 본 논문의 해석결과는 거의 일치함을 보였다. 비록 적은 양이지만, 연성강성계수와 감쇠계수의 경우는 본 논문의 해석결과가 Scharrer의 해석결과보다 실험결과에 더 접근함을 보였으며 강성계수의 경우는 반대의 경향을 보였다. 본 논문 및 Scharrer의 동특성계수의 예측은 5030rpm에서의 강성계수를 제외하고 실험결과보다 작게 예측되고 있으며, 대체적으로 실험결과와 차이를 보이고 있다.

Moody 마찰계수 식을 사용한 래버린스 실의 해석결과는 Nelson과 Nguyen<sup>(7)</sup>의 매끈한 면을 갖는 plain seal의 경우에서처럼 Blasius 마찰계수 식을 사용한 해석결과와 거의 같아서 개선된 결과를 주지 못하였으나, 레이놀즈 수 범위가  $10^5$  이상일 경우와 실 표면이 거친 경우에 대하여는 보다 정확한 해석 결과를 나타낼 것으로 판단된다.

#### 4. 결 론

압축성 유체를 작동 유체로 사용하는 래버린스 실의 이론적 해석에 보다 넓은 운전조건(레이놀즈 수  $10^5$  이상)과 실 표면의 거칠기를 쉽게 고려할 수 있는 Moody 마찰계수 식을 사용하여 기존의 two-control-volume model 해석 방법을 개선하고자 하였다.  $1.9 \times 10^4$ 의 레이놀즈 수를 갖는 Pelletti의 실험결과 및 Blasius 마찰계수 식을 사용한 Scharrer의 해석결과와 비교하면, 다음과 같다.

- (1) Moody 마찰계수 식을 사용한 래버린스 실의 누설량 및 동특성 계수( $K$ ,  $k$ , 및  $C$ )의 예측결과는 Scharrer의 해석결과와 거의 일치하였다.
- (2) 누설량의 경우는 실험결과보다 약 7% 정도 크게 예측되어 만족스런 결과를 보였으나, 동특성 계수의 경우는 실험결과와 대체적으로 차이를

보였다.

- (3) 비교 대상인 래버린스 실의 운전조건이 레이놀즈 수가  $10^5$  이하의 범위였기 때문에 Moody 마찰계수 식을 사용한 본 논문의 해석이 개선된 결과를 주지 못하였으나, 레이놀즈 수 범위가  $10^5$  이상인 경우와 실 표면이 거친 경우에 대하여는 보다 정확한 해석결과를 나타낼 것으로 판단된다.

#### 후 기

본 연구는 1999년도 경원대학교 학술연구비의 지원을 받아 이루어졌다.

#### 참고문헌

- (1) Alford, J. S., 1965, "Protecting Turbomachinery from Self-Excited Rotor Whirl," Trans. ASME, J. of Engineering for Power, October, pp. 333~344.
- (2) Iwatsubo, T., 1980, "Evaluation of Instability Forces of Labyrinth Seals in Turbines or Compressor s," NASA CP 2133, Proceedings of a Workshop at Texas A&M University 12~14 May Entitled Rotordynamic Instability Problems in High Performance Turbomachinery, pp. 139~167.
- (3) Jenny, R. J., Wyssmann, H. P., and Pham, T. C., 1984, "Prediction of Stiffness and Damping Coefficients for Centrifugal Compressor Labyrinth Seals," ASME 84-GT-86. Presented at the 29th International Gas Turbine Conference and Exhibit, Amsterdam, The Netherlands, June 4~7.
- (4) Childs, D. W., and Scharrer, J. K., 1986, "An Iwatsubo Based Solution for Labyrinth Seals: A Comparison to Experimental Results," Trans. ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, April, Vol. 108, pp. 325~331.
- (5) Scharrer, J. "A Comparison of Experimental and Theoretical Results for Labyrinth Gas Seals," Ph. D. Dissertation, Texas A&M University.
- (6) 하태웅, 이안성, 1998, "압축기용 래버린스 실의 동특성 해석," 한국소음진동공학회지, 제8권, 제5호, pp. 849~855.
- (7) Nelson, C. C., and Nguyen, D. T., 1987, "Comparison of Hirs' Equation with Moody's Equation

- for Determining Rotordynamic Coefficients of Annular Pressure Seals," Trans. ASME, Journal of Tribology, Vol. 109, pp. 144~148.
- (8) Abramovich, G. N., 1963, The Theory of Turbulent Jets, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- (9) Neumann, K., 1964, "Zur Frage der Verwendung von Durchblickdichtungen im Dampfturbinebau," Maschinentechnik, Vol. 13, No. 4.
- (10) Vermes, G., 1961, "A Fluid Mechanics Approach to the Labyrinth Seal Leakage Problem," Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, Vol. 83, No. 2, pp. 161~169.
- (11) Gurevich, M. I., 1966, The Theory of Jets in an Ideal Fluid, Pergamon Press, London, England, pp. 319~323.
- (12) Pelletti, J. M., 1990, "A Comparison of Experimental Results and Theoretical Predictions for the Rotordynamic Coefficients of Short( $L/D=1/6$ ) Labyrinth Seal," Master Thesis, Texas A&M University.