

## 특이 유한요소의 구성과 응용

김 명 식\* · 임 장 근\*\*  
(1998년 9월 19일 접수)

### Formulation of a Singular Finite Element and Its Application

Myung-Sik Kim and Jang-Keun Lim

**Key Words:** Singular Finite Element(특이 유한요소), Trefftz Function(트래프츠 함수), Hybrid Variational Principle(혼합형 변분원리), Conformal Mapping(등각사상)

#### Abstract

For the effective analysis of two dimensional plane problems with geometrical discontinuities, singular finite element has been proposed. The element matrix equation was formulated on the basis of hybrid variational principle and Trefftz function sets derived consistently from the complex theory of plane elasticity by introducing a conformal mapping function. In order to suggest the accuracy characteristics of the proposed singular finite element, typical plane problems were analyzed and these results were compared with exact solutions. The singular finite element gives the comparatively exact values of stress concentration factors or stress intensity factors and can be effectively used for the analysis of mechanical structures containing various geometrical discontinuities.

#### 1. 서 론

기계 구조물의 형상은 대부분 구멍(hole)이나 notch(notch)와 같은 기하학적인 불연속부를 많이 포함하고 있기 때문에 이들의 변형과 응력상태를 정확하게 평가하기는 쉽지 않다. 따라서 이들 구조물의 설계는 불연속부의 형상에 따라서 응력집중계수만을 적절히 고려하여 수행되거나 유한요소법에 의한 근사적인 해석으로 설계에 반영되어 왔다. 이와 같은 불연속 구조물을 유한요소법으로 해석할 때 응력집중이나 역학적인 특이성이 예상되는 부분의 요소분할이 쉽지 않으며 세심한 배려를 하지 않으면 그 특성을 정확하게 평가할 수 없다. 특히 이와 같은 불연속부가 여러개 존재하는 구조물에서는 유한요소 모델링이 더욱 어렵고 그들의 영향을 정확하게 평가할 수 없기 때문에 정

적 및 동적 설계시에 어려운 요인이 된다.

따라서 이들 불연속부의 강성과 역학적인 특성을 정확하고 간편하게 해석하고 평가하기 위한 연구가 활발하게 수행되어 왔으며 이들 연구는 결국 특정 유한요소(special finite element)를 만드는 것이다. 즉, 구멍이나 notch, 균열 등을 한 개의 요소내에 포함시키거나 이들 특성을 표현할 수 있도록 특이 유한요소(singular finite element)를 구성하는 것이다.

특이 유한요소를 구성하는 방법에는 두가지가 있다. 첫번째 방법은 해석해(analytic solution)를 기준하여 변위의 형상함수를 설정하고 이로써 요소 방정식을 구성한다.<sup>(1,2)</sup> 이 방법으로 구성한 균열요소<sup>(3)</sup>(crack element)는 응력세기계수 등 균열선단에서의 특이성을 편리하게 구할 수 있으나 일반 유한요소와의 적합성이 만족되지 못하기 때문에 정확도가 다소 떨어진다.

두번째 방법은 트래프츠(Trefftz)방법으로 일반 평면문제의 복소수 일반해를 시험함수(trial functions)로 도입하여 특이 유한요소의 행렬방정식을

\* 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 회원, 한양대학교 기계공학부

유도한다. 트래프츠 유한요소의 특징은 일반 유한요소와는 달리 요소의 경계적분만으로 요소의 강성방정식을 구성할 수 있고 요소의 절점수에 제한을 받지 않으며 임의의 형상을 갖는 요소를 구성할 수 있어서 대요소(large element) 또는 초요소(super-element)<sup>(4-7)</sup>로 소개되어 있다. Trefftz 유한요소가 가지는 이와 같은 장점들은 구멍이나 낫치, 균열 등과 같은 불연속부를 요소내에 포함시키는 것을 가능하게 하고 역학적인 특이성을 구현할 수 있도록 이들의 일반해를 이용하여 요소방정식을 구한다.

본 논문에서는 불연속부를 일반적으로 표현하기 위하여 사상함수를 도입하고 트래프츠 방법을 써서 특이 유한요소를 구성하고자 한다. 이와 같이 구성된 특이 유한요소는 구멍이나 낫치 또는 균열이 한 개 또는 여러개가 동시에 존재하는 불연속 구조물을 효과적으로 해석할 수 있으며 이의 유효성과 정확도를 검증하기 위하여 여러가지 수치실험을 수행하고 그 결과를 검토하고자 한다.

## 2. 특이 유한요소의 구성법

### 2.1 혼합 변분원리

이차원 선형탄성문제의 특이요소를 구성하기 위하여 혼합 변분원리(hybrid variational principle)를 다음과 같이 정의한다.<sup>(6)</sup>

$$\Pi_H = \Pi + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_3} \mathbf{t}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) ds \quad (1)$$

식 (1)에서  $\Pi$ 는 전체 포텐셜 에너지(total potential energy)이고  $\Gamma_1, \Gamma_2$ 는 요소 경계중에서 변위 및 트래션(traction) 경계,  $\Gamma_3$ 는 특이 유한요소가 주변의 일반 유한요소와 접하는 경계를 의미한다.

$\mathbf{u}, \mathbf{t}$ 는 변위와 트래션 벡터이고  $\mathbf{u}^*, \mathbf{t}^*$ 는 각각 경계에서 주어진 값이다. 식 (1)의 두 번째 항은 특이 유한요소가 일반요소들과 접하는 변에서 적합성과 변위 경계조건을 만족시키기 위하여 추가된 항이다.

체력(body force)을 무시하고 변위와 트래션을 제차해(homogeneous solution)와 비제차해(particular solution)로 다음과 같이 분리한다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p \quad (2)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_h + \mathbf{t}_p \quad (3)$$

식 (1)의 약형(weak form)을 구하고 불필요한 항을 제거하면

$$\begin{aligned} \Pi_H = & \int_{\Gamma_3} \frac{1}{2} \mathbf{t}_h^T \mathbf{u}_h ds - \int_{\Gamma_3} \mathbf{t}_h^T \mathbf{u}^* ds \\ & - \int_{\Gamma_3} \mathbf{t}_p^T \mathbf{u}^* ds + \int_{\Gamma_3} \mathbf{t}_h^T \mathbf{u}_p ds \end{aligned} \quad (4)$$

로 표현할 수 있다.

식 (4)는 특이 유한요소가 일반 유한요소와 접하는 경계  $\Gamma_3$ 에서만의 적분으로 표현되며 이 경계에서  $\mathbf{u}^*$ 는 일반 유한요소에서 계산되는 변위 벡터로 생각할 수 있고  $\mathbf{u}_p, \mathbf{t}_p$ 는 변위와 트래션

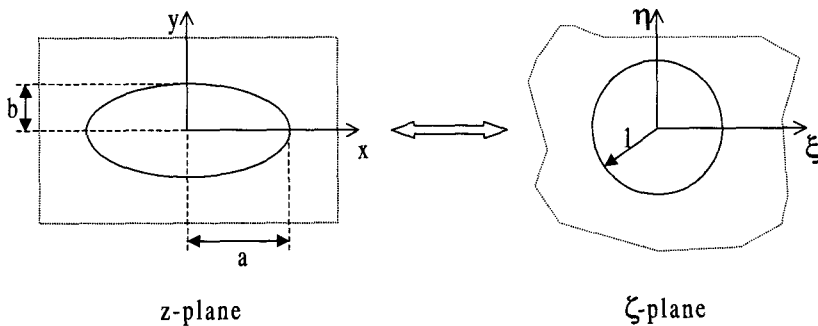


Fig. 1 Conformal mapping an ellipse onto the unit circle.

벡터의 비제차항으로 특이 유한요소에 작용하는 외력 트랙션에 의하여 발생되는 값이 된다.

2.2 구멍(hole)문제의 일반해

이차원 평면에 원공이나 균열 또는 notch가 존재하는 문제의 일반해(general solution)를 구하기 위하여 다음과 같은 등각사상함수(conformal mapping function)를 정의한다.<sup>(6,7)</sup>

$$z = w(\zeta) = c_1(\zeta + \frac{c_2}{\zeta}) \tag{5}$$

단,

$$c_1 = (a + b)/2 \tag{6}$$

$$c_2 = (a - b)/(a + b) \tag{7}$$

이고  $a, b$ 는 Fig.1과 같은 타원의 반지름이다.

식 (5)에서  $z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta$ 로서 복소수 변수이고 이 등각사상식은 타원의 외부영역을 단위원의 외부영역으로 사상한다. 식 (5)의 등각사상함수를 사용한 이차원 평면의 일반해는 다음과 같이 표현된다.<sup>(6,7)</sup>

$$2\mu(u + iv) = x\bar{\phi} - w\frac{\dot{\phi}}{w} - \bar{\psi} \tag{8}$$

$$\sigma_x - i\tau_{xy} = \frac{\bar{\phi}}{w} + \frac{\dot{\phi}}{w} - \bar{w}(\frac{\ddot{\phi}}{w^2} - \dot{\phi}\frac{\ddot{w}}{w^3}) - \frac{\dot{\psi}}{w} \tag{9}$$

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \frac{\bar{\phi}}{w} + \frac{\dot{\phi}}{w} + \bar{w}(\frac{\ddot{\phi}}{w^2} - \dot{\phi}\frac{\ddot{w}}{w^3}) + \frac{\dot{\psi}}{w} \tag{10}$$

식 (8)에서  $(\cdot)$ 는  $\zeta$ 에 관한 미분을 그리고  $(-)$ 는 공액복소수를 의미하고  $x$ 는 평면응력상태에서  $(3-\nu)/(1+\nu)$  이고 평면변형률상태에서  $(3-4\nu)$ 가 되며  $\mu$ 는 전단계수를 의미한다. 단,  $\nu$ 는 포아송비이다. 한편 변환된 평면에서 경계조건은

$$\phi(\zeta) = x\bar{\phi} - w\frac{\dot{\phi}}{w} - 2\mu\overline{(u^* + iv^*)} \text{ on } \Gamma_1 \tag{11}$$

$$\phi(\zeta) = -\bar{\phi} - w\frac{\dot{\phi}}{w} + i\int\overline{(t_x^* + it_y^*)} ds \text{ on } \Gamma_2 \tag{12}$$

로 표현되고 이들 식에서  $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ 는 식 (11),(12)를 만족하는 해석함수가 된다.

2.2.1 제차해(homogeneous solution)

Fig.1과 같이 타원 구멍을 갖는 요소에 대해서 해석함수  $\phi(\zeta)$ 를 다음과 같이 가정한다.<sup>(6)</sup>

$$\phi(\zeta) = \sum_{j=-N}^M a_j \zeta^j \tag{13}$$

단,  $a_j = \alpha_j + i\beta_j$ 인 복소계수이다. 이제 제차해를 구하기 위하여 식 (12)에서 외력 트랙션 벡터  $t^* = 0$ 로 가정하고  $|\zeta| = 1$ 인 단위 원주상에서  $\bar{\zeta}^j = \zeta^{-j}$ 의 관계가 성립함을 고려하면 또 하나의 해석함수  $\psi(\zeta)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\psi(\zeta) = -\sum_{j=-N}^M [\bar{a}_j \zeta^{-j} + a_j \frac{\zeta^{-1} + c_2 \zeta}{1 - c_2 \zeta^{-2}} j \zeta^{j-1}] \tag{14}$$

2.2.2 비제차해(particular solution)

타원구멍에 내압  $p$ 가 작용하는 경우를 고려하기 위하여 식 (12)에서

$$i\int\overline{(t_x^* + it_y^*)} ds \equiv -pz \tag{15}$$

로 정의할 때 해석함수  $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi(\zeta) = -p c_1 c_2 \zeta^{-1} \tag{16}$$

$$\psi(\zeta) = -p c_1 \zeta^{-1} - p c_1 c_2 \frac{1 + c_2 \zeta^2}{\zeta(\zeta^2 - c_2)} \tag{17}$$

2.3 특이 유한요소 방정식

이차원 평면문제에서 트랙션 벡터  $t$ 와 응력 벡터  $\sigma$  사이에

$$t = n \sigma \tag{18}$$

가 성립한다. 이 식에서  $n$ 는 경계면의 외향수직 단위벡터의 방향여현행렬이다.

이제 식 (13),(14)를 식 (8),(9),(10)에 대입하고 식 (18)을 고려하면

$$u = [\phi]\{c\} \tag{19}$$

$$t = n[\phi]\{c\} = [\theta]\{c\} \tag{20}$$

로 표현할 수 있다. 단,  $\{c\}$ 는 실수계수  $\alpha_j, \beta_j$ 로 구성된 미정계수 벡터이다.

한편, 특이 유한요소가 일반 유한요소와 접하는 경계  $\Gamma_3$ 에서 변위벡터  $u^*$ 는 다음과 같이 절점 변위로서 선형보간(linear interpolation)하여 얻을 수 있다.

$$u^* = [s]\{q\} \tag{21}$$

여기서  $\{q\}$ 는 요소의 절점변위벡터이고  $[s]$ 는 선형보간함수행렬로서 다음과 같이 표현된다.

$$[s] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \tag{22}$$

단,  $\xi$ 는 자연좌표계로서  $|\xi| \leq 1$ 이다. 그리고

비제차해  $u_p, t_p$ 에 대해서는 식 (16),(17)을 (8), (9), (10)에 대입하고 식 (18)의 관계를 고려하면 구할 수 있다.

식 (19), (20), (21)과 비제차해를 식 (4)에 대입하고 정리하면

$$\Pi_H = \frac{1}{2} \{c\}^T [H] \{c\} - \{c\}^T [G] \{q\} + \{c\}^T \{F_1\} - \{q\}^T \{F_2\} \tag{23}$$

로 된다. 단,

$$[H] = \int_{\Gamma_3} \frac{1}{2} ([\phi]^T [\theta] + [\theta]^T [\phi]) ds \tag{24}$$

$$[G] = \int_{\Gamma_3} [\theta]^T [s] ds \tag{25}$$

$$\{F_1\} = \int_{\Gamma_3} [\theta]^T u_p ds \tag{26}$$

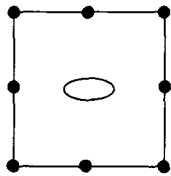
$$\{F_2\} = \int_{\Gamma_3} [s]^T t_p ds \tag{27}$$

식 (23)은 미정계수벡터  $\{c\}$ 와 요소의 절점변위벡터  $\{q\}$ 로써 표현된 범함수(functional)이고 이의 극치는 각각에 대한 1차변분으로 구할 수 있다. 우선  $\{c\}$ 에 대하여 변분하고 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

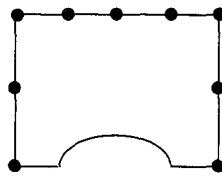
$$\{c\} = [H]^{-1} ([G]\{q\} - \{F_1\}) \tag{28}$$

식 (28)을 식 (23)에 대입하고 그 결과를  $\{q\}$ 로써 변분하면 다음과 같은 특이 유한요소의 방정식을 얻을 수 있다.

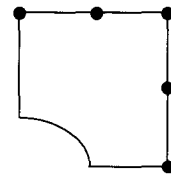
$$[K]\{q\} = \{f\} \tag{29}$$



(a) Full element



(b) 1-symmetric element



(c) 2-symmetric element

Fig. 2 Types of a singular finite element.

단,

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (30)$$

$$\{f\} = [G]^T [H]^{-1} \{F_1\} - \{F_2\} \quad (31)$$

식 (29)의 요소방정식에서  $[K]$ 는 강성행렬로서 대칭이고 정치(positive definite) 행렬이 된다.

이 강성행렬과 요소의 절점력 벡터는 식 (24)~(27)에서와 같이 특이 유한요소가 일반 유한요소와 접하는 경계  $\Gamma_3$  에서만의 적분으로 구할 수 있기 때문에 특이 유한요소의 형상과 절점개수에 제한을 받지 않으며 Fig.2와 같이 전형적인 3가지 요소를 생각할 수 있다.

Fig. 2(a)와 (b)는 해석 구조물의 조건에 따라서 임의로 사용할 수 있고 Fig. 2(c)는 두 축 대칭 구조물이나 낫치(notch) 등의 해석에 사용할 수 있다.

한편, 특이 유한요소내에 생기는 변위와 응력성분의 계산은 요소경계에서의 절점변위가 계산되면 식 (28)과 (19), (20)을 이용하여 다음 식으로 계산할 수 있다.

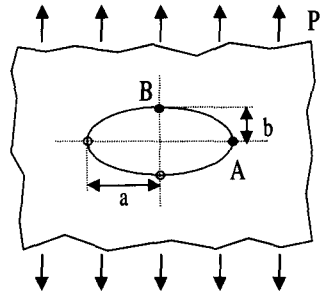
$$u = [\phi]\{c\} = [\phi][H]^{-1}([G]\{q\} - \{F_1\}) \quad (32)$$

$$\sigma = [\psi]\{c\} = [\psi][H]^{-1}([G]\{q\} - \{F_1\}) \quad (33)$$

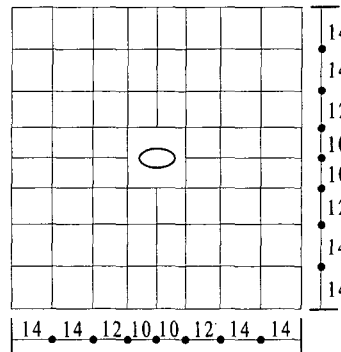
**Table 1** Stress concentration factors of the plate with an elliptical hole.

$b/a$	$\sigma_y^A/p$	$\sigma_x^B/p$
1	3.001 (3.0)*	-1.001 (-1.0)*
0.8	3.501	-1.001
0.6	4.334	-1.001
0.4	6.001	-1.001
0.2	11.002	-1.000
0.1	21.004	-1.000
0.01	201.035	-1.000
0.001	2077.496	-1.000
⋮	⋮	⋮

\* Exact solution



(a) Infinite plate with an elliptical hole

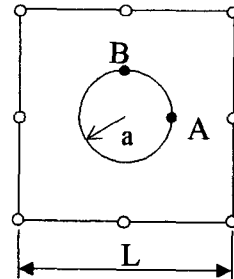


(b) Finite element model used

**Fig. 3** Infinite plate containing an elliptical hole under uniaxial tension.

### 3. 수치계산 및 검토

요소내의 불연속부를 효과적으로 해석하기 위하여 구성된 특이 유한요소의 정확도와 특성을 평가



**Fig. 4** Typical singularity element containing a circular hole.

하고자 전형적인 평면문제들에 대하여 해석을 수행하고 그 결과를 엄밀해(exact solution)와 비교 검토하였다.

3.1 타원구멍을 갖는 평판

이차원 평면에 구멍이 존재하는 문제의 응력집중계수를 특이 유한요소를 사용하여 해석하고자 Fig. 3과 같이 타원형 구멍을 갖는 문제를 해석하

였다. Fig. 3(b)에 보인 요소망을 사용하여 응력집중계수를 결정하였으며 그 결과를 타원의 반지름간의 비에 따라서 Table 1에 나타내었다.

Table 1에서 보는 바와 같이 구멍이 원형인 경우에는 응력집중계수가 엄밀해와 거의 동일하게 구해졌으나 반지름의 비가 줄어들수록 예리한 응력집중특성을 보이고 이는 요소의 특이성을 잘 구현하고 있음을 의미한다.

Table 2 Stress concentration factors of the plate with a circular hole.

$L/2a$	$\sigma_y^A/p$	$\sigma_x^B/p$
100	3.000	-1.000
40	3.000	-1.000
20	3.000	-1.000
40/3	3.000	-1.000
10	3.001 (3.0)*	-1.001 (-1.0)*
20/3	3.001	-1.001
5	3.003	-1.003
4	3.004	-1.005
20/6	3.007	-1.008
20/7	3.011	-1.011
20/8	3.016	-1.016
20/9	3.022	-1.021
2	3.030	-1.027

\* Exact solution

Table 3 Stress concentration factors of the plate with a circular hole (a=b=1).

	$\sigma_y^A/p$	$\sigma_x^B/p$
Type A	3.076	-0.928
Type B	3.050	-0.955
Type C	3.037	-0.967

Table 4 Stress intensity factors of the plate with a center crack (b=0).

	$L/2a$	$K_I$	$K_{II}$
Type A	10	1.036 (1.0)*	-0.081 (0.0)*
	5	1.462 (1.414)*	-0.106 (0.0)*
Type B	10	1.024	-0.062
	5	1.447	-0.081
Type C	10	1.018	-0.054
	5	1.439	-0.069

\* Exact solution<sup>(6)</sup>

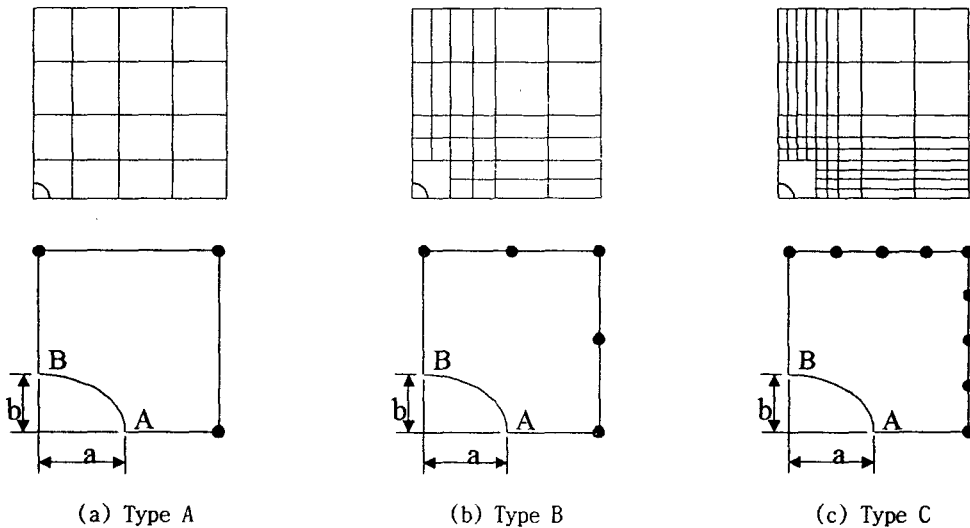


Fig. 5 Symmetric singular finite element model used.

3.2 구멍크기의 영향

특이 유한요소내에 포함된 구멍의 크기가 해의 정확도에 미치는 영향을 검토하기 위하여 Fig. 4와 같은 특이 유한요소를 사용하여 Fig. 3의 평면문제를 해석하였다. Fig. 3(b)와 동일한 요소망을 사용하여 응력집중계수를 계산하였으며 그 결과를 원의 반지름과 특이 유한요소의 크기의 비에 따라서 Table 2에 나타내었다.

Table 2에서 특이 유한요소의 크기가 일정할 때 구멍의 크기에 따라서 응력집중계수가 거의 달라지지 않으며 무한평판 조건을 만족하는 한 요소망 구성시 구멍크기에 따라서 특이 유한요소의 크기를 고려하지 않아도 정확한 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

Table 5 Stress concentration factors of the plate with 100 circular holes.

		$\sigma_y^A/p$	$\sigma_x^B/p$
Singular element		2.0264	2.0264
ANSYS	Type A	1.8905	1.8905
	Type B	2.0842	2.0842

Table 6 Stress concentration factors for the first row holes.

Hole No.	$\sigma_y^A/p$	$\sigma_x^B/p$
1(in)	2.0267	2.0267
2	2.0262	2.0271
3	2.0255	2.0278
4	2.0250	2.0286
5(out)	2.0222	2.0311

또한 Fig. 5와 같은 대칭요소의 유효성을 보이기 위하여 동일한 문제를 1/4로 모델링하여 해석을 수행하였다. 요소망 구성에 따른 정확도를 확인하고자 Fig. 5와 같이 요소망을 변화시켜가면서 응력집중계수를 계산하였고 그 결과를 Table 3에 나타내었다.

Table 3에서 알 수 있듯이 대칭요소를 사용하여도 요소망 구성에 관계없이 만족할 만한 결과를 얻을 수 있음을 확인하였으며 특이 유한요소의 절점갯수가 많아지면 보다 정확한 값을 얻을 수 있으나 그 경향은 일반 유한요소만큼 민감하지 못함을 알 수 있다.

Fig. 5에서 타원의 단경,  $b=0$ 인 경우 중앙균열을 갖는 평면문제가 되며 이의 해석결과는 Table 4와 같다. 앞의 원공문제와 같이 전체 특이요소를 사용하여 해석한 결과보다 정확도는 다소 떨어지지만 요소망 구성과 해석의 편리함 때문에 많이 사용될 것으로 기대되는 요소 형태이다.

3.3 여러개의 원형 구멍을 갖는 평면

특이 유한요소의 유효성을 보이기 위하여 Fig. 6과 같이 여러 개의 원형구멍을 갖는 평면문제를 해석하였다. Fig. 6(a)에 보인 요소망을 사용하여 응력집중계수를 결정하였으며 그 결과를 ANSYS로 해석한 결과와 비교하여 Table 5에 나타내었다. ANSYS해석에 사용된 A형태의 요소망은 Fig. 6(b)와 같으며 B형태의 요소망은 동일 요소망의 밀도를 4배로 증가시켜 사용하였다.

양축하중을 받고 있으므로 응력집중계수가 대칭 특성을 보이고 있으며 특이 유한요소를 이용한 결

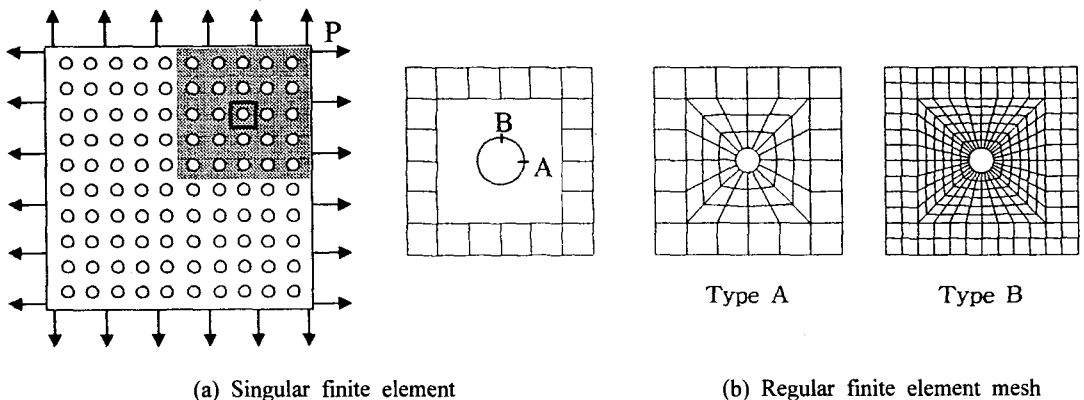


Fig. 6 Finite plate with 100 circular holes under biaxial tension.

과가 사용된 요소의 수에 비하여 매우 우수한 값을 나타내고 있음을 알 수 있다.

또한 특이 유한요소를 사용한 결과중 첫번째 행의 구멍들에서의 응력집중계수를 Table 6에 나타내었다.

응력집중계수가 y방향 응력에 대해서는 평판의 외부로 갈수록 미소하게 작아지고 x방향 응력에 대해서는 미소하게 커지는 특성을 보이는 것을 알 수 있었다.

#### 4. 결 론

Trefftz법을 사용하여 기하학적인 불연속부를 표현할 수 있는 특이 유한요소의 수식화 과정을 일반화하였다. 특이 유한요소가 해의 정확도에 미치는 특성을 평가하기 위하여 여러 가지 전형적인 평면탄성문제를 해석하고 그 결과를 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 특이 유한요소는 요소분할이 간편하고 응력집중계수와 응력세기계수를 정확하게 구할수 있으며 기하학적인 불연속부가 많이 존재하는 기계구조물을 해석하는데 효과적으로 이용될 수 있다.

(2) 특이 유한요소를 사용할 때 요소크기는 전체 요소망에 준하여 결정하고 구멍의 크기와는 무관하다.

#### 후 기

본 연구는 97년도 교육부의 기계공학 학술연구 조성비(과제번호:ME97-C-36)의 지원으로 수행되었으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Yamamoto, Y., 1971, "Finite Element Approach with the Aid of Analytical Solutions," *Recent Advance on Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, University of Alabama Press, pp. 85~103.
- (2) Mote, Jr., C. D., 1971, "Global-Local Finite Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 565~574.
- (3) Benzley, S. E., 1974, "Representation of ingularities with Isoparametric Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 537~545.
- (4) Tong, P., Pian, T. H. H. and Lasry, S. J., 1973, "A Hybrid-Element Approach to Crack Problems in Plane Elasticity," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, pp. 297~308.
- (5) Lin, K. Y. and Tong, P., 1980, "Singular Finite Elements for the Fracture Analysis of V-Notched Plate," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp. 1343~1354.
- (6) Piltner, R., 1985, "Special Finite Elements with Holes and Internal Cracks," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1471~1485.
- (7) 임장근, 송관섭, 1996, "평면 탄성문제의 트래프츠 유한요소법과 캐비티 요소의 구성," 대한기계학회논문집(A), 제20권, 제1호, pp. 163~171.