

# 등각사상 맵핑 및 광탄성 실험법에 의한 원형구멍 주위의 하이브리드 응력장 해석

백태현\* · 김명수\*\* · 이주훈\*\*\*  
(1998년 8월 22일 접수)

## Hybrid Full-field Stress Analysis around a Circular Hole in a Tensile Loaded Plate using Conformal Mapping and Photoelastic Experiment

Tae Hyun Baek, Myung Soo Kim and Juhun Rhee

**Key Words :** Stress Analysis(응력 해석), Hybrid Stress Analysis(하이브리드 응력해석), Photoelasticity(광탄성), Conformal Mapping(등각 사상 맵핑), Complex Stress Function(복소수 응력 함수), Least Squares Method(최소자승법), Digital Image Processing(디지털 영상처리), Fringe Multiplication(프린지 증식), Fringe Sharpening(프린지 세션처리)

### Abstract

An experimental study is presented for the effect of number of terms of a power series type stress function on stress analysis around a hole in tensile loaded plate. The hybrid method coupling photoelastic data inputs and complex variable formulations involving conformal mappings and analytical continuity is used to calculate tangential stress on the boundary of the hole in uniaxially loaded, finite width tensile plate. In order to measure isochromatic data accurately, actual photoelastic fringe patterns are two times multiplied and sharpened by digital image processing. For qualitative comparison, actual fringes are compared with calculated ones. For quantitative comparison, percentage errors and standard deviations with respect to percentage errors are calculated for all measured points by changing the number of terms of stress function. The experimental results indicate that stress concentration factors analyzed by the hybrid method are accurate within three percent compared with ones obtained by theoretical and finite element analysis.

### 1. 서 론

하중을 받는 기계 및 구조물의 부재에 구멍이 있을 경우, 응력집중(stress concentration) 현상이 발생되므로 설계시 구멍 주위의 응력 분포에 관한 사항을 필수적으로 고려하여야 한다. 구멍 주위의 응력분포를 정확하게 해석할 수 있을 경

우, 구멍 형상을 최적화하여 응력집중 현상을 완화시킬 수 있으므로 구조물이나 기계부품의 재료와 제작비를 경감시킬 수 있을 뿐만 아니라 경량화된 효율적인 기구를 설계·제작할 수 있다. 따라서, 여러 가지 구멍형상의 응력집중에 관한 방대한 연구가 이루어져 체계적으로 정리<sup>(1)</sup>되었으며 공학설계에 유효하게 적용되고 있다.

각종 구멍형상에 관한 응력해석은 경계조건이 간단한 경우에는 이론적인 해석이 가능하나, 실제 공학적으로 적용되는 경우에는 경계조건이 복잡하여 수치해석 또는 여러 가지 실험법을 적용하여 해석할 수 있다. Savin<sup>(2)</sup>은 등각사상(conformal mapping)과 복소수 응력함수(complex stress function)를 이용하여 경계 조건

\* 회원, 군산대학교 기계공학부

\*\* 군산대학교 전자공학과

\*\*\* 한국항공우주 연구소

이 단순한 이방성 재료의 여러 형상 구멍 주위에 관한 응력 분포의 이론해를 구하였으며, Gerhardt<sup>(3)</sup>는 하이브리드요소 에 관한 이론<sup>(4)</sup>을 유한요소(hybrid finite element analysis)기법에 적용하여 복합재의 구멍 또는 필렛주위의 응력을 해석하였다. 일반적인 수치 해석 기법에서는 응력 집중 부근을 미세한 여러개의 요소로 분할하여야 수렴된 해를 얻을 수 있으나, 하이브리드 유한요소법은 구멍주위의 응력 집중 부근을 단일 하이브리드 요소로 간주하여 해석할 수 있는 장점이 있다. 이러한 편리성때문에, 무아레,<sup>(5)</sup> 열탄성<sup>(6,7)</sup> 및 광탄성<sup>(8,9)</sup>등의 실험데이터와 유한요소법<sup>(10,11)</sup>을 이용하여 하이브리드 기법으로 해석한 여러 연구가 수행되어 왔다. 한편으로, 등방성 재료에 관하여 이와 유사한 기법을 유한요소에 적용한 연구결과<sup>(12)</sup>도 발표되었다. 그러나, 급수형 복소수를 이용한 응력함수의 항의 수에 따른 물리적인 현상에 관한 연구는 아직도 미진한 편이다.

본 연구에서는 인장을 받는 판재의 원형구멍 주위의 응력분포를 해석하기 위하여 등각사상 맵핑을 이용한 급수형 복소수 응력함수에서, 항의 수(number of terms)에 따른 계수를 광탄성 등색프린지(isochromatic fringe) 데이터로부터 비선형 최소자승법으로 구한 후, 응력·광법칙(stress optic law)을 이용하여 광탄성프린지를 다시 계산하고 이들을 실제로 측정된 프린지와 정량적으로 비교·분석하였다. 광탄성 데이터를 정밀하게 획득하기 위하여 광탄성 실험으로부터 얻은 등색선 영상을 2배로 증식(fringe multiplication)시키고 선처리(fringe sharpening)하였다. 또한, 구멍 가장자리의 접선응력과 구멍으로부터 하중에 직각인 선상에서의 응력분포에 대해서 광탄성실험 데이터를 이용한 하이브리드 응력해석 결과와 유한요소 해석 및 이론값과 비교하여 타당성을 입증하였다. 본 연구에 사용된 재료는 등방성 재료이나 등각사상 맵핑을 이용한 응력함수는 이방성 재료에도 동일한 방법으로 적용할 수 있다.<sup>(8)</sup>

## 2. 이론

### 2.1 기본 방정식

평면응력 상태의 직교 이방성 판재에서 주탄성축(principal directions of elasticity)에 대한 특성방정식(characteristic equation)과 평형방정식

(equilibrium equations)으로부터 기하학적인 적합성(geometric compatibility)관계를 이용하여 다음과 같이 응력성분에 관한 식<sup>(2,3)</sup>으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re \left[ \mu_1^2 \frac{\phi'(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} + \mu_2^2 \frac{\Psi'(\zeta_2)}{\omega_2'(\zeta_2)} \right] \\ \sigma_y &= 2Re \left[ \frac{\phi'(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} + \frac{\Psi'(\zeta_2)}{\omega_2'(\zeta_2)} \right] \\ \tau_{xy} &= 2Re \left[ \mu_1 \frac{\phi'(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} + \mu_2 \frac{\Psi'(\zeta_2)}{\omega_2'(\zeta_2)} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

위의 식 (1)에서  $\phi'(\zeta_1) = d\phi/d\zeta_1$ ,  $\Psi'(\zeta_2) = d\Psi/d\zeta_2$ ,  $\omega_1'(\zeta_1) = d\omega/d\zeta_1$  및  $\omega_2'(\zeta_2) = d\omega/d\zeta_2$ 이다. 또한, 복소수 매개변수  $\mu_j$  ( $j=1, 2$ )는 Appendix 식 (A1)의 직교이방성재료의 특성방정식에 관한 두 개의 근을 의미한다.

Fig. 1과 같은 임의의 부영역(subregion)  $\Omega$ 에서 응력함수  $\phi(\zeta_1)$ 를 절단된 로랭급수(Laurent expansion)<sup>(3)</sup>로 나타내면,

$$\phi(\zeta_1) = \sum_{k=-m}^m a_k \zeta_1^k \quad (k \neq 0) \quad (2)$$

구멍의 경계  $\Gamma$ 에서 표면력이 없을 경우(traction free) 하이브리드 부영역(hybrid subregion)  $\Omega$ 에서  $\Psi(\zeta_2)$ 는

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta_2) &= B \overline{\phi\left(\frac{1}{\zeta_2}\right)} + C\phi(\zeta_2) \\ &= \sum_{k=-m}^m (\overline{a_k} B \zeta_2^{-k} + a_k C \zeta_2^k) \end{aligned} \quad (3)$$

상수  $a_k = b_k + i c_k$ 이고,  $b_k$ 와  $c_k$ 는 실수(real number)이며  $m$ 은 양의 정수(positive integer)이다. 또한,  $B$ 와  $C$ 는 특성방정식의 근에 관계되는 상수로서 부록의 식 (A2)와 같다.

한편으로, 위의 식 (1)에서  $\omega$ 의 역함수(inverse),

즉  $\omega^{-1}$ 는 물리적인  $z$ -평면에서  $\zeta$ -평면 ( $\zeta_j = \xi + \mu_j \eta$ ,  $j=1,2$ )으로 등각사상 맵핑 (conformal mapping)시킬 수 있는 함수를 뜻한다. 직교 이방성 재료에서 Fig. 1과 같이  $\zeta$ -평면의 단위원이  $z$ -평면의 타원형으로 맵핑되는 변환식<sup>(4)</sup>은

$$\omega_j(\zeta_j) = \frac{(a - i\mu_j b)\zeta_j}{2} + \frac{(a + i\mu_j b)\zeta_j^{-1}}{2} \quad (4)$$

식 (4)에서  $i = \sqrt{-1}$ 이고,  $a$ 와  $b$ 는 타원의 주반경(major radius)과 소반경(minor radius)이다. 또한, 역함수는

$$\zeta_j = \frac{z_j \pm \sqrt{z_j^2 - (a^2 + \mu_j^2 b^2)}}{(a - i\mu_j b)} \quad (5)$$

식 (5)에서 근호 값(square root)의 부호는  $|\zeta_j| \geq 1$  ( $j=1,2$ )이 되도록 선택한다. 직경이  $D$ 인 원에서는  $a = b = D/2$ 이다.

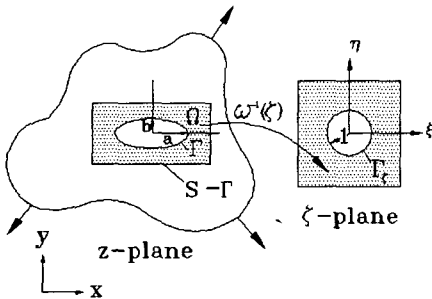


Fig. 1 Conformal mapping of holes in the physical  $z$ -plane into the  $\zeta$ -plane.

식 (2), (3) 및 식 (5)를 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음의 식 (6)과 같이 하이브리드 부영역  $\Omega$ 에서 응력에 관한 식<sup>(3)</sup>을 얻을 수 있다.

$$\{\sigma\} = [V]\{\beta\} \quad (6)$$

위의 식 (6)에서  $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_x\}^T$ 이고, 행렬

$[V]$ 는 부록의 식 (A3) 및 (A4)와 같이 정의하며,  $\{\beta\}^T = \{b_{-m}, c_{-m}, \dots, b_m, c_m\}$ 로서 상수행렬을 의미한다. 일단, 상수  $\{\beta\}$ 가 계산되면 하이브리드 부영역  $\Omega$ (구멍의 경계  $\Gamma$ 포함)의 응력은 식 (6)을 이용하여 계산할 수 있다. 단, 식 (6)에서  $k=0$ 은 강제운동에 관계되는 항이므로 계산시 사용되지 않았다. 또한, 등방성 재료를 포함한 직교이방성 재료는 주탄성축에 대칭이므로 상수  $\{\beta\}$ 에서 홀수항( $m=3, 5, 7, \dots$ )만을 고려하여야 한다<sup>(3)</sup>.

2.2 응력 · 광 법칙(stressoptic law)

주응력 성분중에서 한 개의 성분이 0일 경우, 즉  $\sigma_3 = 0$  일 때는 2차원 또는 평면응력상태가 되며 0이 아닌 평면 주응력(in-plane principal stress) 성분은  $\sigma_1$  및  $\sigma_2$ 가 된다. 광탄성의 복굴절 현상에 의한 응력 · 광법칙에 따르면 두 개의 주응력 차이 값은 광탄성의 등색선 프린지 차수(isochromatic fringe order)와 아래의 식 (7)과 같은 관계를 갖는다.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{h} \quad (7)$$

위의 식 (7)에서  $N$ 은 등색프린지 차수(isochromatic fringe order),  $f_\sigma$ 는 시편재료의 프린지 상수(material fringe constant),  $h$ 는 시편의 두께를 의미한다. 식 (7)에 각각의 응력성분을 대입하여 다시 정리하면

$$\left\{ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right\}^2 + \{\tau_{xy}\}^2 = \left\{ \frac{Nf_\sigma}{2h} \right\}^2 \quad (8)$$

과 같다. 식 (8)의 관계로부터 각각의 위치에서 식 (1)의 응력성분은 등색프린지 차수( $N$ )로 나타나며, 반대로 광탄성 데이터로부터 등색프린지의 차수가 결정되면 식 (8)과 식 (1)을 이용하여 응력성분을 해석할 수 있다.

2.3 비선형 최소자승법

응력성분과 등색프린지 차수에 관한 식 (8)의 우변항을 좌변으로 이항하여 정리한 후,  $n$ 개의 데이터로부터 다음과 같은 식을 구성할 수 있다.

$$G_n(\beta) = \left\{ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right\}_n^2 + \{\tau_{xy}\}_n^2 - \left\{ \frac{Nf_a}{2h} \right\}_n^2 = 0 \quad (9)$$

식 (9)에서  $G_n$ 은 미지의 상수  $\beta$ 에 관하여 비선형이므로 테일러 급수를 이용하여 선형화시킨 후 아래의 식 (10)과 같이 반복식 (iterative systems)으로 구성할 수 있다<sup>(13)</sup>.

$$(G_n)_{i+1} \approx (G_n)_i + \sum_{n=-m}^m \left( \frac{\partial G_n}{\partial \beta_n} \right)_i \Delta \beta_n \quad (10)$$

위의 식 (10)에서 첨자  $i$ 는 반복단계를 나타내며  $(G_n)_{i+1} \approx 0$ 이 될 때 까지 반복계산을하면  $n$ 개의 방정식으로부터 수렴된 상수  $\beta$ 를 얻을 수 있다.

### 3. 광탄성 실험

#### 3.1 시험편 재질 및 형상

광탄성 실험법에 의한 하이브리드 응력장 해석을 위하여 Fig. 2와 같이 중심부에 원형 구멍이 있는 유한폭의 단일축 하중을 받는 광탄성 시편을 택하였다. 시험편의 재질은 기계가공성이 우수한 폴리카보네이트 계열인 PSM-1<sup>(14)</sup>이고, 두께 ( $t$ )는 3.175 mm이며, 재료의 프린지 상수( $f_\sigma$ )는 7005 N/m, 영탄성계수( $E$ )는 2482 MPa, 포와송비( $\nu$ )는 0.38이다. 광탄성실험은  $P=327 N$  및 490 N의 힘을 가하였을 때 얻은 등색 프린지 패턴으로부터 응력장을 해석하였다. Fig. 3은 327 N의 인장하중을 받는 시험편을 명시야(light field)배열의 원형편광기(circular polariscope) 사이에 위치시켰을 때 나타난 프린지이다.

#### 3.2 등색프린지의 증식 및 세션처리

광탄성에서 응력에 의하여 나타나는 등색프린지 또는 등경프린지(isoclinic fringe)는 광강도(light intensity)가 서로 다른 유한폭의 프린지 밴드를 이루고 있기 때문에 최대 혹은 최소의 광강도를 갖는 위치를 육안으로 측정하여 응력으로 변환하고자 할 때 실험오차를 배제할 수 없다. 특히 광탄성 재료의 프린지 상수가 높을 경우, 즉 복굴절 현상이 하중에 둔감할 경우에는 광탄성 시편

에 응력을 가한다 하더라도 프린지 차수(fringe order)가 낮게 되고 또한 프린지의 폭이 넓게 되어 정확한 데이터 획득이 곤란하다.

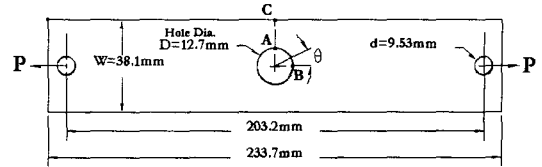


Fig. 2 Finite-width uniaxially loaded tensile plate containing a circular hole.

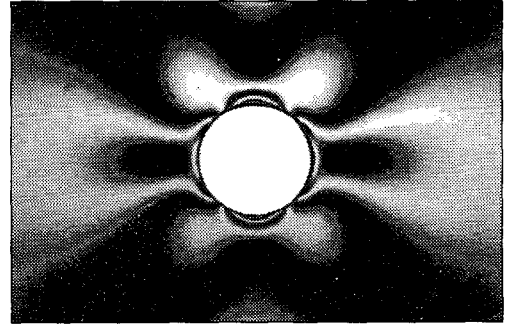


Fig. 3 Light-field isochromatic fringe pattern of a loaded tensile plate containing a circular hole ( $P=327 N$ ).

본 연구에서는 위와 같은 광탄성 측정상의 난이점을 해결하고 광탄성 영상으로부터 응력해석의 정확도를 향상시킬 수 있도록 디지털 영상처리 컴퓨터를 이용하여 프린지 증식 및 세션처리<sup>(15)</sup>를 한 후, 데이터를 획득하였다.

#### 3.2.1 광탄성프린지 증식이란

원형편광기에서 편광자(polarizer)와 검광자(analyzer) 사이에 있는 두 개의 4분파판(quarter-wave plate)을 편광축과 45° 교차시켰을 때 등색프린지가 나타나며, 암시야 배열에서 검광자를 통하여 투과된 광강도( $I_D$ )는

$$I_D = A \sin^2(\pi N) = \frac{A}{2} \{1 - \cos(2\pi N)\} \quad (11)$$

위의 식 (11)에서  $I_D$ 는 암시야배열의 원형편광기에서 광강도이며,  $A$ 는 비례상수이고  $N$ 은 등색 프린지 차수를 의미한다. 한편으로, 명시야배열의 원형편광기에서 광강도에 관한 식은

$$I_L = A \cos^2(\pi N) = \frac{A}{2} \{1 + \cos(2\pi N)\} \quad (12)$$

명시야배열의 광강도( $I_L$ )에서 암시야배열의 광강도( $I_D$ )를 뺀 절대값을  $I_R$ 이라 정의<sup>(16)</sup>하면

$$I_R = |I_L - I_D| = A \cos(2\pi N) \quad (13)$$

위의 식 (13)을 이용하여 2배로 증식된 프린지를 얻을 수 있다. 즉,  $I_R = 0$ 이 되기 위해서는 식 (13)으로부터  $\cos(2\pi N) = 0$ 이 되어야 한다. 따라서,

$$N = \frac{2n+1}{4}, n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

즉, 암시야배열의 원형편광기에서는 식 (11)에서 보인 바와 같이  $N=0, 1, 2, 3, \dots$  등에서  $I_D=0$ 이 되어 암흑프린지(dark fringe)로 나타나지만, 식 (14)에서는  $N=1/4, 3/4, 5/4, \dots$  등에서  $I_R=0$ 이 되어 암흑프린지로 나타난다. 또한, 식 (11)로부터 백색프린지(white fringe)는  $I_D=A$ 이 되는 조건에서 나타나며, 이 경우에 프린지 차수는  $N=1/2, 3/2, 5/2, \dots$  등이 된다. 즉, 프린지를 증식시키기 전에 흑색과 백색프린지는  $N=0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$  등에서 반차수마다 번갈아 나타나지만, 증식시킨 후에는  $N=0, 1/4, 2/4, 3/4, 1, 5/4, 6/4, \dots$  등에서 4분차수 간격으로 교대되어 나타나므로 2배의 프린지 증식 효과가 있다.

### 3.2.2 프린지 세션처리이론

광탄성프린지의 세션처리 과정은 물체형상의 경계선을 구하는 가장자리 탐색(edge detection)<sup>(17)</sup>과 유사하다. 그러나, 광탄성프린지의 세션처리는 광강도가 최대 또는 최소가되는 궤적을 계산

하여야 하므로 가장자리 탐색의 원리를 더욱 확장시킨 방법이라 할 수 있다. 광탄성에서 광강도가 국소 극값(local extremum)일 경우에 정차수 또는 반차수 프린지가 된다. 즉, 암시야배열의 원형편광기에서 광강도가 국소 최소(local minimum)에서는 정차수 프린지( $N=1, 2, 3, \dots$ )가 되고, 국소 최대값(local maximum)에서는 반차수 프린지( $N=1/2, 3/2, 5/2, \dots$ )가 된다. 국소 극값 사이에서는 광강도의 변화가 일정방향으로 감소하거나 증가하고, 국소 극값에서는 광강도가 증가에서 감소 또는 감소에서 증가되는 분기점이 된다. 그레디언트 벡터(gradient vector)는 언제나 상향성(uphill)이며, 국소 극값의 양측에서는 그레디언트 벡터가 서로 반대 방향이므로 그레디언트 벡터 합을 취하면 국소 극값 주위에서는 벡터합이 급격히 감소하게 된다. 이와같은 그레디언트 벡터합(sum of gradient vector)의 특성을 다음의 식 (15)와 같이 수식화<sup>(18,19)</sup>하여 광탄성 프린지를 세션화할 수 있다.

$$T = A \left[ 1 - \frac{|\sum \nabla_x| + |\sum \nabla_y|}{\sum |\nabla_x| + \sum |\nabla_y|} \right] \quad (15)$$

위의 식 (15)에서  $T$ =세션처리된 영상에서의 광강도,  $A$ =비례상수,  $\nabla_x = x$  방향 그레디언트 벡터성분,  $\nabla_y = y$  방향 그레디언트 벡터성분을 각각 의미한다. 식 (15)와 같은 알고리즘을 이용하여 계산하면, 광강도가 일정한 방향으로 변화될 경우  $T=0$ 이 되고, 광강도가 최대 또는 최소인 궤적에서는 광강도의 변화가 서로 반대 방향이므로  $T=A$ 가 된다. 따라서, 식 (15)와 같은 관계식을 이용하면 광강도가 최대 또는 최소인 궤적은 광강도가  $A$ 인 세션으로 변환시킬 수 있다.

### 3.3 광탄성 실험에 의한 응력장 해석

Fig. 3과 같은 광탄성 영상을 CCD (charge-coupled device) 카메라로 PC-586에 내장된 영상처리보드(image frame grabber)<sup>(20)</sup>에 저장하였다. 영상화 시킬 수 있는 픽셀(pixel) 수는 640x480이고 명암도(grey level)는 8비트, 즉 0에서 255범위이다. 광탄성 데이터획득의 정밀성을 기하기 위하여 프린지를 증식시키고 세션처리를 하였다.

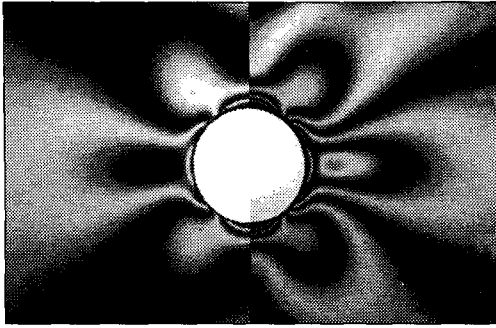


Fig. 4 Original photoelastic fringes (left half) and two times multiplied fringe pattern from the right half of Fig.3.

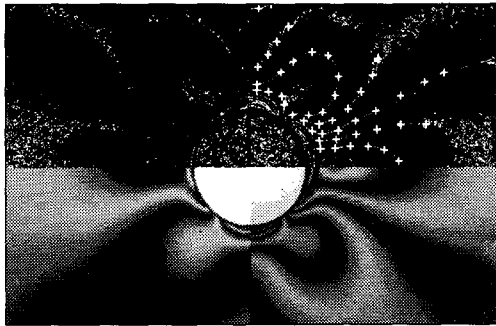


Fig. 5 Fringe-sharpened lines extracted from fringe pattern of upper half of Fig. 4 and measured data locations ("+" marking) on the fringe sharpened lines after two times fringe multiplication.

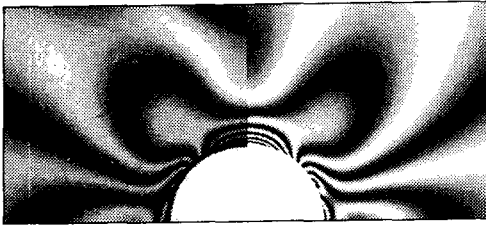
Fig. 4의 좌측은 Fig. 3과 동일한 원래의 광탄성 프린지 패턴이고, 우측은 식 (13)을 이용하여 2배로 증식시킨 프린지를 비교하여 나타냈다. Fig. 5의 상반부는 Fig. 4의 상반부 프린지패턴을 식 (15)의 알고리즘에 의하여 세선처리한 영상이고, 하반부는 Fig. 4와 동일한 프린지 영상이다. Fig. 5의 좌측 하반부와 상반부를 비교하여 보면 프린지 차수가 정확히 반차수(half-order fringe) 단위(0, 1/2, 1, 3/2, ...)로 세선처리되었으며, 우측의 하반부와 상반부를 다시 비교하여 보면 2배로 증식된 프린지로부터 1/4프린지 차수마다 세선처리되었

음을 관찰할 수 있다. 따라서, 프린지를 2배로 증식시키고 세선처리하면 Fig. 5의 우측 상반부와 같이 등색프린지를 1/4프린지 차수 크기(0, 1/4, 2/4, 3/4, 1, 5/4, ...)로 정확한 위치에서 측정할 수 있다. 측정할 데이터수는 최소자승법으로 결정하여야할 미지의 상수의 5~6배가 되도록 하였다. Fig. 5의 우측 상반부의 "+" 표시는 1/4프린지 차수간격으로 측정된 47개의 데이터 위치를 나타낸다. 광탄성 데이터는  $1.3 < r/R < 3.2$  ( $R$ =구멍의 반지름(6.35mm),  $r$ =구멍중심으로부터 데이터까지의 거리)범위에서 고루 분포하도록 하였다. 구멍에 근접한 위치에서는 응력집중으로 인하여 프린지가 조밀하게 나타나게 되어 정밀한 측정이 곤란하므로, 구멍으로부터 1.7mm 떨어진 위치로부터 13.8mm 범위에서 프린지 차수와 좌표를 측정하였다.

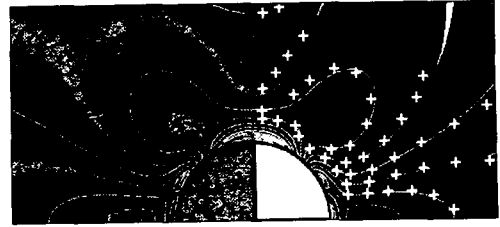
3.3.1 응력함수의 항의 수에 따른 해석결과

응력성분은 Fig. 5의 우측 상반부에 표시된 광탄성 데이터(프린지차수 및 좌표)로부터 식 (10)의 비선형 최소자승법을 이용하여 응력함수에 관한 식 (2), (3)의 항의 수( $m$ )에 따른 계수( $a_k$ )를 계산한 후, 이들을 다시 식 (1)에 대입하여 구하였다. 해석결과의 타당성을 보일 수 있도록, 식 (1)의 응력성분을 다시 식 (8)에 대입하여 계산한 광탄성프린지를 실제의 프린지와 비교하였다. Fig. 6의 좌측은 2배로 증식된 실제의 프린지패턴이고, 우측은 식 (2)와 (3)의 급수형 응력함수에서 항의 수를  $m=3, 5, 7, 9$ 로 변화시켰을 때 구한 응력성분으로부터 계산한 프린지를 2배로 증식시켜 나타낸 프린지패턴이다. Fig. 7에서는 실제의 프린지와 계산된 프린지의 비교가 명확하도록 Fig. 6의 프린지패턴을 세선처리하여 나타내고, 계산된 프린지를 세선처리한 영상에 측정된 데이터위치("+ 표시)도 나타냈다. 응력함수의 항의 수( $m$ )에 따라 계산된 프린지는 Fig. 6 및 Fig. 7에서 보인 바와 같이 항의 수를 낮게 취하였을 때, 구멍에 근접한 부분에서는 실제 프린지와 잘 일치하나 구멍에서 떨어진 부분에서는 서로 다르게 나타났다. Fig. 7에서 보인 바와 같이 항의 수를 증가시킬수록, 계산된 프린지는 측정된 광탄성 데이터("+ 표시)에 일치하는 경향이 있으며 항의 수가  $m=9$ 이상일 때 서로 잘 일치

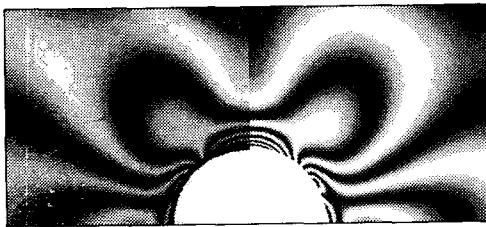
하였다.



(a)  $m=3$



(a)  $m=3$



(b)  $m=5$



(b)  $m=5$



(c)  $m=7$



(c)  $m=7$



(d)  $m=9$



(d)  $m=9$

**Fig. 6** Two times multiplied actual fringe pattern (left half) and calculated (right half) fringes for different number of terms ( $m$ ) of series type stress function.

**Fig. 7** Fringe sharpened lines from two times actual fringes (left half) and data locations ("+" marking) on the fringe sharpened lines (right half) of Fig. 6.

이로써, 실제의 프린지와 계산된 프린지의 정성적인 비교를 하였으나 정량적인 비교가 가능하도록 각각의 측정된 데이터위치에서 아래의 식 (16)과 같이 실제프린지 차수( $N_{exp}$ )와 계산된 프린지 차수( $N_{cal}$ )의 퍼센트오차( $E$ )를 계산하였다.

$$E = \frac{(N_{cal} - N_{exp})}{N_{exp}} \times 100 \quad (16)$$

Table 1에서는 Fig. 7로부터 실제의 프린지와 계산된 프린지가 비교적 잘 일치되는  $m=9$ 의 경우, 데이터순서,  $x$  및  $y$ 좌표, 실제로 측정한 프린지 차수( $N_{exp}$ ), 그리고 계산된 프린지 차수( $N_{cal}$ )를 나타내고 있다. Table 1에서 보인 바와 같이 47개의 데이터 중에서 6개의 데이터를 제외하면 모든 데이터에 대해서 계산된 프린지는 실제의 프린지에 3퍼센트 이하로 일치함을 알 수 있다. 또한, 응력함수의 항의 수( $m$ )에 따라 계산된 프린지가 실제의 프린지에 일치되는 정도의 변화를 비교하기 위하여 아래의 식 (17)과 같이 퍼센트 오차에 대한 표준편차( $SD$ : standard deviation)를 계산하였다.

$$SD = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n E_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n E_i \right)^2 \right]} \quad (17)$$

식 (17)에서  $n$ 은 측정된 데이터의 수를 의미한다. 하중을  $P=327 N$  및  $490 N$ 을 가하여 얻은 프린지패턴으로부터 응력함수의 항의 수( $m$ )를 3에서 9까지 변화시켰을 때 얻은 응력집중계수( $K_t$ )와 퍼센트오차에 대한 표준편차( $SD$ )를 계산하여 얻은 결과는 Table 2와 같다. 이들을 그래프로 나타내면 Fig. 8 및 Fig. 9와 같으며, 표준편차나 응력집중계수는 응력함수의 항의 수가  $m=9$ 이상에서는 일정한 값으로 수렴되는 경향을 나타냈다.

Fig. 10에서는 위의 해석절차를 거쳐 실제의 프린지와 계산된 프린지 차수의 퍼센트오차에 대한 표준편차( $SD$ )나 응력집중 계수( $K_t$ )가 일정한 값으로 수렴될 때, 즉 응력함수의 항의 수를  $m=9$ 를 취하였을 경우에  $P=327 N$ 과  $P=490 N$ 을 받

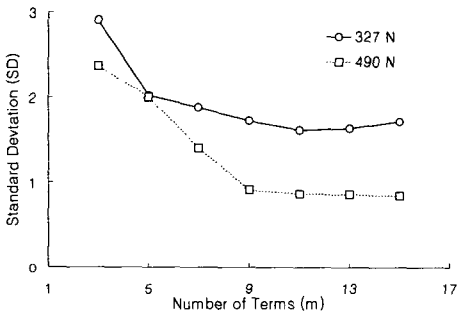
Table 1 Data locations (x and y), experimental and calculated fringes ( $N_{exp}$  and  $N_{cal}$ ), and percentage error ( $E$ ).

No	x(mm)	y(mm)	$N_{exp}$	$N_{cal}$	Error(%)
1	7.775	1.986	.750	.785	4.620
2	9.416	2.073	.750	.787	4.970
3	11.146	2.245	.750	.780	4.030
4	13.132	2.245	.750	.762	1.630
5	14.945	1.900	.750	.748	-.320
6	16.589	.691	.750	.731	-2.520
7	7.689	2.850	1.000	1.003	.340
8	9.589	3.023	1.000	1.032	3.240
9	11.836	3.543	1.000	1.015	1.510
10	14.168	4.061	1.000	1.000	-.030
11	16.848	4.493	1.000	.996	-.430
12	6.911	3.889	1.250	1.227	-1.820
13	8.034	3.630	1.250	1.246	-.290
14	9.848	3.975	1.250	1.240	-.840
15	11.750	4.925	1.250	1.253	.240
16	13.995	6.134	1.250	1.246	-.310
17	16.761	7.602	1.250	1.245	-.430
18	19.525	9.070	1.250	1.261	.920
19	.864	16.761	1.250	1.256	.460
20	2.245	17.193	1.250	1.260	.770
21	5.961	4.925	1.500	1.452	-3.220
22	7.689	4.580	1.500	1.500	-.030
23	9.157	5.011	1.500	1.504	.240
24	10.886	6.307	1.500	1.509	.600
25	12.355	8.034	1.500	1.511	.710
26	13.650	9.761	1.500	1.491	-.600
27	.777	10.627	1.500	1.476	-1.620
28	1.900	11.923	1.500	1.468	-2.140
29	2.936	13.305	1.500	1.487	-.880
30	4.234	14.859	1.500	1.490	-.690
31	4.666	5.702	1.750	1.683	-3.840
32	6.480	5.616	1.750	1.730	-1.120
33	8.034	5.961	1.750	1.746	-.210
34	9.416	7.689	1.750	1.759	.540
35	9.848	9.675	1.750	1.753	.180
36	8.639	11.836	1.750	1.753	.200
37	6.825	12.182	1.750	1.757	.390
38	4.752	11.232	1.750	1.752	.090
39	3.371	10.109	1.750	1.733	-.950
40	.691	8.811	1.750	1.788	2.190
41	3.716	6.739	2.000	2.023	1.150
42	3.457	7.602	2.000	2.000	.010
43	1.986	8.034	2.000	2.016	.820
44	.691	8.207	2.000	2.022	1.120
45	21.684	10.023	1.250	1.246	-.350
46	19.698	4.580	1.000	.997	-.340
47	14.254	11.491	1.500	1.495	-.340

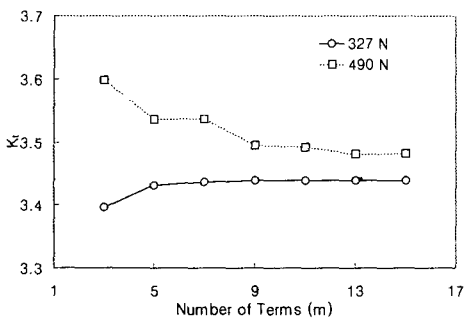


**Table 2** Variation of stress concentration factor ( $K_t$ ) and standard deviation( $SD$ ) for different number of terms ( $m$ ) of series type stress function.

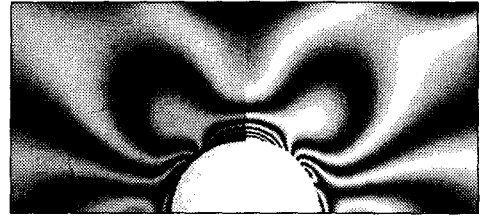
Number of Terms ( $m$ )	P=327 N		P=490 N	
	$K_t$	$SD$	$K_t$	$SD$
3	3.396	2.903	3.598	2.370
5	3.432	2.022	3.537	2.001
7	3.436	1.874	3.538	1.402
9	3.439	1.715	3.495	0.911
11	3.439	1.605	3.493	0.858
13	3.439	1.629	3.481	0.852



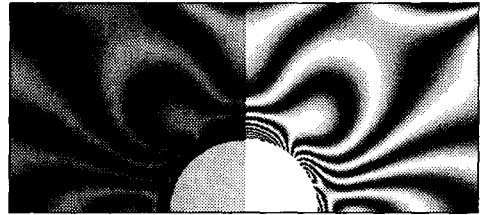
**Fig. 8** Variation of standard deviation ( $SD$ ) for different number of terms ( $m$ ) of series type stress function.



**Fig. 9** Variation of stress concentration factor ( $K_t$ ) for different number of terms ( $m$ ) of series type stress function.



(a) P=327 N



(b) P=490 N

**Fig. 10** Two times fringe-multiplied actual (left) and calculated (right) photoelastic fringe patterns.



(a) P=327 N



(b) P=490 N

**Fig. 11** Fringe-sharpened lines extracted from actual (left) and calculated (right) fringe pattern of Fig. 10 and measured data locations ("+" marking).

는 광탄성프린지와 계산된 프린지 패턴을 각각 2 배로 증식하여 비교하였다. Fig. 11은 Fig. 10을 세선처리한 프린지선에 데이터 위치를 표시하였다. Fig. 10과 Fig. 11에서 오른편의 계산된 프린지패턴은 왼편의 실제의 프린지와 잘 일치되고, 또한 계산된 프린지루프(fringe loop)는 측정된 데이터위치(“+” 표시)를 정확히 통과함을 관찰할 수 있다.

#### 4. 유한요소 해석

유한요소 해석은 중심부에 원형 구멍이 있는 유한폭의 단일 축하중을 받는 Fig. 2와 동일한 형상을 취하였다. 영탄성계수와 푸아송비는 광탄성 실험에 사용된 폴리카보네이트(PSM-1)의 물성치( $E=2482\text{ MPa}$ ,  $\nu=0.38$ )를 그대로 사용하였다. Fig. 2의 시편은 수평 및 수직축에 대하여 대칭이므로, Fig. 12와 같이 시편의 1/4에 대한 부분을 유한요소 상용프로그램인 ANSYS<sup>(21)</sup>로 해석하였다. 해석에 사용된 요소는 8노드 사변형요소(8 node quadrilateral element)이고, 정밀한 결과를 얻을 수 있도록 응력이 집중되는 구멍주위의 근방에서는 조밀한 요소로 분할하였다. Fig. 13에서는 Fig. 2의 B에서 A까지 구멍 원주상의 접선응력을 ANSYS로 계산된 결과와 광탄성실험법에 의한 하이브리드 응력해석 결과를 평균응력( $\sigma_o = P/A$ ,  $P$ :작용하중,  $A$ :단면적)으로 무차원화시킨 후 비교하여 그래프로 나타냈다. Fig. 14에서는 구멍으로부터 시험편의 가장자리까지 하중에 수직인 선(Fig. 2의 A-C선) 상에서 ANSYS와 하이브리드 광탄성법으로 얻은 수직응력을 무차원화하여 비교한 그래프이다. Fig. 13 및 Fig. 14에서 보인 바와 같이 하이브리드 광탄성법에 의한 결과는 응력구배가 심한 구멍주위의 접선응력뿐만 아니라, 구멍으로부터 멀리 위치한 부분에서도 수직응력 분포는 유한요소해석 결과와 서로 잘 일치되었다. Table 3에서는 하이브리드 광탄성법, 유한요소해석 및 Heywood<sup>(1, pp.111)</sup> 식으로부터 얻은 응력집중계수( $K_t$ )의 값을 서로 비교하였다.

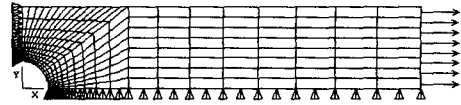


Fig. 12 ANSYS discretization of one-quarter plate (306 elements and 1001 nodes) of Fig. 2.

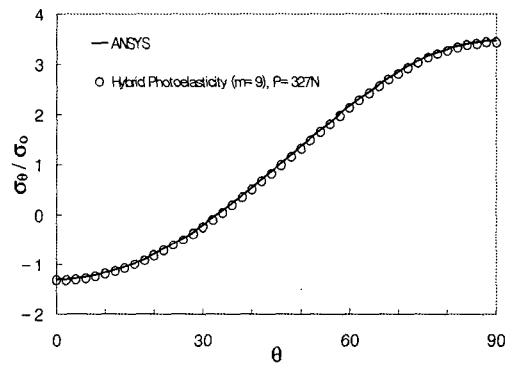


Fig. 13 Normalized tangential stress on the hole boundary of Fig. 2.

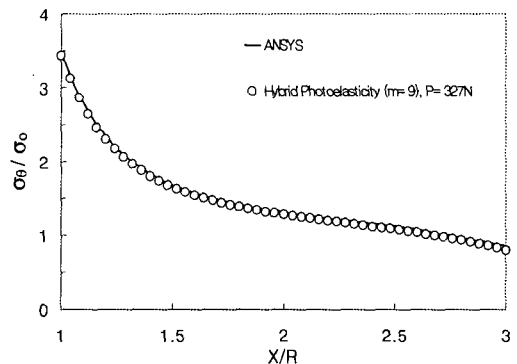


Fig. 14 Normalized axial stress distribution from the point "A" to "B" of Fig. 2 (X=distance from the center of the hole, R=radius of the hole).

**Table 3** Comparison of stress concentration factors ( $K_t$ ) obtained from hybrid photoelasticity, finite element analysis and empirical equation.

D/W	Hybrid Photoelasticity (m=9)		ANSYS ( $K_t$ )	Heywood ( $K_t$ )
	Load (P)	$K_t$		
0.333	327 N	3.439	3.473	3.444
	490 N	3.495		

Note : D=hole diameter (12.7mm)  
W=plate width(38.1mm)

5. 결론 및 토의

본 연구에서는 원형구멍 주위의 응력장을 광탄성 실험에 의한 등색프린지 데이터와 급수형 등각사상 맵핑함수를 이용하여 해석하였다. 정밀한 광탄성 데이터를 얻을 수 있도록 디지털 영상처리에 의하여 등색프린지 패턴을 2배로 증식시키고, 증식된 영상을 다시 세선처리하여 1/4차수 간격(0, 1/4, 2/4, 3/4, 1, 5/4, ...)으로 데이터를 측정하였다. 정량적인 분석을 위하여 각각의 광탄성 측정 데이터와 계산된 프린지에 대한 퍼센트 오차를 계산하였으며, 급수형 응력함수의 항의 수에 따른 퍼센트오차에 대한 표준편차를 비교하였다. 본 연구로부터 얻은 결론을 요약하면 다음과 같다.

(1) 광탄성 실험에 의한 실제의 프린지와 하이브리드 응력장 해석에 의하여 계산된 프린지를 비교하였으며, 세선처리된 영상에 데이터의 위치를 표시하여 정성적이고 또한 정량적인 비교가 가능하도록 하였다. 또한, 디지털 영상처리에 의하여 프린지를 증식시키고 세선처리한 영상으로부터 정밀한 광탄성데이터를 얻을 수 있었으며, 측정된 프린지차수와 계산된 프린지의 퍼센트오차는 40~50개의 데이터 중에서 5~6개의 데이터를 제외하면 3퍼센트 미만으로 서로 일치하였다.

(2) 광탄성 데이터의 수를 40~50개로 하고, 광

탄성 데이터의 측정 범위를 구멍의 가장자리로부터 1.7 mm 서 13.8 mm 의 범위( $1.3 < r/R < 3.2$ ,  $r$ =구멍중심으로부터 데이터거리,  $R$ =구멍의 반지름)에 분포하였을 때, 급수형 응력함수의 항의 수 ( $m$ )를 9 이상으로 사용할 경우 측정데이터와 계산된 프린지가 잘 일치되었으며 퍼센트 오차에 대한 표준편차가 적은 값으로 감소되었다. 이러한 조건에서 얻은 하이브리드 광탄성법에 의한 결과는 유한요소해석과 Heywood식으로 계산한 값과 2퍼센트 이내로 서로 일치하였다.

그러나, Table 2와 Fig. 9에서 보인 바와 같이 응력집중계수  $K_t$ 는 P=490N일 경우는 P=390N일 경우에 비하여 수렴이 잘 되지 않은 경향이 나타났다. 이러한 이유는 프린지데이터(프린지차수 및 x, y좌표)측정에 다른 실험오차에 기인하는 것으로 추정되나, 이에 대한 구체적인 연구가 필요할 것으로 사료된다.

광탄성을 이용한 하이브리드 응력해석시 급수형 응력함수의 항의 수( $m$ )를 변화시켜가며 해석하였을 때, 적은 수의 항을 사용하였을 경우 구멍에 근접하는 범위내에서는 계산된 프린지는 실제의 광탄성프린지 패턴과 잘 일치하는 것으로 보이나 구멍으로부터 멀리 떨어진 부분에서는 계산된 프린지가 실제의 프린지와 상이하게 나타나는 경향이 있으므로 데이터 해석에 신중을 기하여야 한다. 본 연구에 사용된 급수형 등각사상 응력함수는 등방성 재료를 포함한 이방성 복합체에 대해서도 적용될 수 있으며, 구멍의 형상이 원형 뿐만 아니라 타원형, 삼각형 또는 사각형등에서도 편리하게 사용될 수 있다.

후 기

이 논문은 1997년 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

(1) Peterson, R. E., 1974, Stress Concentration Factors, John Wiley and Sons, New York.

- (2) Savin, G. N., 1961, *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press, New York,
- (3) Gerhardt, G. D., 1984, "A Hybrid/Finite Element Approach for Stress Analysis of Notched Anisotropic Materials," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 804~810.
- (4) Tong, P., 1977, "A Hybrid Crack Element for Rectilinear Anisotropic Material," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 377~403.
- (5) Rhee, J., He, S., and Rowlands, R. E., 1996, "Hybrid Moire-Numerical Stress Analysis around Cutouts in Loaded Composites," *Experimental Mechanics*, Vol. 36, No. 4, pp. 379~387.
- (6) Lin, S. T., and Rowlands, R. E., 1995, "Thermoelastic Stress Analysis of Orthotropic Composites," *Experimental Mechanics*, Vol. 35, No. 3, pp. 257~265.
- (7) Rauch, B. J., and Rowlands, R. E., 1995, "Determining Reliable Edge Isopachic Data from Interior Thermoelastic Measurements," *Experimental Mechanics*, Vol. 35, No. 2, pp. 174~181.
- (8) Hawong, J. S., Lin, C. H., Lin, S. T., Rhee, J., and Rowlands, R. E., 1995, "A Hybrid Method to Determine Stresses in Orthotropic Composite using only Isochromatic Data," *Journal of Composite Materials*, Vol. 29, No. 9, pp. 2366~2387.
- (9) 신동철, 황재석, 이효재, 남정환, 권오성, 1998, "등방성체 파괴역학에 투과형 광탄성 실험의 하이브리드 법 적용", *대한기계학회 논문집 A권*, 제22권, 제5호, pp. 834~842.
- (10) Feng, Z., and Rowlands, R. E., 1991, "Smoothing Finite-Element and Experimental Hybrid Technique for Stress Analyzing Composites," *Computers and Structures*, Vol. 39, No. 6, pp. 631~639.
- (11) 백태현, 1997, "직교이방성 재료의 구멍 주위에 관한 하이브리드 응력해석시 요소크기의 효과", *대한기계학회논문집(A)*, 제21권, 제10호, pp. 1702~1711.
- (12) 임장근, 송관섭, 1996, "평면 탄성 문제의 트래포즈 유한요소법과 캐비티 요소의 구성," *대한 기계학회 논문집(A)*, 제20권, 제1호, pp. 163~171.
- (13) Sanford, R. J., 1980, "Application of the Least Squares Method to the Photoelastic Analysis," *Experimental Mechanics*, Vol. 20, No. 6, pp 192~197.
- (14) Photoelastic Division, Measurement Group, Inc., Raleigh, NC 27611, USA.
- (15) 백태현, 1994, "광탄성프린지 해석을 위한 영상처리기법 개발", *대한기계학회 논문집*, 제18권, 제10호, pp. 2577~2584.
- (16) Han, B. and Wang, L., 1993, "Isochromatic Fringe Sharpening and Multiplication," *Proceedings of the 1993 SEM 50th Anniversary Spring Conference on Experimental Mechanics*, Society for Experimental Mechanics, pp. 1206~1209.
- (17) Gonzalez, R. C. and Wintz, P., 1987, *Digital Image Processing*, Addison Wesley Publishing Company, pp. 176~179.
- (18) Baek, T. H. and Kim, M. S., 1993, "The Study of Accuracy Improvement Technique for Stress Analysis in Photoelasticity through Digital Image Processing," *Proceedings of the 1993 SEM 50th Anniversary Spring Conference on Experimental Mechanics*, Society for Experimental Mechanics, pp. 674~681.
- (19) 백태현, 1993, "광탄성 등색프린지의 세선처리를 위한 영상처리기법", *한국정밀공학회지*, 제10권, 제3호, pp. 220~230.
- (20) DT3801 Image Frame Grabber, Data Translation, Inc., Malboro, MA 01752, USA.
- (21) ANSYS Program and User's Manual, Version 5.3, Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, PA.

부록(Appendix)

$$S_{11}\mu^4 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 + S_{22} = 0 \tag{A1}$$

$$B = \frac{(\overline{\mu_2} - \overline{\mu_1})}{(\mu_2 - \mu_2)}, \quad C = \frac{(\overline{\mu_2} - \mu_1)}{(\mu_2 - \mu_2)} \tag{A2}$$

위의 식 (A1)에서  $S_{ij}(i, j=1, 2, 6)$ 는 일반적인 훅크의 법칙(generalized Hook's law)에 관한 식으로부터 탄성 컴플라이언스(elastic compliance)를 의미한다. 또한, 식 (A1)과 (A2)에서  $\mu_j$  ( $j=1, 2$ )는 재료에 관계되는 복소수 매개변수(complex material parameter)로서 식 (A1)의 근을 의미하며, 다른 2개의 근과  $\mu_3 = \overline{\mu_1}$  및  $\mu_4 = \overline{\mu_2}$ 의 관계를 갖고, 여기서 “—”표시는 공액복소수를 의미한다.

$$V(n, j) = (-1)^{n-1} (2k) \left[ \operatorname{Re} \left\{ (\mu_1^{n-1}) \frac{\xi_1^{k-1}}{\omega_1'(\xi_1)} + (\mu_2^{n-1}) \frac{-B\xi_2^{-k-1} + C\xi_2^{k-1}}{\omega_2'(\xi_2)} \right\} \right] \quad (\text{A3})$$

$$V(n, j+1) = (-1)^{n-1} (2k) \left[ \operatorname{Im} \left\{ (-\mu_1^{n-1}) \frac{\xi_1^{k-1}}{\omega_1'(\xi_1)} + (\mu_2^{n-1}) \frac{-B\xi_2^{-k-1} - C\xi_2^{k-1}}{\omega_2'(\xi_2)} \right\} \right] \quad (\text{A4})$$

식 (A3) 및 (A4) 에서  $n=1(\sigma_y)$ ,  $2(\tau_{xy})$ ,  $3(\sigma_x)$ 이고,  $k>0$  인 경우  $j=2(k+m)+1$ ,  $k \neq 0$ 이며,  $k<0$ 일 경우는  $j=2(k+m)-1$ 이다.