

# 장파장 산란 근사를 이용한 구형 개재물 문제의 유효 탄성적 성질

정 현 조\* · 김 진 호\*\*

(1998년 8월 6일 접수)

## Long Wavelength Scattering Approximations for the Effective Elastic Parameters of Spherical Inclusion Problems

Hyunjo Jeong and Jin-Ho Kim

**Key Words :** Effective Elastic Properties (유효 탄성적 성질), Spherical Inclusion (구형 개재물), Long Wavelength Scattering Approximation (장파장 산란근사), Multiple Scattering (다중 산란), Tungsten Particle/Epoxy Matrix Composite (텅스텐 입자/에폭시 기지 복합재)

### Abstract

The effective elastic properties of materials containing spherical inclusions were calculated by the elastic wave scattering theory. In the formulation additional scattering fields by the presence of random multiple scatterers that affects the effective properties were found by the single scattering approximation. In calculating the scattering fields the ensemble average on the displacements and strains inside the scatterer was found from the static approximation at long wavelength limit. The displacements were assumed to be equal to the incident field, while the strains were calculated by Eshelby's equivalent inclusion principle on the single inclusion problem. Four different models were considered and they reflected different degrees of multiple scattering effects based on the approximation introduced in the process of embedding the inclusion in the matrix. The expressions for the effective elastic constants were given in each model, and their relations to the results obtained from other scattering theory and elasticity theory were discussed. The theoretical predictions were compared with experimental results on the epoxy matrix composites containing tungsten particles of different sizes and volume fractions

### 1. 서론

연속체내에 비균질체가 불규칙적으로 분포한 복합 매질의 유효 물성치를 정확히 예측하기 위한 이론적인 연구 노력이 많은 사람들에 의하여 진행되어 왔다. 섬유, 휘스커, 입자와 같은 비균질체는 재료의 성질을 강화시키나 기공과 같은 비균질체는 그 성질을 약화시킨다. 강화 복합재료의 설계에서 주어진 구성 재료의 성질과 강화재의 부피분율, 미시구조의 특성으로부터 최적의 성질을 얻기

위한 수단으로, 또한 기공과 같은 손상이 존재하는 재료에서는 손상으로 인한 재료 성질의 저하를 예측할 뿐만 아니라 손상량의 비파괴적 평가 수단으로서 이론 모델은 대단히 중요한 역할을 한다.

Mal과 Knopoff<sup>(1)</sup>는 단일 구형 개재물이 존재할 때 변위장에 대한 장파장 한계에서의 적분 방정식을 유도하였으며, Kuster와 Toksöz<sup>(2)</sup>는 이 적분 방정식을 사용하여 구면체 개재물의 유효 탄성계수를 구하였다. Berryman<sup>(3)</sup>은 복합재료의 유효 거시적 탄성계수를 구하기 위하여 다음과 같은 세가지의 단일산란근사를 제안하였다: 평균 T-

\* 회원, 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소

\*\* 부산대학교 대학원 기계설계공학과

matrix 근사 (ATA, average T-matrix approximation), 상관포텐셜근사 (CPA, coherent potential approximation), 미분유효매질 (DEM, differential effective medium). Devaney와 Levine<sup>(4)</sup>은 다중산란 이론의 자기일치적 방법에 기초한 모델을 제시하였다. 위의 방법들은 개재물의 모양이 구형이고 같은 반지름을 가지고 있다고 가정하며 또한 파장이 개재물의 크기보다 훨씬 큰 경우를 가정하고 있다. 김과 이<sup>(5)</sup>는 상관포텐셜근사를 동적인 문제로 확장하여 복합재료의 유효 파동속도와 감쇠를 구하였다.

본 논문에서는 탄성파의 산란 이론에 기초하여 구형 비균질물을 포함하는 재료의 유효성질을 통일적인 접근 방법을 사용하여 구하였다. 여기서 다른 구형 개재물 문제는 보다 일반적인 타원체형 개재물 문제의 유효성질을 구하기 위하여 확장될 수 있다.<sup>(6,7)</sup> 산란 변위장은 단일 산란체에 대한 Mal과 Knopoff<sup>(1)</sup>의 적분방정식을 사용하였으며, 산란문제의 수식화에서 유효매질의 성질을 결정하는 다수의 랜덤한 산란체의 존재에 의한 추가적인 산란장은 단일산란 근사로부터 구하였다. 산란장의 계산에서 산란체내의 변위와 변형률에 대한 앙상블 평균은 장파장 한계에서 이들 값을 정적 근사로부터 구하였다. 정적 근사에서 변위는 모두 입사파의 변위와 같다고 가정하며 변형률을 구하기 위하여 변형률 집중계수를 도입하였다. 이 계수는 개재물내의 평균 변형률과 경계에서의 균일 변형률 사이를 관련시키며 구성재료의 탄성계수, 개재물의 모양과 방향 등에 의존한다. 이 계수를 구하기 위한 여러 가지 근사적 방법을 소개하였으며, 단일 개재물 문제에 대한 Eshelby의 등가개재물원리<sup>(8)</sup>를 이용하여 통일된 방법으로 구하였다. 본 논문에서는 저농도 근사 (dilute approximation), 미분법 (differential method), 자기일치적 방법 (self-consistent method), Devaney의 다중산란이론 (multiple scattering theory)의 자기일치적 방법, Moritanka 방법에 의한 결과식을 제시하였으며 변형률 집중계수의 평가에서 도입한 근사의 정도에 따라 각 방법은 서로 다른 정도의 다중 산란 효과를 반영하게 된다. 본 연구에서 얻은 결과와 다른 산란 이론과 탄성정역학으로 구한 결과와의 상관관계에 대하여 논의하였으며, 예폭시 기지에 여러 가지 크기와 부피분율의 텅스텐을 포함하는 복합 재료에 대한 실험 결과<sup>(9)</sup>를 산란근사 이론에 의

한 예측값과 비교하였다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 구에 의한 단일 산란

유효 탄성적 성질을 구하기 위하여 먼저 고체 기지내에 놓여 있는 개재물에 의한 산란파를 구할 필요가 있다. 탄성계수  $C_{2ijkl}$ , 밀도  $\rho_2$ , 체적  $\Omega$ , 경계  $S$ 의 단일 개재물이  $C_{1ijkl}$ ,  $\rho_1$ 의 무한 균질매질 내에 놓여 있다고 가정하자. 무한대에서 입사파의 변위는  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})\exp(-i\omega t)$  이며, 여기서  $\omega$ 는 파의 각 주파수이다. 기지내의 점  $\mathbf{x}$ 에서 관찰한 산란파의 변위장을  $\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , 개재물내의 점  $\xi$ 에서의 산란파의 변위장을  $\Delta\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 로 두면  $S$ 의 외부와 내부에서의 총 변위장은 다음 식으로 각각 표시되며

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

여기서 편의상 시간 의존 항  $e^{i\omega t}$ 는 생략하였다.  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 와  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ 는 모두 미분방정식 (2)를 만족하며,

$$C_{ijkl} u_{k,lj}^0(\mathbf{x}) + \rho_1 \omega^2 u_i^0(\mathbf{x}) = 0, \quad (2)$$

$\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 는 식 (3)을 만족한다.

$$C_{2ijkl} v_{k,lj}(\mathbf{x}) + \rho_2 \omega^2 v_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (3)$$

여기서  $_{,i}$ 는  $x_i$ 에 대한 편도함수를 나타내며, 하첨자  $i, j, k, l$ 은 1, 2, 3을 취하며 반복 첨자에 대한 더하기 규칙이 적용된다. 균질, 등방성 무한 기지내의 한 점  $\mathbf{x}'$ 에서의 점원으로 인한 Green 함수는 식 (4)로 주어진다.

$$C_{ijkl} g_{mk,lj}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \rho_1 \omega^2 g_{im}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4)$$

입사파, 총 산란파 및 Green 함수에 대한

연산자를 아래와 같이 정의한다.  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 는 모두 다음의 미분방정식을 만족하며

$$L_i^0(\mathbf{x})[\mathbf{u}^0(\mathbf{x})] \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{1ijpq} \frac{\partial u_p^0}{\partial x_q} \right) + \rho_1 \omega^2 u_i^0(\mathbf{x}) = 0 \quad (5)$$

$\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 와 Green 함수는 각각 다음 식을 만족한다.

$$L_i(\mathbf{x})[\mathbf{v}(\mathbf{x})] \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{2ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial x_q} \right) + \rho_2 \omega^2 v_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (6)$$

$$L_{im}^0(\mathbf{x})[\mathbf{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')] \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \left( C_{1ijkl} \frac{\partial G_{mk}}{\partial x_j} \right) + \rho_1 \omega^2 g_{im}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = -\delta_{im} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad (7)$$

반지름이  $a$ 이고 점  $\zeta$ 에 그 중심이 있는 단일 구형 산란체로 인한  $\mathbf{x}$ 에서의 변위를  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \zeta) \exp(i\omega t)$ 라고 하자. 균질, 등방성 무한 기지내의 한 점  $\xi$ 에서  $i$  방향으로 작용하는 점원으로 인한 Green 함수의  $k$  성분은 다음 식을 만족한다.

$$G_{ki}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{4\pi \rho_1 \omega^2} \left[ k_\beta^2 \frac{e^{ik_\beta r}}{r} \delta_{ki} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} \left( \frac{e^{ik_\alpha r}}{r} - \frac{e^{ik_\beta r}}{r} \right) \right] \quad (8)$$

여기서  $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \xi|$ 은 가진점과 수신점 사이의 거리이고  $k_\alpha = \omega [\rho_1 / (\lambda_1 + 2\mu_1)]^{1/2}$ 와  $k_\beta = \omega [\rho_1 / \mu_1]^{1/2}$ 는 각각 기지의 종파와 횡파 벡터의 크기이다.

주어진  $G_{ki}$ 에 대하여 고체 기지내에 놓여 있는 단일 구형 개재물에 의한 산란파를 구하기 위하여 Mal과 Knopoff<sup>(1)</sup>가 유도한 적분식을 사용하기로 한다. 기지내의 한 점  $\mathbf{x}$ 에서 관찰한 산란파의 변위  $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ 는 다음 식으로 주어지며,

$$\Delta u_k(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \left\{ \Delta \rho \omega^2 v_i(\xi) - \Delta C_{ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial \xi_q} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right\} G_{ki}(\mathbf{x}, \xi) d\xi \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{v}(\xi)$ 는 개재물내의 한 점  $\xi$ 에서의 변위,  $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ ,  $\Delta C_{ijpq} = C_{2ijpq} - C_{1ijpq}$ 이다. 식 (9)의 괄호속의 마지막 항은 다음식으로 표현할 수 있으며

$$\Delta C_{ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial \xi_q} = \frac{1}{2} \Delta C_{ijpq} \left( \frac{\partial v_p}{\partial \xi_q} + \frac{\partial v_q}{\partial \xi_p} \right) = \Delta C_{ijpq} \epsilon_{pq} \quad (10)$$

여기서  $\epsilon_{pq}$ 는 개재물 내부의 변형률이다. 따라서 식 (9)은 산란체 외부의 임의 점에서의 변위를 산란체 내부의 변위와 변형률의 향으로 표시한 정확한 적분식이다.

식 (9)의 적분을 수행하기 위하여 구 내부의 변위 및 변형률을 입사장의 향으로 구하는 것이 필요하다. 기지가 고체이고 입사파와 파장이 개재물 크기보다 훨씬 크면 구 내부의 장은 균일한 정적 장으로 대체할 수 있다. 구형 산란체 내부의 변위에 대한 최저 차수 근사는 (Born 근사로 알려져 있음) 다음과 같이 둘 수 있으며,

$$\mathbf{v}(\xi) \approx \mathbf{u}^0(\zeta), \quad (12)$$

여기서  $\zeta$ 는 개재물의 중심이다. 기지재와 산란체가 임의의 탄성적 성질 차이를 갖는 경우, Mal과 Knopoff<sup>(1)</sup>는 구형 개재물 내의 변형률에 대한 최저 차수 근사를 입사 변형률의 향으로 다음과 같이 구하였으며

$$\epsilon_{kl}(\zeta) \approx T_{ijkl} \epsilon_{kl}^0, \quad (13)$$

여기서 텐서  $\mathbf{T} = [\mathbf{I} + \mathbf{S} \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1)]^{-1}$ 이며,  $\mathbf{I}$ 는 일치텐서,  $\mathbf{S}$ 는 구에 대한 Eshelby 텐서이다. 이 결과의 중요한 특징은 식 (13)의 변형률은 무한한 경계에서 균일한 변형률  $\epsilon_{kl}^0$ 가 작용할 때

Eshelby 가 얻은 구형 비균질물 내의 균일한 정적 변형률<sup>(8)</sup> 과 같다는 것이다. 따라서 구형 개재물에 대하여 장파장의 경우 변형률에 대한 최저 차수 근사는 상응하는 정적 문제의 해와 일치한다.

그러나, 식 (13)의 근사에서는 개재물 사이의 상호작용이 고려되지 않으므로 저농도인 경우에만 유효하다. 여기서는 개재물 사이의 상호작용을 고려하므로써 다중산란 효과를 반영하기 위하여 구형 개재물 내부의 변형률  $\epsilon_{pq}$  와 무한 경계에서의 균일한 변형률  $\epsilon_{pq}^0$  사이를 관계짓는 일반적인 개념의 변형률 집중계수 (strain concentration factor)  $A$  를 도입한다.

$$\epsilon_{pq}(\zeta) \approx A_{pqrs} \epsilon_{rs}^0 \quad (14)$$

텐서  $A$  는 Eshelby 의 등가개재물원리(equivalent inclusion principle)<sup>(8)</sup> 를 이용하여 구할 수 있으며, 단일 개재물을 기지재내에 두는 과정에서 도입되는 근사의 정도에 따라 여러 가지 다른 결과를 얻을 수 있다.

식 (12), (14)을 (9)에 대입하면 구의 외부 임의점에서의 변위에 대한 1차 근사를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$u_k(\mathbf{x}, \zeta) = u_k^0(\mathbf{x}) + \Delta\rho \omega^2 u_i^0(\zeta) \int_{\Omega} G_{ki}(\mathbf{x}, \xi) d\xi - \Delta C_{ijkl} A_{klpq} \frac{\partial u_p^0}{\partial \zeta_q}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \int_{\Omega} G_{ki}(\mathbf{x}, \xi) d\xi, \quad (15)$$

관측점이 구에서 아주 멀리 떨어져 있을 때 Green 함수의 구 체적에 대한 적분은 다음과 같이 된다.

$$\int_{\Omega} G_{ki}(\mathbf{x}, \xi) d\xi \approx \Omega G_{ki}(\mathbf{x}, \zeta) \quad (16)$$

식 (16)을 이용하면 구에 의한 산란 변위장은 식 (17)로 된다.

$$\Delta u_k(\mathbf{x}, \zeta) = \Omega \left\{ \Delta\rho \omega^2 u_i^0(\zeta) G_{ki}(\mathbf{x}, \zeta) - \Delta C_{ijkl} A_{klpq} \frac{\partial u_p^0}{\partial \zeta_q} \frac{\partial G_{ki}}{\partial \zeta_j} \right\} \quad (17)$$

여기서 무시된 항들의 차수는  $(ka)^n, n \geq 4$  이다.

### 2.2 랜덤 분포한 구에 대한 산란

동일한 탄성적 성질과 밀도를 가진 구형 개재물의 총체적 효과를 고려하자. 모든 산란 영역내에서 산란체의 외부 위치  $\mathbf{x}$ 에서의 변위는 식 (18)와 같으며,

$$u_k(\mathbf{x}, \zeta^1, \zeta^2, \dots, \zeta^N) = u_k^0(\mathbf{x}) + \sum_s \Delta u_k(\mathbf{x}, \zeta^s) \quad (18)$$

$\Delta u_k(\mathbf{x}, \zeta^s)$ 는  $\zeta^s$ 에 위치한 산란체로 인한 산란장이다. 식 (18)을 적용하는데 있어서 주목할 것은  $\zeta^s$ 에서의 산란체에 작용하는 여기장(exciting field)은  $u_k^0(\mathbf{x})$ 가 아니고,  $\zeta^s$ 에 산란체가 존재하지 않을 때 그 산란체의 위치에 존재할 총 변위장으로 대신한다는 가정을 포함한다

$N$ 개의 산란체가 랜덤하게 분포하고 있는 경우에 대하여 전체 산란장의 평균장을 구하기 위하여 구의 이산 분포는 연속적인 확률밀도함수  $w(\zeta, a)$ 로서 묘사할 수 있다고 가정한다. 여기서  $\zeta$  (산란체의 위치)와  $a$  (반경)는 랜덤 변수이다. 함수  $f(\mathbf{x}, \zeta, a)$ 의 배열평균 (configurational average)는 다음 식으로 정의된다.

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int da \int f(\mathbf{x}, \zeta, a) w(\zeta, a) d\zeta \quad (19)$$

식 (15)의 양변에 평균을 취하고  $s$ 번째를 제외한 모든 산란체에 관한 평균을 그 자신의 평균장으로 대체하면 식 (20)을 얻는다.

$$u_k(\mathbf{x}) = u_k^0(\mathbf{x}) + N \int \left[ \Delta\rho \omega^2 \langle u_i(\zeta) \rangle G_{ki}(\mathbf{x}, \zeta) - \Delta C_{ijkl} A_{klpq} \frac{\partial u_p}{\partial \zeta_q} \left\langle \frac{\partial u_p}{\partial \zeta_q} \frac{\partial G_{ki}}{\partial \zeta_j} \right\rangle c(\zeta) w(\zeta, a) d\zeta da \right] \quad (20)$$

구의 크기가 모두 같은 경우에 식 (20)은 다음과 같이 되며

$$\langle u_k(\mathbf{x}) \rangle = u_k^0(\mathbf{x}) + v_2 \int \left[ \Delta\rho \omega^2 \langle u_i(\zeta) \rangle G_{ki}(\mathbf{x}, \zeta) - \Delta C_{ijkl} A_{klpq} \left\langle \frac{\partial u_p}{\partial \zeta_q} \frac{\partial G_{ki}}{\partial \zeta_j} \right\rangle d\zeta \right] \quad (21)$$

여기서  $v_2$ 는 비균질물 전체의 부피분율이다.

거시적인 파의 변수들을 구하기 위하여 식 (21)의 양변에 식 (5), (7)에서 정의한  $L^0(\mathbf{x})$ 를 작용시킨다. Green 함수의 대칭성을 이용하면 평균 파동 함수는 다음의 미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (C_{1ijpq} + v_2 \Delta C_{ijkl} A_{klpq}) \frac{\partial \langle u_p \rangle}{\partial x_q} \right\} + (\rho_1 + c_2 \Delta \rho) \omega^2 \langle u_i(\mathbf{x}) \rangle = 0 \quad (22)$$

2 상, 균질 등방성 복합재 매질을 전파하는 탄성파의 평균 값은 유효 탄성계수  $C_{ijkl}$ 와 밀도  $\rho$ 의 균질, 등방성 탄성 매질을 전파하는 것처럼 보인다. 유효 파 벡터 (wave vector)  $\mathbf{k}$ 로서 유효 매질 속을 전파하는 평면파  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ 가 만족하는 미분방정식과 위 식 (22)를 비교하면 유효 탄성계수와 밀도는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + v_2 (\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1) \mathbf{A} \quad (23)$$

$$\rho = \rho_1 + v_2 (\rho_2 - \rho_1) \quad (24)$$

식 (24)는 복합재의 유효 밀도는 2 상의 밀도의 체적 평균으로 주어짐을 나타낸다. 식 (14)의 변형률 집중계수를 구하기만 하면 유효 매질의 종파와 횡파 속도는 다음 식으로 주어진다.

$$V_L = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}, \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (25)$$

$K$ 와  $\mu$ 는 복합재료의 체적 탄성계수와 전단 탄성계수이다.

따라서 이러한 정도의 근사하에서 종파 및 횡파 속도는 랜덤 매질이 체적 평균에 의한 밀도와 정적인 문제의 탄성계수를 갖는 균질한 탄성 매질로 대체된 것과 같은 거동을 한다. 그러므로 위의 결과는 3 절에서 다룬 것과 같이 정적 해가 알려진 여러 가지 경우로 확장시킬 수 있다.

### 3. 유효 탄성 파라미터

#### 3.1 등가개재물 원리(equivalent inclusion principle)

Eshelby<sup>(8)</sup>는 타원체형의 개재물 또는 비균질물이 무한체(또는 기지)의 탄성체 내에 놓여 있는 3 차원 탄성문제에 대한 간편한 방법을 제안하였다. 여기서 개재물은 균질한 기지내에서 고유변형률 (eigenstrain)  $\epsilon_{ij}^*$ 가 부과된 유한 영역  $\Omega$ 로 정의하며, 비균질물은 기지와는 다른 탄성계수를 갖는 영역  $\Omega$ 로 정의한다. 고유변형률의 예는 열팽창계수 차이에 의한 변형률, 소성 변형률 등이다.

먼저 개재물 문제 (inclusion problem)로서 타원체 영역  $\Omega$ 가 균일한 고유변형률  $\epsilon_{ij}^*$ 를 받는 경우를 생각하자. 무한체 내의 탄성계수  $C_{ijkl}$ 의 개재물은 개재물 내, 외부에 응력장을 유발시킨다. Eshelby는  $\Omega$  내부의 응력을 다음과 같이 얻었으며

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*), \quad (26)$$

여기서  $\epsilon_{kl}$ 은 총 변형률로서 고유변형률과는

$$\epsilon_{kl} = S_{klmn} \epsilon_{mn}^* \quad (27)$$

의 관계를 가지고,  $S_{ijkl}$ 은 Eshelby 텐서이다. 주어진 고유변형률  $\epsilon_{ij}^*$ 에 대하여 개재물  $\Omega$  내부의 응력을 식 (26), (27)으로부터 구할 수 있다.

이제 비균질물 문제 (inhomogeneity problem)로서 탄성계수  $C_{2ijkl}$ 의 타원체 영역  $\Omega$ 가  $C_{1ijkl}$ 의 기지내에 놓여 있고 무한대에서  $\sigma_{ij}^0$ 의 응력을 받을 때,  $\Omega$  내부의 총 응력  $\sigma_{ij}$ 는

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij} = C_{2ijkl} (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}^*) \quad (28)$$

으로 주어지며, 여기서  $\sigma_{ij}$ 와  $\epsilon_{kl}$ 는 각각 비균질물의 존재로 인하여 교란된 응력과 변형률이다.

등가 개재물 방법 (equivalent inclusion method)은 개재물  $\Omega$ 에 가상의 고유변형률  $\epsilon_{ij}^*$ 를 고려하므로써 발생하는 고유응력장으로 교란 응력장을 모사하기 위하여 사용된다. 고유변형률  $\epsilon_{ij}^*$ 를 갖는 영역  $\Omega$ 를 포함하는 탄성계수  $C_{ijkl}$ 의 무한체에  $\epsilon_{ij}^0$ 가 작용할 때,  $\Omega$  내부의 총 응력은

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (29)$$

이고, 여기서  $\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^0$  이다.

위의 비균질물과 개재물 문제에서 응력과 변형률이 등가이기 위해서는 다음 조건이 만족되면 된다 (Fig. 1 참조).

$$C_{2ijkl} (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}) = C_{1ijkl} (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (30)$$

$\sigma_{ij}^0$ 가 균일하면  $\Omega$  내에서  $\epsilon_{ij}^*$ 도 균일하다. 식 (27)로부터 교란 변형률은 고유변형률과  $\epsilon_{kl} = S_{klmn} \epsilon_{mn}^*$ 의 관계를 갖는다.

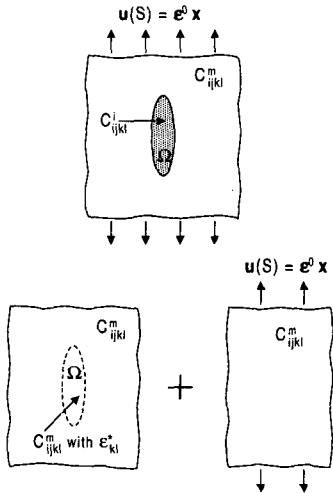


Fig. 1 Infinite body containing an inhomogeneous inclusion is subjected to the applied stress: (a) actual problem, (b) equivalent inclusion problem.

### 3.2 저농도 근사 (dilute concentration approximation)

비균질물의 부피분율이 낮아 상호작용을 무시할 수 있는 경우에 변형률 집중계수를 구하기 위하여 단일 개재물이 원래의 기지에 놓여 있다고 가정하면 등가개재물 방법은 식 (30)으로 표현된다. 개재물 내부의 평균응력은 다음과 같으므로

$$\epsilon^i = \epsilon^0 + \epsilon^p = \epsilon^0 + S \epsilon^*, \quad (31)$$

식 (30)은 다음과 같이 표시되며,

$$C_i \epsilon^i = C_m \epsilon^i - C_m \epsilon^* \quad (32)$$

이 식으로부터  $\epsilon^*$ 를 구하여 식 (31)에 대입하면

$$\epsilon^i = A \epsilon^0 = T^{dil} \epsilon^0, \quad (33)$$

이고

$$T^{dil} = [I + S C_m^{-1} (C_i - C_m)]^{-1} \quad (34)$$

따라서 저농도 근사의 경우 유효 탄성계수는 식 (23)으로부터 다음 식으로 주어진다.

$$C = C_m + v_i (C_i - C_m) T^{dil}. \quad (35)$$

등방성 텐서의 계산을 위하여 Hill의 단축 표현법<sup>(10)</sup>을 사용하면 등방성의 강성 또는 다른 일반적인 텐서  $L$ 은 다음과 같이 표시할 수 있고

$$L = (3K, 2\mu) = (P, Q),$$

여기서

$$3K = P = \frac{1}{3} L_{iijj}, \quad 2\mu = Q = \frac{1}{5} \left( L_{ijij} - \frac{1}{3} L_{iijj} \right)$$

일치텐서 (identity tensor)도 등방성이므로 Hill의 방법으로 표시하면  $I = (1, 1)$  이다.

구형 개재물인 경우 등방성 텐서  $T^{dil} = (P, Q)$ 로 표시하면  $P, Q$ 는 다음과 같은 관계를 가지므로

$$P = \frac{3K_m + 4\mu_m}{3K_i + 4\mu_m},$$

$$Q = \frac{5\mu_m(3K_m + 4\mu_m)}{6\mu_i(K_m + 2\mu_m) + \mu_m(9K_m + 8\mu_m)},$$

위의 관계식을 식 (34)에 사용하면 등방성 복합재의 유효 체적탄성계수와 전단계수는 다음 식으로 주어진다.

$$K = K_m + v_i \frac{(K_i - K_m)(3K_m + 4\mu_m)}{3K_i + 4\mu_m} \tag{36}$$

$$\mu = \mu_m + v_i \frac{5\mu_m(\mu_i - \mu_m)(3K_m + 4\mu_m)}{6\mu_i(K_m + 2\mu_m) + \mu_m(9K_m + 8\mu_m)}$$

개재물의 부피분율이 낮은 저농도 근사 결과는 Eshelby의 정적 경우<sup>(11)</sup>와 일치하며, Mal과 Knopoff<sup>(1)</sup>의 최저차수 근사 결과와 일치한다.

3.3 미분법 (Differential effective medium, DEM)

이 방법의 기본 개념은 전체적인 복합재를 저농도 근사의 연속으로 보는 것이다. 즉, 기지에 처음으로 더해지는 개재물들은 식 (35), (36)으로부터 유효 성질을 구하는데 사용된다. 그런 다음 이 재료는 유효성질을 갖는 균질 매질로 간주되며, 여기에 새로운 개재물의 증분이 저농도 근사하에 더해진다. 새로운 유효 성질은 식 (35), (36)을 적당히 변형시켜 얻는다. 이러한 과정을 개재물 상으로 완전히 채워질 때 까지, 즉  $v \rightarrow 1$ , 계속한다. 수학적으로 표현하면 이 과정은 더해지는 개재물의 증분이 미소하게 되는 한계까지 포함하며 미분 형태가 나온다. 이 미분 과정의 최종 결과는 다음의 지배 방정식이다.

$$(1-v) \frac{dK}{dv} = \frac{(K_i - K)(3K + 4\mu)}{3K_i + 4\mu},$$

$$(1-v) \frac{d\mu}{dv} = \frac{5\mu(\mu_i - \mu)(3K + 4\mu)}{\mu(9K + 8\mu) + 6\mu_i(K + 2\mu)}. \tag{37}$$

식 (37)은 비선형 연립 미분 방정식으로서 다음의 경계조건을 만족해야 한다.

$v=0$  에서  $K = K_m, \mu = \mu_m$

$v=1$  에서  $K = K_i, \mu = \mu_i$

3.4 자기일치적 방법(Self-consistent method, SCM)

이 방법은 상관포텐셜 근사 (coherent potential approximation, CPA), 또는 유효매질법 (effective medium theory)으로 알려져 있으며, 다중산란 효과를 고려하기 위하여 Fig. 2와 같이 단일 개재물을 미지의 유효매질 내에 두는 것이다. 따라서 저농도 근사의 경우와 비교할 때 삽입매질 (embedding medium)을 원래 기지에서 미지의 유효매질로 바꾸면 되므로, 복합재의 유효탄성계수는 다음 식으로 주어지며,

$$C = C_m + v_i (C_i - C_m) T^{scm} \tag{38}$$

여기서

$$T^{scm} = [I + S C^{-1} (C_i - C)]^{-1}. \tag{39}$$

등방성 탄성계수는 다음 식으로 주어진다.

$$K = K_m + v_i \frac{(K_i - K_m)(3K + 4\mu)}{3K_i + 4\mu}, \tag{40}$$

$$\mu = \mu_m + v_i \frac{5\mu(\mu_i - \mu)(3K + 4\mu)}{6\mu_i(K + 2\mu) + \mu(9K + 8\mu)} \tag{41}$$

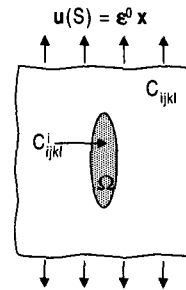


Fig. 2 Self-consistent embedding.

자기일치적 방법으로 구한 위의 결과는 모든 개재물로부터의 단일 산란의 평균을 0이 되게 하는 상관포텐셜 근사 결과<sup>(3,12)</sup>와 동일하다. Hill<sup>(10)</sup>과 Budiansky<sup>(13)</sup>는 정적인 방법으로 자기일치적 방법으로 유효 탄성계수를 구하였다.

3.5 Devaney의 방법

4절의 SCM 방법은 구성 상의 첨자를 교환하므로써 유효 탄성계수에 대하여 완전히 대칭적인 식을 제공한다. 그러나 이러한 결과는 기지와 이산적인 개재물을 동등한 입장에서 취급하므로 비현실적이다. Devaney와 Levine<sup>(4)</sup>은 기지와 개재물을 구별하므로써 2상 구조에서 대칭이 아닌 결과를 가져다 준다. 미지의 유효매질을 삽입기지로 사용하는 것은 3.2절의 SCM과 같으나, 여기에 삽입되는 단일 개재물의 탄성계수를 각각  $K_i \rightarrow K_i - K_0 + K$ ,  $\mu_i \rightarrow \mu_i - \mu_0 + \mu$ 로 대체시킨다. 이와 같은 삽입의 결과로 유효 탄성계수는 다음 식으로 주어진다.

$$\mathbf{T} = [\mathbf{I} + \mathbf{S}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m)]^{-1}$$

$$K = K_m + v_i \frac{(K_i - K_m)(3K + 4\mu)}{3(K_i - K_m) + (3K + 4\mu)}, \quad (42)$$

$$\mu = \mu_m + v_i \frac{5\mu(\mu_i - \mu_m)(3K + 4\mu)}{6(\mu_i - \mu_m)(K + 2\mu) + 5\mu(3K + 4\mu)}. \quad (43)$$

3.6 Mori-Tanaka (MT) 방법

Mori-Tanaka 방법<sup>(14)</sup>에서는 개재물의 상호작용 효과는 "평균장 근사" (mean field approximation)에 의해 고려된다. 즉, 원래의 기지재는 많은 양의 비균질물로 인하여 경계에서 가해진 응력  $\sigma^0$  또는 변형률  $\epsilon^0$ 에 추가적인 교란  $\tilde{\sigma}$  또는  $\tilde{\epsilon}$ 을 받는다고 가정하고, Fig. 3와 같이 각 단일 비균질물은 경계에서  $\epsilon_i = \epsilon^0 + \tilde{\epsilon}$ 의 균일한 변형률이 작용하는 기지내에 놓여 있다고 가정한다.

먼저 Fig. 3(b)의 경우에 등가개재물 원리를

적용하면

$$\epsilon_i = \mathbf{T}^{dil} \epsilon_1 \quad (44)$$

Fig. 3(a)의 경우 등가개재물 원리는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{C}_i (\epsilon_1 + \epsilon^p) = \mathbf{C}_m (\epsilon_1 + \epsilon^p - \epsilon^*) \quad (45)$$

$$\epsilon^p = \mathbf{S}\epsilon^*$$

식 (45)로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\epsilon^* = -\mathbf{C}_m^{-1}(\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m)\mathbf{T}^{dil} \epsilon_1 \quad (46)$$

이제 기지의 평균 변형률을 경계에서의 균일한 변형률의 향으로 구하면 원하는 변형률 집중계수를 얻을 수 있다. 복합재 전체의 체적 평균 변형률과 국부적 평균 변형률과의 관계 ( $\bar{\epsilon} = \epsilon^0 = v_i \epsilon_i + v_l \epsilon_l$ )로부터

$$\tilde{\epsilon} = -v_i \mathbf{S}\epsilon^* \quad (47)$$

를 얻을 수 있다.  $\epsilon_1 - \tilde{\epsilon} = \epsilon^0$ 이므로 식 (47), (46)을 대입한 후,  $\epsilon_1$ 을  $\epsilon^0$ 의 향으로 구하면

$$\epsilon_1 = [v_m \mathbf{I} + v_i \mathbf{T}^{dil}]^{-1} \epsilon^0 \quad (48)$$

이고, 식 (48)을 식 (44)에 적용하면 원하는 변형률 집중계수는 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{dil} [v_m \mathbf{I} + v_i \mathbf{T}^{dil}]^{-1} \quad (49)$$

따라서 Mori-Tanaka 근사에 의한 유효 탄성계수는 다음 식으로 주어지며,

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_m + v_f (\mathbf{C}_f - \mathbf{C}_m) \mathbf{T}^{dil} [v_m \mathbf{I} + v_f \mathbf{T}^{dil}]^{-1} \quad (50)$$



$$K = K_m + v_i \frac{(K_i - K_m)(3K_m + 4\mu_m)}{(3K_m + 4\mu_m) + 3(1 - v_i)(K_i - K_m)} \tag{51}$$

$$\mu = \mu_m + v_i \frac{5\mu_m(\mu_i - \mu_m)(3K_m + 4\mu_m)}{5\mu_m(3K_m + 4\mu_m) + 6(1 - v_i)(\mu_i - \mu_m)(K_m + 2\mu_m)} \tag{52}$$

Weng<sup>(15)</sup>, Norris<sup>(16)</sup>, Benveniste<sup>(17)</sup> 는 Mori-Tanaka 근사에 의해 구한 위의 탄성계수와 Hashin-Shtrikman (H-S) 한계<sup>(18)</sup>와의 관계를 규명하였다. 즉,  $C_i > C_m$  ( $C_i < C_m$ ) 이면 H-S 하한계 (상한계)와 일치한다. 또한 식 (51), (52)는 Ledbetter 와 Datta<sup>(19)</sup> 의 다중 산란 결과, Mal 과 Bose<sup>(20)</sup>, Datta<sup>(21)</sup>, Varadan 등<sup>(22)</sup> 의 저주파 한계, Kuster 와 Toksöz<sup>(2)</sup> 의 결과와 일치한다

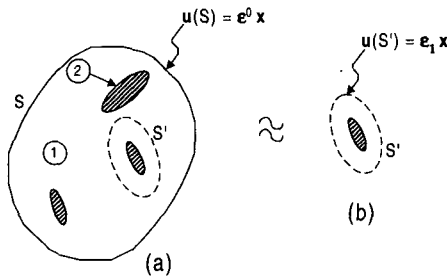


Fig. 3 A schematic representation of the Mori-Tanaka model.

#### 4. 실험 결과와의 비교

텅스텐 입자를 에폭시 수지와 섞은 다음 고온에서 가압에서 복합재 시편을 제작하였다<sup>(9)</sup>. 초음파 실험에 사용한 시편의 크기는 두께 5mm, 지름 40 mm 이고 텅스텐의 부피분율은 0.02 에서 0.6 까지 다양한 범위의 텅스텐 부피분율을 포함하고 있다. 이들 시편에서 관찰한 텅스텐 입자의 평균 지름은 0.5, 1, 5, 10, 14 μm 이었다.

종파속도는 수침 투과법으로 측정하였다. 중심주파수 1, 3.5, 10 MHz 를 시편의 양측에 설치하고 시편이 있는 경우와 없는 경우의 주행시간 차이로부터 측정하였다. 신호발생기를 사용하여 주파수 1 MHz 10MHz 까지 0.5 MHz 간격으로 10 사이클의 toneburst 신호를 발생시켜 속도의 주파수 의존성을 관찰하였다.

횡파속도는 중심주파수 2.25 MHz 의 접촉식 탐촉자를 사용하여 투과법으로 측정하였으며 접촉매질로는 벌꿀을 사용하였다.

이론 모델의 예측값 계산에 사용한 기본적인 물성은 Table 1 에 나와 있다. 에폭시 수지의 성질은 직접 측정한 것이고 텅스텐 데이터는 참고문헌 [23]에서 취하였다.

Table 1 Elastic parameters of epoxy resin and tungsten<sup>(9)</sup>

Constituent	Epoxy resin	Tungsten
Density (g/cm <sup>3</sup> )	1.26	19.3
Bulk modulus (GPa)	5.26	305.45
Shear modulus (GPa)	1.64	162.31
Longitudinal velocity (m/s)	2430	5200
Shear velocity (m/s)	1140	2900

이론 모델에 의한 예측 속도값과 실험값을 Fig. 4, 5 에 비교하였다. 모든 실험값은 Hashin-Shtrikman 한계내에 위치하고 있다. 전술한 바와 같이 Mori-Tanaka 모델은 Hashin-Shtrikman 의 하한계와 같은 값을 가진다. 실험 값의 곡선은 약  $v_2 = 0.3$ 에서 최소값을 보이며, 종, 횡파 모두 입자의 크기에는 영향을 받지 않는 것 처럼 보인다.  $v_2 < 0.1$  이하의 낮은 부피분율에서 시험값은 H-S 하한계에 가까우나 그 이상의

부피분율에서는 예측값은 실험값에서 벗어나고 있다. 또한 모든 속도는 주파수에 무관함을 관찰하였다.

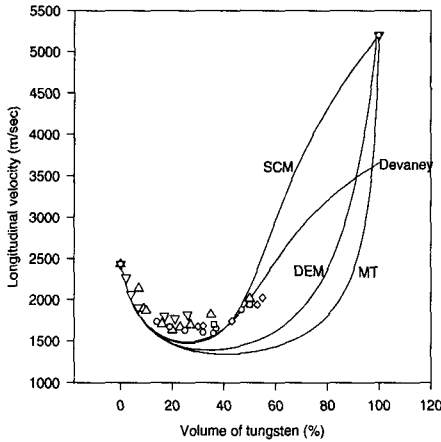


Fig. 4 Longitudinal wave velocity: SCM, DEM, MT, and Devaney models for epoxy-tungsten composite system with experimental values. (average particle sizes:  $\nabla$  0.5  $\mu\text{m}$ ,  $\Delta$  1  $\mu\text{m}$ ,  $\circ$  5  $\mu\text{m}$ ,  $\diamond$  10  $\mu\text{m}$ , 14  $\mu\text{m}$ )

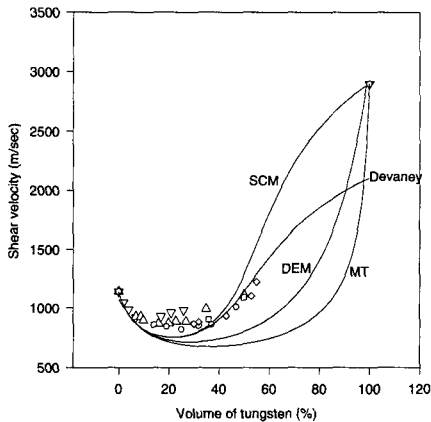


Fig. 5 Shear wave velocity: SCM, DEM, MT and Devaney models for epoxy-tungsten composite system with experimental values. (average particle sizes:  $\nabla$  0.5  $\mu\text{m}$ ,  $\Delta$  1  $\mu\text{m}$ ,  $\circ$  5  $\mu\text{m}$ ,  $\diamond$  10  $\mu\text{m}$ , 14  $\mu\text{m}$ )

DEM 모델은 MT 모델보다 실험 결과에 약간 더 가깝다. SCM은 부피분율 0.4 까지 실험결과와 잘 일치하고 있다. 여러 가지 모델 가운데서 Devaney 모델이 전 부피분율에 걸쳐서 가장 좋은 일치를 보이고 있다. 그러나 부피분율이 1 일때 Devaney 모델의 속도 값은 텅스텐과 같지 않다. 그 이유는 이 모델이 기지와 개재물을 동일한 기초위에 두고 있지 않으며,  $\nu_2=1$ 의 경우는 모델에 의해 고려되지 않기 때문이다.

### 5. 결론

구형 개재물을 포함하는 재료의 유효성질을 탄성파의 산란문제에 대한 적분 방정식을 사용하여 구하였다. 장파장 근사하에서 종파 및 횡파 속도는 랜덤 매질이 체적 평균에 의한 밀도와 정적 문제의 탄성계수를 갖는 균질한 탄성 매질로 대체된 것과 같은 거동을 하는 것으로 나타났다. Eshelby의 등가개재물 원리를 이용하여 변형을 집중계수에 대해 정적 해가 알려진 여러 가지 경우로 확장시켜 통일된 방법으로 미분유효매질, 자기일치적 방법, Devaney의 방법, Mori-Tanaka 방법에 의한 유효 탄성계수에 대한 식을 제시하였다. 에폭시 기지에 여러 가지 크기와 부피분율의 텅스텐을 포함하는 복합재료에 대한 실험결과를 산란근사 이론의 여러 예측값과 비교하였으며, 여러 가지 모델 가운데서 Devaney 모델이 전 부피분율에 걸쳐서 가장 좋은 일치를 보였다. 앞으로 계속하여 구형이외의 다른 모양의 개재물을 포함하는 다양한 복합재료 또는 손상재료 시스템에 대하여 정적 한계에서의 성질 뿐만 아니라 동적인 경우로 확장시켜 본 연구에서 사용된 이론적 모델의 타당성을 연구할 필요가 있다.

### 6. 참고 문헌

(1) Mal, A. K. and Knopoff, L., 1967, "Elastic Wave Velocities in Two-Component Systems," *J. Inst. Maths. Applics.*, Vol. 3, pp. 376~387.

- (2) Kuster, G. T. and Toksöz, M. N., 1974, "Velocity and Attenuation of Seismic Waves in Two-Phase Media: Part I. Theoretical Formulations," *Geophysics*, Vol. 39, pp. 587~606.
- (3) Berryman, J. G., 1992, "Single-Scattering Approximations for Coefficients in Biot's Equations of Poroelasticity," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 91, pp. 551~571.
- (4) Devaney, A. J. and Levine, H., 1980, "Effective Elastic Parameters of Random Composites," *Applied Physics Letter*, Vol. 37, pp. 377~379.
- (5) 김진연, 이정권, 1994, "입자복합재료 내부의 탄성과 분산에 관한 이론적 연구," 대한기계학회 논문집, 제 18 권 제 7 호, pp. 1697~1704.
- (6) 정현조, 1995, "방향분포를 가진 다상 금속복합재료의 탄성 및 진도해석에 관한 연구," 대한기계학회 논문집, 제 19 권 제 9 호, pp. 2181~2193.
- (7) 정현조, 1998, "주기적 미시구조 분포를 갖는 복합재료의 유효 성질," 대한기계학회 논문집 A 권, 제 22 권 제 5 호, pp. 902~908.
- (8) Eshelby, J. D., 1957, "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal inclusion and Related Problems," *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. A241, pp. 376~396.
- (9) Nguyen, T. N., Lethiecq, M., Levassort, F. and Pourcelot, L., 1996, "Experimental Verification of the Theory of Elastic Properties Using Scattering Approximations in (0-3) Connectivity Composite Materials," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol. 43, pp. 640~645.
- (10) Hill, R., 1965, "A Self Consistent Mechanics of Composite Materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 13, pp. 213~222.
- (11) Eshelby, J. D., 1961, *Progress in Solid Mechanics*, 2, North Holland Publishing Co., Chapter 3.
- (12) Berryman, J. G., 1979, "Theory of Elastic Properties of Composite Materials," *Applied Physics Letter*, Vol. 35, pp. 856~858.
- (13) Budiansky, B., 1965, "On the Elastic Moduli of Some Heterogeneous Materials," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp. 223~227.
- (14) Mori, T. and Tanaka, K., 1973, "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions," *Acta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 571~574.
- (15) Weng, G. J., 1984, "Some Elastic Properties of Reinforced Solids, with Special Reference to Isotropic Ones Containing Spherical Inclusions," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 22, pp. 845~856.
- (16) Norris, A. N., 1989, "An Examination of the Mori-Tanaka Effective Medium Approximation for Multiphase Composites," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 83~88.
- (17) Benveniste, Y., 1987, "A New Approach to the Application of Mori-Tanaka's Theory in Composite Materials," *Mechanics of Materials*, Vol. 6, pp. 147~157.
- (18) Hashin, Z. and Shtrikman, S., 1963, "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behavior of Multiphase Materials," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 2, pp. 127~140.
- (19) Ledbetter, H. M. and Datta, S. K., 1986, "Effective Wave Speeds in an SiC-Particle-Reinforced Al Composite," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 79, pp. 239~248.
- (20) Mal, A. K. and Bose, S. K., 1974, "Dynamic Elastic Moduli of a Suspension of Imperfectly Bonded Spheres," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 76, pp. 587~600.
- (21) Datta, S. K., 1978, "Scattering by a Random Distribution of Inclusions and Effective Elastic Properties, Continuum Model of Discrete Systems," *Continuum Model of Discrete Systems*, ed. by J. W. Provan, University of Waterloo Press, Waterloo, pp. 111~127.
- (22) Varadan, V. K., Ma, Y. and Varadan, V. V., 1985, "A Multiple Scattering Theory for Elastic Wave Propagation in Discrete Random Media," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 77, pp. 375~385.
- (23) Selfridge, A. R., 1985, "Approximate Material Properties in Isotropic Materials," *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, Vol. SU-32, pp. 381~394.