財務管理硏究 第十六券 第二號(1999. 12), 285~308

情報의 發生과 株價의 變動性

李 逸 均*

Λίθον ὄν ἀπεδοκίμασαν οἱ οἰκοδομοῦντες, οὗτος ἐγενήθη εἰς κεφαλὴν γωνίας·[1]

De singulières ombres pendent aux vitres usées.[2]

〈요 약〉

증권의 가격형성에 유리한 뉴스와 불리한 뉴스가 도착할 때 이 뉴스가 주가의 변동성에 미치는 영향의 정도는 차이가 있다. 불리한 뉴스가 변동성에 미치는 영향도가 유리한 뉴스가 변동성에 미치는 영향도보다 크다. 따라서 불리한 뉴스가 발생할 때 형성되는 변동성의 양이 유리한 뉴스의 도착시보다 크다. 그리고 충격의 크기에 따라 이 충격이 야기하는 변동성의 양의 크기에도 차이가 존재한다. 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정은 유리한 뉴스와 불리한 뉴스를 대칭적으로 반영하고 있다. 이 뉴스들을 비대칭적으로 포착하는 자기회귀 조건부 이분산 과정의 모형들을 실증적으로 분석하였다.

뉴스의 비대칭성과 규모를 적절히 포착하고 있는 모형들이 비선형 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정, 지수 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정과 정보 포착 자기회귀 조건부 이분산 과정임이 발견되었다. 이 중 비선형 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정이 가장 좋은 모형으로 보인다. 비선형 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정의 경우 예측오차의 승멱(power)이 약 1.5이다. 따라서 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정의 예측오차의 승멱인 2에 비하여 작다. 이 사실은 일반 자기회귀 조건부 이분산의 예측오차의 승멱이 과도하게 측정되고 있음을 알 수 있다. 뉴스의 비대칭성과 규모를 반영하고 있는 모형들은 한결같이 예측오차의 크기에 적절한 가중치를 부여하여 예측오차의 크기를 조정하고 있다. 이 모형의 성질과 실증분석의 결과에 의하여 예측오차의 승멱은 2 이하로 수정하여 사용해야 한다는 점이 시사되고 있다. 음의 충격이 양의 충격보다 주가의 변동성을 크게 하고 있음이 발견되었다.

주가형성에 유리한 뉴스와 불리한 뉴스가 주가의 변동성에 미치는 영향의 차이와 충격의 중대성을 양으로 표시하는 규모의 차이를 반영해주는 변수들의 추정된 계수가 미국과 일본보다 절대값에 있어서 상당히 작다. 이 현상은 뉴스의 비대칭성과 규모보다는 발생하는 충격, 즉 뉴스 자체에 보다 민감하게 반응하고 있음을 보여주고 있다. 물론 투자자들이 뉴스의 비대칭성과 규모를 완전히 무시하고 투자활동을 전개하고 있다는 것을 의미하는 것은 아니다.

---

* 明知大學校 經營學部 敎授

1) 건축자들이 버린 돌이 모퉁이의 머릿돌이 되었다. (마테오복음 21:42)

2) 특이한 그늘이 낡은 창 유리에 비스듬히 걸쳐있다. (Mallarmé. 겨울의 추위)

I. 서 론

증권의 가격은 이 증권이 존속하는 동안 생성시키는 모든 기대현금흐름의 할인된 현가의 합계이다. 할인함수가 증권의 가격을 형성시키는 주요 변수 중의 하나이므로 이 함수의 인식에 대한 연구가 진행되어 오고 있다. 그러나 증권이 제공하는 미래 현금흐름의 예상값을 제공하는 기대함수(expectation function)에 대한 발견에 큰 노력이 경주되어 온 사실을 부인할 수 없다. 한편에서는 증권의 가격을 결정하는 모형의 정립이라는 차원에서 기대함수를 정립하였고, 이 모형들을 통하여 기대함수의 성질을 고도로 파악할 수 있었다. 그러나 이 기대함수가 증권의 가격형성과정을 인식하는데 완벽한 역할을 담당하고 있지는 못한 실정이다.

다른 한편에서는 정립된 모형의 운동이 실제의 증권가격의 운동과 일치하고 있는가를 분석하는 것을 포함하여 증권의 시계열이 움직이는 행태를 시계열 자체로부터 파악하고 그 현상을 모형화하는 일련의 작업이 수행되어 오고 있다. 이 접근법에 있어서는 기대함수가 제1차 적률과정, 아니면 조건부 제1차 적률과정에 의하여 파악될 수 있다는 믿음에서 제1차 적률과정에 대한 탐구가 심도있게 이루어지고 그 결과 증권의 가격생성에 대한 많은 성질들이 밝혀졌다. 그러나 증권가격 시계열 자체의 분석으로부터 얻은 모형이 예측해 주는 운동과 증권가격 시계열의 실제운동과는 괴리가 있음도 발견되었다. 이 괴리는 기대함수를 (조건부) 제1차 적률만을 고려하여 정립한데서 발생하는 현상일 가능성이 있다는 의구심에서 제2차 적률이나 조건부 제2차 적률까지도 기대함수에 포함시키는 것이 바람직할 것이라는 전제하에 연구가 진행되어 오고 있다.

이와 같은 접근법 중의 하나가 변동성 모형이다. Engle(1982)은 조건부 제2차 적률이 조건부 이분산의 형태를 취한다는 전제하에 증권가격의 시계열의 값과 조건부 제1차 적률과의 차이의 자승, 즉 예측오차의 자승간의 선형결합에 의하여 조건부 이분산이 형성된다는 것을 모형화한 자기회귀 이분산 과정을 정립하였다. Bollerslev(1986)는 조건부 이분산은 예측오차의 자승들만이 아니라 과거의 조건부 이분산에 의하여서도 영향을 받을 수 있다는 점을 인지하고 이것을 이분산 과정에 도입하여 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정을 정립하였다. 이 과정은 차수가 무한인 자기회기 조건부 이분산 과정이다.[3)]

---

3) 시점 t의 조건부 이분산을 h_t라 하면 시계열 $\{\varepsilon_t\}$에 대하여 ARCH 과정은 $h_t = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2$이다. 그런데 GARCH 과정은 L을 시차작용소라 할 때 $h_t = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)h_t$이다. 우변의 ht항을 좌변으로 이동하고 정리하면 다음의 식을 얻는다.

주가는 어느 시점에 변동이 크면 다음 시점에도 변동이 크게 나타나며 어느 시기에 변동이 작으면 다음 시기에도 변동이 작아진다는 성향이 발견되었다. 말하자면 큰 변동이 군집을 이루고 작은 변동이 군집을 이루어 발생하는 현상을 주가시계열은 내포하고 있다. 절대값이 큰 변동들이 형성하는 군집과 절대값이 작은 변동들이 만드는 군집은 조건부 제1차 적률이 동일하여도 조건부 분산은 동일하지 않고 다를 것이다. 따라서 조건부 이분산이 성립한다. 자기회귀 조건부 이분산 과정과 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정은 큰 변동과 작은 변동의 군집을 포착하는 모형이다. 자기회귀 조건부 이분산 과정과 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정은 증권시계열의 이같은 현상을 적절하게 기술하고 설명하는 훌륭한 모형이라 할 수 있다.

경제 또는 증권 가격에 충격이 가해지면 가격은 변한다. 충격은 가격에 유리하게 작용하는 경우도 있고 가격에 불리하게 작용하는 경우도 있다. 가격에 유리한 충격은 유리한 뉴스가 되고 불리한 충격은 불리한 뉴스가 된다. 가격에 유리한 뉴스보다 불리한 뉴스가 변동성에 큰 영향을 미치고 있음이 증권가격의 시계열 분석을 통하여 밝혀졌다. 이것은 투자자가 위험기피형이기 때문에 나타나는 현상이다. 불리한 뉴스로 인하여 발생하는 변동성의 양이 유리한 뉴스에 의하여 생성되는 변동성의 양보다 크다는 현상을 일반 자기회귀 이분산 과정은 포착하고 있지 못하고 있다. 뉴스 집합은 유리한 뉴스와 불리한 뉴스의 부분집합의 합집합으로 형성된다. 유리한 뉴스와 불리한 뉴스가 변동성에 미치는 영향의 정도가 상이하므로 뉴스 집합에는 이 양자간에 비대칭성이 형성된다. 뿐만 아니라 뉴스의 양이 크면 변동성의 양도 크고, 뉴스의 양이 적으면 변동성의 양도 적을 것이다. 이와 같은 뉴스의 비대칭성과 뉴스의 양의 규모의 효과를 정확하게 파악해 주는 모형의 정립이 요청되고 있다.

Nelson(1990)은 뉴스의 비대칭성과 규모를 표상하는 변수를 자기회귀 조건부 이분산 과정을 형성하는 변수들 중 하나로 도입하여 지수 자기회귀 조건부 이분산 과정을 정립하였다. 그는 조건부 이분산이 음수가 되는 것을 방지하기 위하여 대수의 이분산 함수를 조건부 이분산으로 정립하고 예측오차와 조건부 표준편차 간의 비율을 뉴스의 비대칭성과 규모를 표상하는 변수로 도출해 내었다. 그리고 이 변수를 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정에 도입하였다. Fornari와 Mele(1997)은 예측오차의 부호에 따라 조건부 이분산의 크기가 변동하는 부호 변경 자기회귀 조건부 이분산 과정과 과거의 예측

$$h_t = \frac{\omega}{1-\beta(L)} + \frac{\alpha(L)}{1-\beta(L)}\varepsilon_t^2$$
$$= \omega^* + \alpha_1^*\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2^*\varepsilon_{t-q}^2 + \cdots$$

따라서 위 식은 차수가 무한인 ARCH 과정이다.

오차와 조건부 이분산의 함수에 의하여 조건부 이분산이 비대칭성 아래에서 변동할 수 있는 변동성 변경 자기회귀 조건부 이분산 과정을 개발하였다.

이 논문의 목적은 뉴스의 비대칭성과 규모를 포착하는 변수가 도입된 변동성 모형들에 대한 실증적 분석을 수행하여 이 모형들이 뉴스의 비대칭성과 뉴스 규모를 적절히 반영하고 있는지의 여부를 검정하는데 있다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 실증분석에 합당한 모형들의 성질을 파악하고 검정통계량을 제시하고자 한다. 제3장에서는 실증분석을 수행하고 모형들의 현실 설명력과 적합성을 살펴본다. 제4장에서는 결론을 제시한다.

II. 주가의 변동성

1. 유리한 정보와 불리한 정보의 조건부 이분산에 대한 비평형적 영향도

고전적인 자기회귀모형, 이동평균모형, 그리고 자기회귀 이동평균모형은 시계열의 조건부 평균의 운동을 포착하는데 큰 기여를 하였다. 그러나 조건부 제2차 적률을 비롯한 고차 적률은 이 모형들에서는 무시되었다. 증권가격 시계열은 이 시계열을 생성시키는 함수에서 조건부 평균도 중요하지만 조건부 이분산도 중요시되고 있다. 조건부 이분산이 시계열 모형에 직접 도입된 것이 Engle(1982)의 자기회귀 조건부 이분산(autoregressive conditional heteroscedastic; ARCH)과정이다. ARCH 과정은 시계열의 평균으로부터 일탈되는 시계열의 오차의 제곱들의 선형결합에 의하여 조건부 이분산이 생성되고 있음을 정립한 과정이다. 그러나 조건부 이분산은 평균으로부터 오차에 의하여 형성될 수 있을 뿐만 아니라 과거의 조건부 이분산이 영향을 미칠 수도 있다. 이 오차의 제곱들과 과거의 조건부 이분산들을 선형적으로 결합시킨 모형이 일반 자기회귀 조건부 이분산(generalized ARCH; GARCH) 과정이다. GARCH 과정은 과거에로의 시간이 무한인, 즉 무한 차원의 ARCH 과정으로 표시할 수 있다. 따라서 ARCH 과정과 GARCH 과정의 성질은 동일하다.

주가는 변동성이 강하다. 분산한계분석에서는 정보에 대한 과민반응에 의하여 강한 변동성이 형성되고 있음을 밝혀주고 있다. 주가가 어느 한 시점에서 크게 변동하면 그 다음 시점에서도 주가가 크게 변동하는 성향이 존재하며, 어느 한 시기에 주가의 변동폭이 작으면 차기에도 주가의 변동폭은 그 절대값에 있어서 작게되는 성향이 발견되고 있다. 이 성향은 조건부 이분산으로 포착할 수 있다. 따라서 GARCH 과정은 이 성향을

성질로써 가지고 있다.

예측오차 또는 평균으로부터의 일탈은 양수이기도 하고 음수이기도 하다. 예측오차의 부호가 조건부 분산에 영향을 미치리라고 판단되는데, GARCH 과정은 예측오차의 부호가 조건부 분산에 미치는 영향을 포착하지 못하고 있다.[4] Black(1976)은 주가의 변동성(volatility)이 투자자가 불리한 정보(bad news)에 반응할 때에는 증가하는 성향이 있으며, 유리한 정보에 대한 반응에 있어서는 감소하는 성향이 있음을 밝힌 바 있다.

어느 주식의 음의 초과수익은 이 기업의 레버리지(leverage) 비율을 증가시키며 이로 인하여 위험성이 증가하게 된다. 따라서 이 주식의 미래의 변동성이 증가한다. 양의 초과수익은 레버리지 비율을 감소시킨다. 그러므로 위험이 감소하고 미래의 변동성을 감소시킨다. 예상치 못한 주가하락(불리한 뉴스)은 비슷한 크기의 예상치 못한 주가상승보다 예측할 수 있는 변동성을 증가시킨다는 것이다. 유리한 뉴스와 불리한 뉴스는 주가의 미래 변동성에 대하여 다른 예측을 제공한다. 유리한 뉴스와 불리한 정보가 미래의 변동성에 각각 상이한 영향을 미치고 있다. 비대칭적 변동성 또는 레버리지 변동성이 발생하는 것이다.

뉴스의 비대칭적 영향은 GARCH 과정이 포착하지 못하고 있다. 그러나 이 과정에 비대칭적 영향변수가 부가될 수 있으면 주가변동의 조건부 이분산을 보다 정확하게 예측할 수 있다. 주식의 수익률 시계열을 $\{y_t\}$라 하고 시점 t-1로부터 시점 t까지의 정보집합을 Ω_{t-1}이라 하자. 시점 t에서 이용 가능한 정보를 조건부로 하는 기대값과 분산을 각각 $m_t = E[y_t|\Omega_{t-1}]$과 $h_t = var(y_t|\Omega_{t-1})$이라 하자. 그러면 시점 t에 있어서의 예상하지 않은 수익률은 $\varepsilon_t = y_t - m_t$ 이다. 이 ε_t가 시점 t에 있어서 뉴스의 집합적 측도(collective measure)이다. ε_t가 양수이면 유리한 뉴스의 도착을 의미하며 ε_t가 음수이면 불리한 뉴스의 도착을 의미한다. $|\varepsilon_t|$의 값이 크면 주가의 변화량이 크다는 것을 의미하므로 뉴스가 중요성을 갖는다는 것을 뜻한다.

2. 자기회귀 조건부 이분산(ARCH) 과정

시계열 $\{y_t\}$의 조건부 표준편차가 y_t의 과거의 값들의 함수, 즉 $\sigma_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots)$ 라 하자. $\sigma_t = f(x_{t-1}) = (\omega + \alpha(x_{t-1} - \mu)^2)^{1/2}$이 이 시계열의 조건부 표준편차를

4) GARCH(1, 1) 과정은 $h_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$이다. ε_{t-1}가 자승으로 모형에 도입되어 있으므로 ε_{t-1}의 음수값이나 양수값이 조건부 이분산 h_t에 미치는 영향은 동일하고 영향의 양도 동일하다. 이 모형에서는 유리한 뉴스와 불리한 뉴스를 대칭적으로 반영하고 있다.

표상하는 하나의 형태일 수 있다. 여기에서 ω과 α는 계수이고 μ는 이 시계열의 평균 과정이다. $U_t \sim N(0,\ 1)$이고 U_t가 σ_t와 독립적이면 $y_t = \mu + U_t\sigma_t$는 백색잡음 과정이고 조건부 정규분포를 따른다. 따라서 $(y_t | y_{t-1},\ y_{t-2},\ \cdots) \sim N(\mu,\ \sigma_t^2)$이다. 이때 조건부 분산은 이분산으로 다음과 같다.

$$V(y_t \mid y_{t-1}) = h_t = \omega + \alpha(y_{t-1} - \mu)^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$$

위 식에서 $\varepsilon_{t-1} = y_t - \mu$이다. $\alpha < 1$이면 무조건부 분산은 $V(y_t) = \omega/(1-\alpha)$이고 y_t는 弱定常過程이다. $3\alpha^2 < 1$이면 y_t의 제4차 적률은 유한하다. 이때 첨도는 $3(1-\alpha^2)/(1-3\alpha^2)$이다. 이 값은 3을 초과한다. 그러므로 y_t의 무조건부 분산은 꼬리부분이 정규분포보다 두껍다. 이 모형이 Engle(1982)의 제1계 자기회귀 조건부 이분산(first-order autoregressive conditional heteroscedastic; ARCH) 과정이다.

시계열 $\{y_t\}$의 조건부 표준편차가 $f(x_{t-1},\ x_{t-2},\ \cdots,\ x_{t-q}) = (\omega + \alpha_1(x_{t-1} - \mu)^2 + \cdots + \alpha_q(x_{t-q} - \mu)^2)^{1/2}$이라 하면 조건부 분산함수는 다음의 형태를 가진다.

$$h_t = \omega + \sum_{i=0}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

위 식이 ARCH(q) 과정이다. 모든 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ q$에 대하여 ε_{t-i}가 변하므로 조건부 분산 h_t는 조건부 이분산임을 위의 식을 통하여 알 수 있다. 위에서 언급한 바와 같이 $y_t = \mu + U_t\sigma_t$이며 $\sigma_t = \sqrt{h_t}$이므로 시계열 $\{y_t\}$의 실현된 값은 조건부 이분산에 의하여 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

3. 일반 자기회귀 조건부 이분산(GARCH) 과정

ARCH(q) 과정에서 조건부 분산이 양수가 되기 위해서는 일반적으로 모든 i에 대하여 $\alpha_i > 0$이어야 한다. 그런데 q가 매우 크면 모수를 추정할 때 조건부 분산의 양수 조건이 충족되지 못하는 경우가 발생할 수 있다. 조건부 이분산이 $(y_{t-i} - \mu)^2$ $(i = 1,\ \cdots,\ q)$의 함수라는 것에 한정하지 않고 추가적으로 과거의 이분산들도 이 함수에 도입되어 이분산이 이 양자의 선형결합에 의하여 형성되는 경우도 상정할 수 있을 것이다. 이분산이 이와 같이 형성되면 추정이 용이해진다. 이와 같은 관점에서 Bollerslev

(1986)는 Engle(1982)의 ARCH 과정을 일반화시킨 일반 자기회귀 조건부 이분산 (generalized ARCH; GARCH) 과정을 다음과 같이 정립한 바 있다.

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \sum_{i=1}^{q} \beta_i h_{t-i}. \tag{1}$$

위에서 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$, $\beta_1, \cdots, \beta_q$와 ω는 모수이다. 여기에서 $i = 1, \cdots, q$에 대하여 $\beta_i > 0$이다. 이 모형이 GARCH (p, q)과정이다. GARCH $(1, 1)$ 과정에서는 증권수익에 가해진 충격의 현재의 변동성에 대한 영향은 시간의 흐름에 걸쳐 기하적으로, 즉 지수적으로 감소하여 소멸한다.

GARCH 과정에서 ε_t의 값이 음수이거나 양수이거나 간에 오차항 ε_t는 이 값의 자승으로 조건부 이분산 h_t에 영향을 미친다. 그러므로 이 값이 조건부 이분산에 미치는 영향은 동일하다. 오차항 ε_t가 양수로 표현되는 유리한 뉴스와 음수로 표현되는 불리한 뉴스가 조건부 분산에 미치는 영향은 양자 간에 대칭성을 형성하고 있다. ε_t의 값이 절대값에 있어서 동일하면 이 오차항이 자승으로 조건부 분산에 영향을 미치므로 조건부 분산에 미치는 영향의 量도 동일하다. 따라서 유리한 뉴스와 불리한 뉴스가 조건부 이분산에 미치는 영향도는 동일하다. 그러나 불리한 뉴스가 주가에 미치는 영향의 量이 유리한 뉴스가 주가에 미치는 영향의 양보다 크다는 실증분석의 결과를 GARCH 과정은 기술하지 못하고 있다.

4. 지수 일반 자기회귀 조건부 이분산(EGARCH) 과정

Nelson(1990)은 GARCH 과정에 뉴스의 비대칭적 효과를 포착할 수 있도록 지수 일반 자기회귀 조건부 이분산(exponential GARCH; EGARCH) 과정을 다음과 같이 정립하였다.

$$\log(h_t) = \omega + \beta \log(h_{t-1}) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \alpha \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \tag{2}$$

위에서 ω, β, γ와 α는 모수이다. 식 (2)에서 $\varepsilon_{t-1}/\sqrt{h_{t-1}}$ 항이 포함되어 있어 EGARCH 과정은 뉴스의 성질에 대하여 비대칭적이다. 이 변수의 계수 γ가 음수이면 양의 충격이 음의 충격보다 주가의 변동성을 낮게 측정해준다. 왜냐하면 음의 충격이 발생하면 오차항 ε_t는 음수이고 양의 충격이 발생하면 ε_t는 양수이기 때문이다. 이 항에 의하여

EGARCH 과정은 뉴스의 도착을 모형화하고 있다. 마지막 항은 GARCH(1, 1)의 과정 $\alpha\varepsilon_{t-1}^2$에 대응되는 항이다. $0 < |\varepsilon_{t-1}| < 1$이면 $\varepsilon_{t-1}^2 < |\varepsilon_{t-1}|$이다. 따라서 $\sqrt{h_{t-1}}$과 $\sqrt{2/\pi}$로 이 양을 조정한 것이 마지막 항인 것이다.

EGARCH 과정은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\log(h_t) = \omega + \alpha f(\varepsilon_{t-1}/\sqrt{h_{t-1}}) + \beta\log(h_{t-1})$$

위 식에서 f(·)는 뉴스 영향곡선이다. 이 곡선이 조건부 변동성의 변동(revisions) $\log(h_t)$를 뉴스 ε_{t-1}^2과 연관시켜주고 있다. $\varepsilon_{t-1} > 0$일 때 $\partial f/\partial\varepsilon_{t-1} = \gamma + 1$이고 $\varepsilon_{t-1} < 0$이면 $\partial f/\partial\varepsilon_{t-1} = \gamma - 1$이므로 뉴스영향곡선은 뉴스에 대하여 비대칭적 반응을 제시해 주고 있다. 이 비대칭성은 변동성이 시장의 상승시 보다 하락시에 보다 민감하게 반응하는 현상을 설명하고 있어 뉴스의 발생이 주가에 미치는 반응도를 측정하는데 유용하다. 말하자면 EGARCH 과정은 레버리지 효과를 포착하는 모형인 것이다.

Engle과 Ng(1993)은 EGARCH 과정의 뉴스영향곡선을 다음과 같이 유도하였다.

$$h_t = A \cdot \exp\left[\frac{(\gamma+\alpha)}{\sigma} \cdot \varepsilon_{t-1}\right], \quad \varepsilon_{t-1} > 0$$

$$h_t = A \cdot \exp\left[\frac{(\gamma-\alpha)}{\sigma} \cdot \varepsilon_{t-1}\right], \quad \varepsilon_{t-1} < 0$$

$$A = \sigma^{2\beta} \cdot \exp[\omega - \alpha \cdot \sqrt{2/\pi}]$$

위에서 σ^2은 무조건부 분산으로 시차조건부 분산을 σ^2으로 평가한 수치이다. 위 식에서 볼 수 있는 바와 같이 유리한 뉴스와 불리한 뉴스가 조건부 분산에 미치는 영향이 다르다. GARCH(1, 1) 과정의 뉴스영향곡선은 $h_t = A \cdot \alpha\varepsilon_{t-1}^2$이다. 따라서 유리한 뉴스나 불리한 뉴스가 조건부 분산, 즉 변동성에 미치는 영향은 동일하다. EGARCH 과정은 중요한 뉴스가 변동성에 미치는 영향의 정도가 GARCH 과정보다 크다.

5. 비대칭 일반 자기회귀 조건부 이분산(AGARCH) 과정

유리한 뉴스와 불리한 뉴스가 주가에 미치는 영향의 정도가 다르며 영향이 비대칭성을 형성한다는 것을 고려하여 정립된 모형은 EGARCH 과정에 한정되어 있는 것은 아니다. Engle(1990)은 비대칭 일반 자기회귀 이분산(asymmetric GARCH; AGARCH) 과정을 다음과 같이 정립하였다.

$$h_t = \omega + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2 + \beta h_{t-1} \tag{3}$$

식 (3)에서 γ가 뉴스의 영향을 표현하는 모수이다. 이 모수 γ가 음수라 하자. ε_{t-1}가 음수이면 ε_{t-1}가 양수일 때보다 $(\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2$의 값이 크다. 따라서 불리한 뉴스가 유리한 뉴스보다 변동성에 미치는 영향이 크다는 사실을 포착하고 있는 모형인 것이다.

Engle과 Ng(1993)에 의하면 AGARCH 과정의 뉴스충격곡선은 $A = \omega + \beta\sigma^2$이라 할 때 $h_t = A + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2$ 이다. AGARCH는 비대칭적이고 $\varepsilon_{t-1} = -\gamma$일 때 중심에 이른다. $\gamma < 0$이면 이 곡선은 원점의 우측에 존재한다. 이 곡선은 $\varepsilon_{t-1} = -\gamma$인 점을 중심으로 비대칭을 형성하여 $\varepsilon_{t-1} < 0$일 때의 곡선의 양이 $\varepsilon_{t-1} > 0$일 때의 양보다 크다. 레버리지 효과가 발생하기 위하여는 ε_{t-1}의 계수가 음수이어야 한다. 불리한 뉴스는 음의 값을 생성시키기 때문에 계수가 음수이면 불리한 뉴스가 발생할 때 변동성은 증가한다.

6. 비선형 자기회귀 조건부 이분산(NARCH) 과정

Engle과 Bollerslev(1986)은 비선형 자기회귀 조건부 이분산(nonlinear ARCH; NARCH) 과정을 다음과 같이 정립하였다.

$$h_t = \omega + \alpha|\varepsilon_{t-1}|^\gamma + \beta h_{t-1} \tag{4}$$

이 과정은 뉴스가 증권의 가격형성에 미치는 뉴스의 비대칭성 보다는 뉴스의 양에 초점을 둔 모형이다.[5] 유리한 뉴스와 불리한 뉴스가 증권가격형성에 미치는 영향도가 동일한 경우 충격의 양의 크기에 따라 증권가격이 받게되는 영향에 차이가 존재하면

5) 비선형 일반 자기회귀 이분산 모형은 일반적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\sqrt{h_t})^\gamma = \omega + \alpha f^\gamma(\varepsilon_{t-1}) + \beta(\sqrt{h_{t-1}})^\gamma$$

이 과정의 대안으로 threshhold ARCH 과정은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\sqrt{h_t})^\gamma = \omega + \alpha g^{(\gamma)}(\varepsilon_{t-1}) + \beta(\sqrt{h_{t-1}})^\gamma$$

위에서 g는 다음과 같다.

$$g^{(\gamma)}(\varepsilon_{t-1}) = \phi I(\varepsilon_{t-1} > 0) \cdot |\varepsilon_{t-1}|^\gamma + \theta I(\varepsilon_{t-1} \leq 0) \cdot |\varepsilon_{t-1}|^\gamma$$

위에서 I는 indicator 함수이다. 위 두 과정은 γ를 변화시키면 ARCH 계통의 여러 종류의 과정을 얻을 수 있다. 예컨데 $\gamma = 2$이면 다음에 살펴볼 GJR 과정을 얻는다.

이 모형이 현실을 잘 기술해 줄 수 있다. GARCH 과정의 경우 γ는 2이다. 그러나 충격의 소멸율이 반드시 2일 필요는 없다. 충격이 지수율로 감소하여 소멸하면 충격은 단기기억과정을 형성하고 충격이 쌍곡선율로 감소하면 충격이 장기간에 걸쳐 서서히 감소하여 장기기억과정을 형성한다. γ의 값에 따라 충격의 소멸과정과 규모의 영향도를 판단할 수 있다.

7. 정보 포착 일반 자기회귀 조건부 이분산(GJR) 과정

Glosten, Jagannathan과 Runkle(1993)은 유리한 뉴스와 불리한 뉴스를 모형에 직접 도입하여 다음과 같은 정보 포착 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정을 정립하였다.

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma S_t \varepsilon_{t-1}^2 \tag{5}$$

위에서 $\varepsilon_t < 0$이면 $S_t = 1$이고 그 이외의 상태에서는 $S_t = 0$이다. 이 과정에서 γ가 양수이면 불리한 뉴스가 유리한 뉴스보다 조건부 이분산에 미치는 영향도가 크다. 따라서 변동성이 불리한 뉴스와 유리한 뉴스에 의하여 비대칭적 영향을 받는다. 뉴스의 양이 조건부 이분산, 즉 변동성에 미치는 영향도 앞에 제시한 과정과는 차이가 있다. 이 모형에서는 유리한 뉴스가 발생한 경우 이 뉴스가 조건부 이분산에 미치는 영향은 GARCH 과정과 동일하다. 그러나 γ가 양수이면 총 $\gamma\varepsilon_{t-1}^2$의 영향의 양이 GARCH 과정에 추가되어 GARCH 과정의 양보다 크다.

GJR 과정은 뉴스에 대하여 변동성이 자승의 반응(quadratic response)을 가진다. 유리한 뉴스와 불리한 뉴스에 대한 자승의 반응은 상이하다. 그리고 뉴스가 존재하지 않을 때 변동성은 최소화된다.

GJR 과정의 뉴스충격곡선은 $A = \omega + \beta \cdot \sigma^2$이라 할 때 $\varepsilon_{t-1} > 0$인 정보는 $h_t = A + \gamma\varepsilon_{t-1}^2$이고 $\varepsilon_{t-1} < 0$인 경우 $h_t = A + (\alpha + \gamma)\varepsilon_{t-1}^2$이다. 이 곡선은 $\varepsilon_{t-1} = 0$에서 중심에 존재하고 양의 상한과 음의 상한에서 기울기가 각각 상이하다. 따라서 뉴스의 비대칭성과 충격의 양을 변동성에 반영시킨다.

8. 일반 이차형 자기회귀 조건부 이분산(GQARCH) 과정

Sentana(1995)는 일반 이차형 자기회귀 조건부 이분산(generalized quadratic ARCH; GQARCH) 과정을 다음과 같이 정립하였다.

$$h_t = \omega + \varphi' X_{t-1,q} + X'_{t-1} B X_{t-1,q} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}$$

위에서 $X_{t-1,q}$는 $(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots, \varepsilon_{t-q})$이고 B는 q×q행렬이다.[6] 이때 GQARCH(1, 1) 과정은 φ'가 스카라(scalar)이므로 기호의 통일성을 유지하기 위하여 이 스카라를 γ라 하면 $h_t = \omega + \gamma\varepsilon_{t-1} + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$이다.

위 식의 교차항은 ε_t의 시차변수들이 조건부 분산에 미치는 영향을 추가적으로 반영하고 있는 항이다. 이 항의 계수가 0이 아니면 ε_t가 동일한 부호로 두 번 연속하여 큰 값을 가지게 되면 ARCH 과정보다 큰 영향을 조건부 분산에 미친다. φ의 값에 의하여 조건부 분산의 이차형 다항식의 중심이 0에 위치하지 않고 ε_t의 양의 시차값과 음의 시차값이 조건부 분산에 미치는 동태적 비대칭적 영향을 반영해주고 있다. $h_t = \omega + \gamma\varepsilon_{t-1} + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$을 취하면 γ가 음수일 때 ε_{t-1}이 양수인 경우보다 음수인 경우에 조건부 분산이 높다. γ가 음수이면 유리한 뉴스가 불리한 뉴스보다 변동성을 적게 증가시킨다. 따라서 레버리지 효과를 포착하고 있다. GARCH(1, 1) 과정의 뉴스 영향곡선은 앞에서 도출한 바와 같이 $h_t = A \cdot \alpha\varepsilon_{t-1}^2$인 바 GQARCH는 $h_t = A \cdot \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}$이므로 GARCH(1, 1)과정의 뉴스 영향곡선에 $\gamma\varepsilon_{t-1}$이 추가된 것이다. 따라서 γ가 음수일 때 불리한 뉴스가 도착하면 ε_{t-1}이 음수이므로 GARCH 보다 $|\gamma\varepsilon_{t-1}|$만큼 증가하고 유리한 뉴스가 발생하면 $|\gamma\varepsilon_{t-1}|$만큼 감소한다. 정보가 정보의 성질에 따라 주가의 변동성에 비대칭적으로 영향을 미친다. 중심은 $\varepsilon_{t-1} = 0$에서 이루어진다. 뿐만 아니라 이 과정에서 조건부 분산이 언제나 양수이다.

GQARCH 과정의 뉴스 충격곡선은 ε_{t-1}의 값에 의하여 직접적으로 영향을 미친다. ε_{t-1}가 양수이면 ε_{t-1}의 계수가 양수일 때 변동성은 증가하고 음수일 때 변동성은 감소한다. 레버리지 효과가 발생하기 위하여는 ε_{t-1}의 계수가 음수이어야 한다. 불리한 뉴스는 음의 값을 생성시키기 때문에 계수가 음수이면 불리한 뉴스가 발생할 때 변동성은 증가한다.

9. 부호 변경 및 변동성 변경 일반 자기회귀 조건부 이분산 (SSARCH; VSARCH) 과정

Fornari와 Mele(1997)은 부호 변경 일반 자기회귀 조건부 이분산과 변동성 변경 자

6) Sentana의 GQARCH 과정은 ARCH 계통의 과정 중 많은 모형을 내포하고 있는 모형이다. 예컨대 행렬 B가 대각선 행렬이면 Engle(1982)의 ARCH 과정으로 수렴한다. φ=0일 때 비대칭적 ARCH 과정을 얻는다.

기회귀 조건부 이분산(sign- and volatility-switching ARCH; SSARCH; VSARCH) 과정을 정립한 바 있는데 그 형태는 다음과 같다.

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma s_{t-1}$$

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha\varepsilon_{t-1} + s_{t-1}v_{t-1}$$

위에서 $\varepsilon_t > 0$이면 $s_t = 1$, $\varepsilon_t = 0$이면 $s_t = 0$이고 $\varepsilon_t < 0$이면 $s_t = -1$이다. v_t는 $v_t = \delta_0\varepsilon_t^2 - \delta_1 h_t - s_2$이다. SSARCH 과정에서 $\gamma < 0$일 때 t-1기에 관찰한 음의 충격이 t기의 보다 높은 변동성 수준과 연결될 것이다. 따라서 양의 충격과 음의 충격에 대한 변동성의 비대칭적 반응이 포착된다. SSARCH 과정에서 제4차 적률이 γ의 함수이다. 따라서 주식수익률의 높은 첨도를 포착해 주고 있다.

과거의 기대하지 않은 변동성이 미래의 기대변동성에 미치는 영향을 고려한 모형이 변동성 변경 자기회귀 조건부 이분산 과정이다. VSARCH 과정에서 v_t는 관찰된 조건부 변동성 ε_t^2과 이용 가능한 정보에 기초하여 추정한 변동성 σ_t^2과의 차이를 선형적으로 결합시킨 방정식이다. $v_{t-1} < 0$이면 음의 충격이 양의 충격보다 큰 변동성을 야기시킨다. 그러나 $v_{t-1} > 0$이면 양의 충격이 음의 충격보다 변동성을 크게 증가시킨다. 따라서 변동성의 비대칭적 행동이 반전되는 상황을 포착할 수 있는 모형이다. 작은 충격은 기대한 것보다 낮게 변동성 수준을 야기시키는 충격이며 높은 충격은 변동성 수준을 기대한 것보다 높게 생성시키는 충격이다. 이 충격의 양을 반영시키는 모형이 VSARCH과정인 것이다.

GARCH 과정은 예측오차의 부호가 조건부 분산에 미치는 영향을 간과하고 있다. Black(1976)에 의하면 변동성은 불리한 뉴스에 반응하여 증가하고 유리한 뉴스에 반응하여 감소하는 성향이 있음을 밝힌 바 있다.

Fornari와 Mele(1997)은 조건부 이분산 식의 절편이 그 이전의 충격의 부호에 따라 변하게 하여 GARCH 과정이 포착하지 못한 조건부 이분산의 비대칭성을 포착하게 하였으며 이것이 부호 변경 자기회귀 조건부 이분산 과정이다. 이 과정은 충격의 부호를 통하여 조건부 분산이 서로 다른 부호에 대한 비대칭적 반응을 포착하고 있다. 과거의 충격의 부호 이외의 요소도 변동성의 비대칭적 행동에 영향을 미칠 수 있다. 기대하지 않은 수익 이외에도 과거의 충격을 포착하는 모형이 변동성 변경 자기회귀 조건부 이분산 과정이다.

SSARCH 과정의 뉴스충격곡선은 $\varepsilon_{t-1} > 0$일 때 $h_t = A + (\alpha+\gamma)\varepsilon_{t-1}^2$이고 $\varepsilon_{t-1} < 0$

일 때 $h_t = A + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$이다. 이 곡선은 비대칭적이고 중심은 $\varepsilon_{t-1} = 0$일 때 발생한다. VSARCH 과정의 뉴스충격곡선은 $\varepsilon_{t-1} > 0$일 때 $h_t = (\omega - \delta_2) + (\beta - \delta_1)h_{t-1}^2 + (\alpha + \delta_0)\varepsilon_{t-1}^2$이고, $\varepsilon_t < 0$일 때 $h_t = \omega + \beta h_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$이므로 비대칭이다. 이 경우에는 h_t와 ε_{t-1}^2 양자에 의하여 비대칭성이 형성된다. 중심은 $\varepsilon_{t-1} = 0$에서 이루어진다. 레버리지 효과가 발생하기 위하여는 계수 γ가 음수이어야 한다. γ가 음수일 때 $\alpha + \gamma < \alpha$이므로 불리한 뉴스가 발생하면 변동성이 유리한 뉴스보다 증가한다.

10. 비선형 비대칭 일반 자기회귀 이분산(NGARCH) 과정

뉴스의 영향을 포착하는 모형으로 Engle과 Ng(1993)은 비선형 비대칭 자기회귀 이분산(nonlinear asymmetric ARCH; NGARCH) 과정과 변동성 일반 자기회귀 조건부 이분산(volatility GARCH; VGARCH) 과정을 제시하고 있다. NGARCH 과정은 다음과 같다.

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \gamma\sqrt{h_{t-1}})^2$$

NGARCH 과정의 뉴스충격곡선은 대칭적이다. 중심은 $(-\gamma)\sqrt{h_{t-1}}$이다. 이 과정은 t-1기의 조건부 이분산이 ε_{t-1}보다 t기의 변동성에 더 영향력을 발휘하고 있음을 보여주는 모형이다. 따라서 뉴스가 변동성에 미치는 영향이 비선형적이고 비대칭적이다. $\sqrt{h_{t-1}}$은 항상 양수이므로 γ가 음수인 경우 $\varepsilon_{t-1} < 0$, 즉 불리한 뉴스가 유리한 뉴스보다 변동성에 미치는 영향이 상당히 크다. 이 현상은 비대칭성과 비선형성에 의하여 기인된다. 주가 시계열 데이타가 이 과정을 지지하면 투자자는 불리한 뉴스에 대하여 지극히 민감한 반응을 보인다고 할 수 있다. 말하자면 이 과정을 따르는 투자자는 위험기피가 무척 높고 위험 용인도(risk tolerance)가 극히 희박하다고 할 수 있다.

11. 변동성 일반 자기회귀 조건부 이분산(VGRCH) 과정

변동성 일반 자기회귀 조건부 이분산(volatility GARCH; VGARCH) 과정은 다음과 같다.

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha\left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \gamma\right)^2$$

위 과정에서 γ의 값은 음수일 때 유리한 뉴스와 불리한 뉴스가 변동성에 미치는 영

향을 포착할 수 있다. 불리한 뉴스에 대한 반응은 ε_{t-1}이 음수로 표현되고 있으므로 γ가 음수일 때 위 두 식의 마지막 항은 유리한 뉴스의 반응을 표현하는 양수의 ε_{t-1}일 때 보다 크게 된다.

VGARCH 과정은 NGARCH 과정과 마찬가지로 뉴스충격곡선이 대칭적이다. 중심은 $(-\gamma)\sqrt{h_{t-1}}$이다. 그러나 VGARCH 과정의 두 개의 상향 기울기가 NGARCH보다 날카롭다.

12. 편의 검정통계량

주식의 수익률 시계열이 다음에 의하여 형성된다고 하자.

$$y_{jt} = m_t + \theta h_{jt} + \eta_{jt}$$

위 모형은 주가의 변동성이 직접 도입된 모형이다. 따라서 변동성이 주가생성함수의 중요한 변수이다. 이 모형에서는 h_{jt}로 표시되는 변동성이 Markowitz의 포트폴리오 이론에서 제시하는 바와 같은 효율적 포트폴리오를 형성하면 소멸하는 증권 j의 고유위험이 아니라 주가생성에 중요한 영향을 미치는 증권 j의 고유위험인 것이다. 여러 증권들로 구성되는 포트폴리오의 위험은 η_{jt}의 공분산적 결합에 의하여 생성되며 η_{jt}중 증권 j의 고유위험은 이 효율적 포트폴리오에서 소멸할 것이다. 그러나 h_{jt}는 소멸하지 않는다. 이용 가능한 정보를 증권의 가격결정과 효율적 포트폴리오의 형성에 모두 완벽하게 이용하면 이 증권의 기대수익률은 $E(y_{jt} \mid \Omega_{t-1}) = m_t + \theta h_{jt}$이다. 그러나 정보를 이용하지 않는 무조건부 기대값은 $E(y_{jt}) = m_t'$이다. 뿐만 아니라 h_{jt}는 이분산이므로 시간의 함수이다. 따라서 포트폴리오의 형성과 이용 가능한 정보의 증가에 부응하는 포트폴리오의 개선(revision)에 이 조건부 이분산은 중요한 고려사항이 되어야 한다. 잘 알려진 바와 같이 옵션은 변동성의 함수이다. 옵션의 가격결정에 이 조건부 이분산이 중요시되며 따라서 옵션거래에 고려해야 할 중요한 변수인 것이다. 유리한 뉴스와 불리한 뉴스에 의하여 주가의 가격의 변동폭이 상당한 차이를 나타나게 되므로 뉴스의 요인을 포착하여 계산되는 조건부 이분산은 옵션의 동태적 헤지전략을 수립하는데 중요한 변수로서의 역할을 담당한다고 할 수 있다.

GARCH 과정의 뉴스영향곡선은 대칭적이고 중심이 $\varepsilon_{t-1}=0$이다. 따라서 동일한 양의 충격이 주가에 긍정적인 방향, 즉 양으로 발생하거나 부정적인 방향인 음으로 발생

하거나 그것이 생성시키는 변동성의 量은 동일하다. 충격의 양이 크면 변동성은 크다. 변동성의 양은 충격의 크기의 제곱에 비례한다. 그러나 음의 충격의 量과 양의 충격의 量이 동일할 때 음의 충격이 변동성에 미치는 영향이 양의 충격보다 크다면 불리한 뉴스로 인하여 발생한 변동성이 과소하게 평가되고 유리한 뉴스로 인하여 발생하는 변동성은 과도하게 평가될 것이다. 뿐만 아니라 양이 큰 충격이 이차형 함수보다 큰 변동성을 생성시킨다면 큰 충격의 발생으로 인한 변동성은 과소하게 측정될 것이다.

이와 같은 현상의 발생여부를 점검할 수 있는 검정통계량을 Engle과 Ng(1993)이 개발하였다. 이 검정통계량은 부호 편의 검정(sign bias test), 음의 크기 편의 검정(negative size test), 양의 크기 편의 검정과 동시검정이다. 이 검정은 사용한 모형에 포함되지 않는 관찰 가능한 변수들이 표준화된 잔차의 제곱을 예측해 줄 수 있는가의 여부를 점검하는 방법인 것이다. 설명변수로의 역할을 당연히 담당해야 할 변수들이 모형에서 배제되었다면 이 모형은 잘못 정립된 모형이다. $\varepsilon_{t-1} < 0$일 때 1의 값을 가지며 그 이외에는 0의 값을 가지는 변수를 S_{t-1}^{-}이라 하자. 이 변수는 주가에 영향을 미치는 양의 충격이나 음의 충격이 발생할 때 이 충격을 변동성에 반영하는 변수가 모형에 누락되어 있으면 이 변수의 계수는 이 설명변수가 누락되었다는 점을 밝혀줄 것이다. 이것은 부호의 편의성이 존재함을 알려줄 것이다. 따라서 이 변수를 고려하여 점검하는 검정이 부호 편의 검정이다.

음수의 크기검정은 $S_{t-1}^{-}\,\varepsilon_{t-1}$의 변수를 이용하여 음의 크기를 점검한다. 量이 큰 음의 충격과 양이 작은 음의 충격이 사용된 모형에 의하여 예측되지 못하고 있는 변동성에 미치는 영향이 서로 다를 것이다. 이것을 점검하는 것이 음의 크기 검정이다. 양의 크기 검정에서는 S_{t-1}^{+}를 $S_{t-1}^{+} = 1 - S_{t-1}^{-}$로 정의하며 $S_{t-1}^{+}\,\varepsilon_{t-1}$을 사용한다. 이 수치는 ε_{t-1}이 크면 크고 ε_{t-1}이 작으면 작다. 量이 큰 陽의 충격과 量이 작은 陽의 충격은 사용된 모형의 예측 변동성에 미치는 영향이 다를 것이다. 충격이 크면 변동성도 크고 충격이 작으면 변동성도 작을 것이다. $S_{t-1}^{+}\,\varepsilon_{t-1}$가 충격의 양을 나타내고 있으므로, 양의 크기 검정은 충격의 영향의 量 차이를 점검하는 통계량이다. 불리한 뉴스가 유리한 뉴스보다 변동성에 미치는 영향이 크므로 양의 충격과 음의 충격은 구별해야한다. Engle과 Ng(1993)은 $v_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}$이라 하고 $z_t = h_t^{-1} \partial h_t / \partial \delta$로 정의하여 다음과 같은 회귀식을 정립하고 검정을 실시해야 한다는 점을 밝히고 있다.

$$v_t^2 = a + b_1 S_{t-1}^{-1} + b_2 S_{t-1}^{-} \varepsilon_{t-1} + b_3 S_{t-1}^{+} \varepsilon_{t-1} + \beta' z_t + e_t$$

위 식에서 b_1, b_2와 b_3의 값이 각각 부호 편의 검정, 음의 크기 검정과 양의 크기

검정의 검정통계량이다. 동시검정을 수행하기 위하여 $\beta' z_t$가 위의 회귀식에 도입된 것이다. 사용된 모형이 정확하다면, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$이고 $\beta = 0$ 이어야 한다. 그리고 e_t는 독립적 동등분포이어야 한다. 따라서 LM검정이 타당하다. LM검정식은 R^2를 결정계수라 하고 T를 표본수라 할 때 TR^2이다. 이 통계량은 χ^2확률변수이고 자유도는 3이다. 자유도는 모수제약(parameter restriction)의 개수인 바 여기에서는 3개 모두가 제약을 받고있기 때문이다.

III. 실증분석

1. 데이터와 추정방법

증권의 가격결정 모형이 발생한 뉴스가 미치는 영향을 제대로 포착하고 있는지의 여부를 점검하기 위하여 뉴스 포착항이 변수로 작동하고 있는 ARCH 과정 계통의 모형들을 실증적으로 분석한다. 이 분석에 사용된 데이터는 일별 종합주가지수의 수익률이다. 표본기간은 1980. 1. 4. - 1995. 12. 27.이다.

각 모형들의 계수는 최대우도법에 의하여 추정하였다. Fiorentini 등(1996)은 최대우도법이 가장 효율적이라는 점을 증명하였다. Lumsdaine(1995)은 최대우도법에 의하여 추정하고 헤시언 행렬을 이용하는 것이 추정과 검정에 효율적이라는 점을 밝히고 있다.

2. 자기회귀 모형의 모수추정

일별주식수익률의 조건부 평균을 생성시키는 모형으로서는 자기회귀모형을 택하였다. 이 수익률 시계열의 자기회귀모형은 편류(drift)를 갖는 AR(3)임이 실증분석을 통하여 얻었다. 이 결과를 <표 1>에 제시한다.

<표 1> AR (3)과정

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \beta_3 y_{t-3} + \varepsilon_t$$

	β_0	β_1	β_2	β_3
AR	0.00046	0.12461	-0.05416	0.03798
	(0.00017)	(0.01461)	(0.01469)	(0.01460)
GARCH	0.00032	0.09538	-0.03836	0.0382
	(0.00000)	(0.00024)	(0.00024)	(0.00023)

주) 괄호안의 수치는 표준오차임.

<표 1> AR (3)과정(연속)

	β_0	β_1	β_2	β_3
AGARCH	0.00030	0.09510	-0.03696	0.04018
	(0.00000)	(0.00024)	(0.00024)	(0.00023)
GJR	0.00021	0.09579	-0.03398	0.03907
	(0.00000)	(0.00024)	(0.00024)	(0.00023)
EGARCH	0.00027	0.15331	-0.02294	0.05661
	(0.00000)	(0.00023)	(0.00024)	(0.00022)
NARCH	0.00029	0.13959	-0.03848	0.05728
	(0.00000)	(0.00026)	(0.00025)	(0.00024)
NGARCH	0.00026	0.09545	-0.03535	0.04006
	(0.00000)	(0.00024)	(0.00024)	(0.00023)
VGARCH	0.00032	0.13690	-0.03981	0.05725
	(0.00000)	(0.00025)	(0.00025)	(0.00024)
GQARCH	0.00030	0.09511	-0.03692	0.04020
	(0.00000)	(0.00024)	(0.00024)	(0.00023)
SSARCH	0.00039	0.09446	-0.04100	0.03860
	(0.00000)	(0.00024)	(0.00024)	(0.00023)
VSARCH	0.00027	0.09359	-0.03690	0.03462
	(0.00000)	(0.00024)	(0.00024)	(0.00023)

주) 괄호안의 수치는 표준오차임.

시차 1의 계수는 GARCH, AGARCH, GJR, NGARCH, GQARCH, SSARCH와 VSARCH가 약 0.095이고 EGARCH, NARCH와 VGARCH가 각각 0.153, 0.140과 0.137이다. 시차 2와 시차 3에 있어서도 각 과정마다 차이가 발생하고 있다. 편류항, 시차 1과 시차 3의 항은 계수가 양수이고 시차 2의 항의 계수는 음수이다. 모든 변수에 있어서 표준오차가 상당히 작다.

3. 조건부 이분산 과정의 모수추정

뉴스 변수가 도입된 자기회귀 조건부 이분산 과정들의 추정결과를 제시하면 <표 2>와 같다.

모든 과정의 계수의 표준오차가 상당히 작다. 따라서 모든 유의수준에서 이 과정이 주가생성과 함수로 적절하다고 인정될 수 있다. 이 결과에 의하면 뉴스가 주가의 변동성에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 뿐만 아니라 음의 충격과 양의 충격이 주가의 변동성에 미치는 영향이 다르다는 것을 알 수 있다. 예컨대 EGARCH 과정에서 뉴스 충격 반응계수인 γ가 $\gamma=-0.02003$이고 $\alpha=0.38887$이다. γ가 음수이고 $\gamma+\alpha$가 양

<표 2> 뉴스 모형

GARCH	$h_t = 0.0001 + 0.71662h_{t-1} + 0.21847\varepsilon_{t-1}^2$ (0.00000) (0.000028) (0.00025) 대수최대우도 : 19114.99322
AGARCH	$h_t = 0.00001 + 0.71962h_{t-1} + 0.21628(\varepsilon_{t-1} - 0.00027)^2$ (0.00000) (0.00028) (0.00025) (0.00001) 대수최대우도 : 19104.92859
GJR	$h_t = 0.00001 + 0.71994h_{t-1} + 0.18154\varepsilon_{t-1}^2 + 0.07226S_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2$ (0.00000) (0.00028) (0.00026) (0.00037) $S_{t-1} = \begin{vmatrix} 1 , & \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 , & \varepsilon_{t-1} > 0 \end{vmatrix}$ 대수최대우도 : 19109.48681
EGARCH	$\log h_t = -0.98934 + 0.88996\log h_{t-1} - 0.02003\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}$ (0.000147) (0.00016) (0.00020) $+0.38887\left[\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$ (0.00035) 대수최대우도 : 19106.10523
NARCH	$h_t = 0.00000 + 0.72395h_{t-1} + 0.02373\lvert\varepsilon_{t-1}\rvert^{1.42797}_{(0.00131)}$ (0.00000) (0.00028) (0.00013) 대수최대우도 : 19112.98239
NGARCH	$h_t = 0.00001 + 0.72125h_{t-1} + 0.21398(\varepsilon_{t-1} - 0.06406\sqrt{h_{t-1}})^2$ (0.00000) (0.00028) (0.00025) (0.00114) 대수최대우도 : 19105.65484
VGARCH	$h_t = 0.00000 + 0.82724h_{t-1} + 0.00002(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} - 0.00857)^2$ (0.00000) (0.00019) (0.00000) (0.00055) 대수최대우도 : 19085.20133
GQARCH	$h_t = 0.00001 + 0.71865h_{t-1} + 0.21622\varepsilon_{t-1}^2 - 0.00012\varepsilon_{t-1}$ (0.00000) (0.00028) (0.00025) (0.00000) 대수최대우도 : 19104.92781
SSARCH	$h_t = 0.00001 + 0.70992\, h_{t-1} + 0.22138\, \varepsilon_{t-1}^2 + 2.18E\text{-}6\, s_{t-1}$ (0.00000) (0.00029) (0.00025) (1.59E-8) $\begin{pmatrix} s_t = 1 & \varepsilon_t > 0 \\ s_t = 0 & \varepsilon_t = 0 \\ s_t \leq -1 & \varepsilon_t < 0 \end{pmatrix}$ 대수최대우도 : 19106.66354
VSARCH	$h_t = 0.00001 + 0.71295\, h_{t-1} + 0.22286\, \varepsilon_{t-1}^2 + s_{t-1}\, v_{t-1}$ (0.00000) (0.00028) (0.00026) $v_{t-1} = -0.06516\, \varepsilon_{t-1}^2 - 0.00333\, h_{t-1} - 4.76E\text{-}6$ (0.00023) (0.00038) (2.96E-8) 대수최대우도 : 19105.07895

수이다. $\varepsilon_{t-1} > 0$에 대하여 $h_t = A \circ \exp[(0.36884/\sigma) \cdot \varepsilon_{t-1}]$이고 $\varepsilon_{t-1} < 0$에 대하여 이다.

그런데 $\varepsilon_{t-1} < 0$의 경우 ε_{t-1}가 음수이므로 $h_t = A \circ [(0.04089/\sigma) \cdot |\varepsilon_{t-1}|] h_t = A \cdot \exp[(-0.04089/\sigma) \cdot \varepsilon_{t-1}]$이다. 따라서 $\varepsilon_{t-1} < 0$의 경우의 h_t가 $\varepsilon_{t-1} < 0$의 h_t보다 크다. 불리한 뉴스가 발생할 때 음의 충격이 변동성에 미치는 영향의 정도가 크다. 이것은 지수함수이므로 변동성의 크기는 상당히 다르게 된다. Engle과 Ng(1993)에 의하면 일본의 경우 $\gamma = -0.1450$이고 $\alpha = 0.4927$이다. 우리나라의 γ의 계수값이 일본에 비하여 낮은 수치이다. 일본에 비하여 우리 나라가 불리한 충격에 대하여 덜 민감하다고 할 수 있을 것이다.

AGARCH 과정에서 $\gamma = -0.00027$, GJR 과정에서 $\gamma = 0.07226$, NGARCH 과정에서 $\gamma = -0.064606$, VGARCH 과정에서 $\gamma = -0.00857$이고 GQARCH 과정에서 $\gamma = -0.00012$이다. GJR 과정의 γ값을 제외한 모든 과정의 γ값은 음수로서 유리한 뉴스에 대하여는 변동성을 GARCH 과정보다 감소시키고 불리한 뉴스에 대하여서는 변동성을 GARCH 과정보다 증가시킨다. 변동성은 유리한 뉴스와 불리한 뉴스에 대하여 비대칭적이다. GJR 과정의 γ값은 양수이다.

ε_t가 음수일 때 의사변수(dummy variable) S인 S_t의 값이 양수인 1이므로 불리한 뉴스가 발생할 때 변동성이 GARCH 과정보다 크고 유리한 뉴스에 대하여 변동성이 GARCH 과정보다 작다. NARCH 과정은 $\gamma = 1.42797$이다. $\gamma = 2$이면 GARCH(1, 1) 과정과 일치한다. NARCH 과정에서 $\gamma = 1.43$이므로 충격은 지수감소율 또는 기하감소율 1.43으로 소멸해 간다. 대수최대우도는 GARCH가 최대이고 다음이 NARCH이다. GARCH의 $\gamma = 2$는 과도하게 측정되고 있으며, $\gamma = 1.5$가 적절한 것 같기도 하다.

SSARCH 과정은 의사변수인 s_{t-1}의 계수가 0에 접근하고 있어 GARCH 과정과 유사하다. 이 두 과정의 계수의 값도 유사하다. 의사변수는 ε_t의 값이 양수이면 1, 음수이면 -1, 그리고 0이면 0의 값을 갖는 변수이다. 이 의사변수의 계수의 값이 0에 접근하고 있다는 것은 잔차의 양의 값의 계수와 음의 값의 계수가 거의 동일하다는 것을 의미한다. 이에 비하여 VSARCH 과정은 의사변수 s_t의 계수를 형성하는 방정식 v_t의 독립변수인 ε_{t-1}^2과 h_{t-1}의 계수가 각각 -0.06516과 -0.00333이다. 따라서 VSARCH는 불리한 뉴스가 유리한 뉴스 보다 주가형성에 큰 영향을 미치고 있다. ε_{t-1}^2의 값이 양수이어야 하는데 음수가 발생하였다. 이것은 부정적인 뉴스가 보다 큰 영향을 미치고 있음을 의미한다.

GARCH를 제외한 모든 과정, 즉 뉴스를 포착하고 뉴스의 비대칭을 포함 하는 과정에서 최대우도값을 기준으로 모형의 적합도를 판단하면 NARCH의 우도값이 최대이므로 NARCH 과정이 가장 적합한 모형으로 인정될 수 있다. GARCH 과정에서는 오차항의 제곱으로 표시되어 있는데, 이보다는 γ값인 1.42797을 1.5로 본다면 GARCH의 자승이 아니라 1.5의 제곱이 타당하다는 추론도 성립될 수 있다 하겠다. 이 과정들의 모수 추정에서 발견할 수 있는 것은 비대칭성이 존재하고 있으며 이를 통하여 변동성을 구별하고 있기는 하나 비대칭성의 정도가 크지는 않다는 것이다. 우리 나라의 투자자는 뉴스의 차이보다는 뉴스 그 자체에 보다 중요성을 부여하고 있는 것 같이 보인다.

4. 편의성 검정

부호나 규모의 편의가 존재하고 있는지의 여부를 점검하기 위한 통계량을 <표 3>에 제시한다.

<표 3> 검정통계량

모 형	부호편의	음의 규모 편의	양의 규모 편의	동시검정
GARCH	-1.16325	1.11149	-2.22365*	5.79462
AGARCH	-1.43277	1.14267	-2.12932*	5.99675
GJR	-1.33095	1.39708	-1.74389	6.19733
EGARCH	-0.83960	0.96848	-1.26759	2.92099
NARCH	-0.89345	0.69782	-1.54101	2.80197
NGARCH	-1.64441	1.12989	-2.00963	6.42922
VGARCH	-1.34733	0.79256	-1.74798	18.99086*
GQARCH	-1.43706	1.13818	-2.12655*	5.93281
SSARCH	-0.68279	1.30529	-2.31798*	5.74226
VSARCH	0.16847	1.85766	-1.26883	4.48663

주) *는 5%에서 유의적임.

부호편의와 음의 규모 편의는 모든 과정에서 기각에 실패하고 있다. 양의 규모 편의는 GARCH, AGARCH, NGARCH, GQARCH와 VSARCH 과정은 5%에서 유의하다. 이 통계량은 약 2이다. 그러므로 겨우 기각하고 있는 정도에 불과하다. 동시검정의 임계값은 7.81이다. 따라서 모든 과정 중 VGARCH만 유일하게 유의적이다. 동시검정에 의하면 VGARCH 과정을 제외하면 모든 과정이 대체적으로 뉴스와 규모를 적절하게 반영하고 있다고 하겠다. 그러나 특히 GARCH 과정은 양의 규모에 편의가 존재한다고 할 수 있다. EGARCH 과정과 NGARCH 과정은 부호 편의, 음의 규모 편의 및 양의 규

모 편의와 동시검정의 통계량이 가장 작다. NGARCH 과정의 대수 최대우도 값이 가장 크다. 그 다음이 EGARCH 과정이다. 따라서 EGARCH와 NGARCH 과정이 가장 우수한 과정이다. 그리고 GARCH가 뉴스의 비대칭성과 규모를 적절히 반영하고 있지 못한 모형이라 할 수 있을 것이다. 일본의 경우에는 EGARCH 과정 보다는 GJR 과정이 약간 유리한데 우리 나라에서는 GJR 과정도 무리 없이 뉴스의 비대칭성과 규모를 반영하고 있는 모형이다. 양국이 유사한 투자행동을 수행하고 있는 것은 흥미로운 일이다. Engle과 Ng(1993)은 NARCH 과정을 분석하고 있지 않다. 그러나 우리 나라에서는 NARCH가 주가의 변동성을 실증적으로 가장 잘 설명하고 있다.

5. 조건부 이분산 기술통계량

조건부 이분산의 특성을 좀 더 파악하기 위하여 조건부 이분산의 기술통계량을 계산하였는바 이것을 <표 4>로 제시한다.

<표 4> 분산의 기술통계량

모형	평균	표준편차	최소값	최대값	왜도	첨도
ε_t^2	0.00013	0.00028	2.5E-12	0.00725	7.2448	112.72547
GARCH	0.00013	0.00012	0.00004	0.00162	3.59446	17.87520
AGARCH	0.00013	0.00012	0.00004	0.00161	7.59657	17.94959
GJR	0.00013	0.00012	0.00004	0.00187	3.98957	25.59718
EGARCH	0.00013	0.00013	0.00002	0.00498	15.74541	508.40670
NARCH	0.00013	0.00009	0.00002	0.00081	2.21040	18.27440
NAGARCH	0.00013	0.00012	0.00004	0.00160	3.59382	18.22716
VGARCH	0.00013	0.00010	0.00002	0.00248	8.18948	130.68668
GQARCH	0.00013	0.00012	0.00004	0.00161	3.59700	17.95802
SSARCH	0.00013	0.00012	0.00003	0.00165	3.62227	18.39987
VSARCH	0.00013	0.00012	0.00002	0.00212	4.46501	35.52795

조건부 이분산의 평균과 표준편차는 거의 유사하다. 최소값도 거의 유사하다. 그러나 최대 값은 차이가 있다. EGARCH의 최대값이 가장 크고 NARCH가 가장 작다. EGARCH는 왜도와 첨도가 각각 가장 크다. 꼬리부분이 상당히 두껍고 오른쪽으로 기울어져(skew)있다. 이 현상은 조건부 이분산모형이 주가의 운동양태를 해명하는데 적절하다는 것을 입증하고 있는 것이다.

IV. 결 론

증권의 가격형성에 유리한 뉴스와 불리한 뉴스가 도착할 때 이 뉴스가 주가의 변동성에 미치는 영향의 정도는 차이가 있다. 불리한 뉴스가 변동성에 미치는 영향도가 유리한 뉴스가 변동성에 미치는 영향보다 크다. 따라서 불리한 뉴스가 발생할 때 형성되는 변동성의 양이 유리한 뉴스의 도착시보다 크다. 그리고 충격의 크기에 따라 이 충격이 야기하는 변동성의 양의 크기에도 차이가 존재한다. 이와 같은 현상을 포착할 수 있는 자기회귀 조건부 이분산 과정의 모형들을 실증적으로 분석하였다.

뉴스의 비대칭성과 규모의 크기를 포착할 수 있는 일반 자기회귀 조건부 이분산 과정들을 일별 종합주자지수 수익률을 사용하여 검정하였다. NARCH, EGARCH와 GJR 과정이 뉴스의 비대칭성과 규모를 적절히 포착하고 있는 모형들임이 발견되었다. 최대대수우도값은 NARCH, EGARCH와 GJR 과정 순이었다. 따라서 NARCH 과정이 가장 좋은 모형으로 보인다. NARCH 과정의 경우 예측오차의 승멱이 약 1.5이다. 따라서 GARCH과정의 예측오차의 승멱인 2에 비하여 작다. 이 사실은 GARCH의 예측오차의 승멱이 과도하게 측정되고 있음을 제시하고 있다. 뉴스의 비대칭성과 규모를 반영하고 있는 모형들은 한결같이 예측오차의 크기에 적절한 가중치를 부여하여 예측오차의 크기를 조정하고 있다. 이 모형의 성질과 실증분석의 결과에 의하여 예측오차의 승멱은 2 이하로 수정하여 사용해야 한다는 점을 시사하고 있다. 따라서 예측오차를 가격형성과정에 직접 도입하는 경우에는 자승 이하의 승멱계수를 사용해야 할 것이다. 요컨대 음의 충격이 양의 충격보다 주가의 변동성을 크게 하고 있음이 발견되었다.

조건부 이분산은 이 논문에서 검토한 모든 모형에서 오른쪽으로 기울어져 있으며 꼬리부분이 두꺼운 분포를 형성하고 있다. 이와 같은 특성은 미국과 일본에 비하여 상당한 정도로 차이가 나고 있으며 우리 나라가 상당히 낮다. 이러한 현상은 우리 나라가 미국과 일본에 비하여 뉴스의 비대칭성과 뉴스의 量보다는 뉴스의 도착 그 자체에 중요성을 부여하고 있다는데서 기인하는 것 같다. 미국과 일본에 비하여 주가형성에 유리한 뉴스와 불리한 뉴스가 주가의 변동성에 미치는 영향의 차이와 충격의 중대성을 양으로 표시하는 규모의 차이를 반영해주는 변수들의 추정된 계수가 미국과 일본보다 절대값에 있어서 상당히 작다. 이 현상은 뉴스의 비대칭성과 규모 보다는 발생하는 충격, 즉 뉴스나 정보 그 자체에 보다 민감하게 반응하고 있음을 보여주고 있다. 물론 뉴스의 비대칭성과 규모를 완전히 무시하고 투자활동을 전개하고 있다는 것을 의미하는 것은 아니다.

참 고 문 헌

구맹회, 이윤선, "EGARCH모형을 이용한 주식수익률의 변동성 연구", 재무관리연구, 제12권, 1996, 95-120.

이일균, "證券의 日別收益率과 月別收益率의 特性에 관한 연구", 증권학회지, 제11집, 1989, 199-229.

이일균, "주가의 장기기억과 분수적분 일반 자기회귀 조건부 이분산: 주가결정과정에 대한 한 탐구", 한국증권학회 추계발표논문집, 1999.

조 담, "주식수익률의 조건부 이분산성에 관한 연구", 재무연구, 제17집, 1992, 121-166.

Bera, A. K and M. L. Higgins, 1993, "ARCH Models: Properties, Estimation and Testing," *Journal of Economic Surveys* 7(1993), 305-366.

Black, F., "Studies of Stock Market Volatility Changes," in American Statistical Association (ed.), *Proceedings of the American Statistical Association: Business and Economic Statistics Section* : Chicago, 1976.

Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics* 31(1986), 307-327.

Bollerslev, T., R. Y. Chou, and K. F. Kroner, "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence," *Journal of Econometrics* 52(1992), 5-59.

Bollerslev, T., R. F. Engle and D. B. Nelson, "ARCH Models," in R. F. Engle and D. McFadden (eds), *Handbook of Econometrics* 5(1994), 5-59.

Ding, Z. and C. W. J. Granger, "Modeling Volatility Persistence of Speculative Returns: A New Approach," *Journal of Econometrics* 73(1996), 185-215.

Engle R. F., "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica* 50(1982), 987-1007.

Engle, R. F., "Discussion," *Review of Economic Studies* 3(1990), 103-106.

Engle, R. F. and T. Bollerslev, "Modelling the Persistence of Conditional Variance," *Econometric Review* 5(1986), 1-50.

Engle, R. F. and V. K. Ng, "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility," *Journal of Finance* 48(1993), 1749-1778.

Fiorentini, G., G. Calzolari, and L. Panattoni, "Analytic Derivatives and the Computation of GARCH Estimates," *Journal of Applied Econometrics* 11(1996), 399-417.

Fornari, F. and A. Mele, "Sign- and Volatility-Switching ARCH Models: Theory and Applications to International Stock Markets," *Journal of Applied Econometrics* 12(1997), 49-65.

French, K., G. W. Schwert and R. F. Stambaugh, "Expected Stock Returns and Volatility," *Journal of Finance* 45(1987), 479-496.

Glosten, L., R. Jaganathan and D. Runkle, "Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks," *Journal of Finance* 48(1993), 1779-1801.

He, C. and T. Teräsvirta, "Properties of Moments of a Family of GARCH Processes," *Journal of Econometrics* 92(1999), 173-192.

Hentschel, L., "All in the Family Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models," *Journal of Financial Economics* 39(1995), 71-104.

Hong, Y. and R. D. Shehedeh, "A New Test for ARCH Effects and Its Finite-Sample Performance," *Journal of Business and Economic Statistics* 17(1999), 91-108.

Liu, M., "Asymptotics of Nonstationary Fractional Integrated Series," *Econometric Theory* 14(1998), 641-662.

Lumsdaine, R. L., "Consistency and Asymptotic Normality of the Quasi-Maximum Likelihood Estimators in IGARCH(1, 1) and Covariance Stationary GARCH(1, 1) Models," *Econometrica* 64(1996), 575-596.

Lumsdaine, R. L., "Final Sample Properties of the Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) Models: A Monte Carlo Investigation," *Journal of Business and Economic Statistics* 13(1995), 1-10.

Nelson, D. B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica* 59(1991), 267-290.

Palm, F. C., "GARCH Models of Volatility," in G. S. Maddala and C. R. Rao(eds), *Handsbook of Statistics* 14(1996), Amsterdam: Elsevier Science.

Schwert, G. W., "Stock Market Volatility and the Crash of 87," *Review of Financial Studies* 3(1990), 77-102.

Sentana, E., "Quadratic ARCH Models," *Review of Economic Studies* 62(1995), 639-661.