

2.5차원 전자탐사 수치모델링 및 역해

고광범¹⁾ · 서정희²⁾ · 신창수²⁾

2.5-Dimensional Electromagnetic Numerical Modeling and Inversion

Ko, Kwang-Beom, Suh, Jung-Hee and Shin, Chang-Soo

요 약 : 전자탐사 수치모델링 및 역산은 복잡한 지하구조에 대한 전자기장의 정확한 거동양상 규명을 위한 기본적인 해석방법이다. 본 연구에서는 2.5차원 전자탐사 수치모델링 알고리즘을 유한요소법을 이용하여 구하였다. 이때 전기장과 자기장이 결합되어 표현되는 2.5차원 미분방정식을 정식화할 때 선형적 물성변화를 고려하는 유한요소 방정식을 도출, 제시하였다. 송신원의 영향이 큰 근거리장과 균질 반무한공간의 반응이 지배적인 원거리장 각각에 대하여 모델변수를 검토하고 이를 토대로 균질 반무한공간에서의 해석적인 해와 비교하여 봄으로써 알고리즘의 타당성을 검증하였다. 본 연구에서 제시한 수치 모형반응 알고리즘에 부합하는 수정된 블록역산모형을 고안하였으며 고립형 이상체에 대한 분해능을 살펴봄으로써 분산방정식으로 표현되는 전자탐사 자료의 역해 가능성 및 한계를 고찰하였다.

Abstract : Numerical modeling and inversion for electromagnetic exploration methods are essential to understand behaviour of electromagnetic fields in complex subsurface. In this study, a finite element method was adopted as a numerical scheme for the 2.5-dimensional forward problem. And a finite element equation considering linear conductivity variation was proposed, when 2.5-dimensional differential equation to couple electric and magnetic field was implemented. Model parameters were investigated for near-field with large source effects and far-field with responses dominantly by homogeneous half-space. Numerical responses by this study were compared with analytic solutions in homogeneous half-space. Blocky inversion model was modified to be applied to the forward calculation in this study and it was also adopted in the inversion algorithm. Resolution for isolated bodies were investigated to confirm possibility and limitation of inversion for electromagnetic exploration data.

Keywords : 2.5 차원 전자탐사, 유한요소법, 근거리장, 원거리장, 블록역산모형

서 론

전자탐사 자료의 해석에 널리 사용되는 수치모델링은 복잡한 지하구조에 대한 전자기장의 정확한 거동양상 규명을 위한 기본적인 방법으로, 1960년대 이후 컴퓨터의 급속한 발전에 힘입어 많은 연구가 이루어지고 있다. 전자탐사를 위한 효과적인 모델링 및 해석의 기준은 주어진 탐사여건 및 대상영역의 지질학적 구조, 그리고 송신원의 형태에 따라 다양하게 변할 수 있다. 2차원 수치모델링 기법은 자연장을 송신원으로 이용하거나(magnetotelluric method) 평면파 근사가 가능한 탐사법(CSAMT, VLF)에는 효과적이거나, 대형루프를 송신원으로 하는 인공송신원의 경우, 송신원 주변 근처 영역에서만 적용이 가능하므로 활용성에서 많은 제약이 따른다. 3차원 수치모델링 기법은 임의의 지하구조에 대한 전자기장을 구현할 수 있는 가장 일반적인 방법이나 계산시간이 많이 걸리는 단점이 있다. 특히 전자탐사 자료의 역산을 고려하였을

때 계산시간이 짧은 수치모델링 방법이 절대적이므로 3차원 모델링은 아직은 그 적용이 어려운 것으로 판단된다.

반면 2.5차원 수치모델링 기법은 지하매질의 전자기적 물성이 주향방향으로 일정하다는 가정하에 3차원 송신원에 의한 전자기장 반응을 구하는 방법이다. 통상적으로 전자탐사법도 여타 물리탐사법과 동일하게 측선을 설정할 시, 지질구조의 주향방향을 기준으로 설정된 측선상에서 자료를 획득한다. 쌍극자원을 송신원으로 하는 전자탐사법은 하나의 측선상의 관점에서 보면 3차원 전원항에 의한 2차원 지하구조를 가정한 2.5차원의 자료에 대한 해석이라 말할 수 있다.

2.5차원 전자탐사법은 전원항이 3차원이므로 맥스웰 방정식의 해를 수치적으로 구하기 위해서는 주향방향으로 푸리에 변환된 공간주파수 영역상에서 계산을 수행한다. 이 경우 2.5차원 분산방정식은 전기장과 자기장이 공간주파수의 함수로서 서로 결합(coupling)되어 표현되는 복잡한 미분방정식의 해를 구하는 문제가 된다(Stoyer *et al.*, 1976; Unsworth *et al.*,

*1999년 1월 22일 접수

1) 강원대학교 자연과학대학 지구물리학과 (Dept. of Geophysics, Kangwon National University)

2) 서울대학교 공과대학 지구환경시스템공학부 (Sch. of Urban, Civil & Geosystem Eng., Seoul National University)

1993; Stodt, 1978). 결합된 미분방정식의 해를 구하는 방법은 전도체 경계면에서의 전기장 및 자기장의 경계면에서의 연속 조건을 자동적으로 만족하는 장점이 있다. 반면 축선방향 및 수직방향의 전자기장을 수치미분하여 구하여야 하는 바, 이의 미분오차를 포함하게 되는 단점이 있다.

한편, 변분법(calculus of variation)에 기초한 유한요소법(Lee, 1978)은 2.5차원 전기장 및 자기장의 결합항이 없이 전기장 또는 자기장만의 범함수로 수식화 할 수 있는 장점이 있다. 그러나 전류밀도의 연속조건을 만족해야 하는 전도체 경계면에서는 전하집적에 의하여 전기장이 불연속이 된다. 특히 지표면과 같은 매우 큰 전기전도도 불연속면 근처에 송신원이 존재하는 경우에는 해의 연속성을 기초로 하는 유한요소법 알고리즘의 속성상 심각한 문제가 된다.

주파수영역 전자탐사 자료의 역해에 관한 연구는 대상영역을 1차원 층서구조나 2차원 구조를 가정한 역해(Oristaglio *et al.*, 1980) 또는 평면파 근사가 가능한 탐사법에 의한 역해 결과(Beamish, 1994; Jupp *et al.*, 1974)등은 발표된 바 있으나 자기쌍극자를 송신원으로 하는 2차원 또는 3차원 지하구조에 대한 역해는 아직 많이 이루어지지 않은 실정이다. 현재까지 전자탐사 자료의 해석은 주로 축소 모형실험이나 수치모델링을 통한 전자기장의 모형반응곡선을 이용한 해석이 주요한 수단이 되고 있다. 이러한 모형반응곡선에 의존한 해석은 전자탐사자료가 다양한 모델변수에 의해 좌우되므로 시간이 많이 걸리고 경우에 따라서는 해석이 불가능할 수도 있다.

본 연구에서는 전자탐사 자료를 처리, 영상 해석단면을 도출해 낼 수 있는 일관적인 알고리즘을 도출함으로써 정량적인 전자탐사 자료 해석을 위한 하나의 방법을 제시하였다. 3차원 수직 자기쌍극자원을 가정한 2차원 모형반응 계산 알고리즘, 즉 2.5차원 모델링 알고리즘을 유한요소법을 이용하여 구현하였다. 송수신 시스템이 임피던스 차이가 큰 지표에 존재하는 경우가 대부분임을 감안하여 본 연구에서는 주향방향의 전자기장을 구하는 Stoyer 등(1976)의 방법을 채택하였다. 결합된 맥스웰 미분방정식을 유한요소방정식으로 정식화할 때 선형적 물성변화를 고려하는 유한요소 알고리즘을 도출, 제의하였다. 송신원의 영향이 큰 근거리장과 균질 반무한공간의 반응이 지배적인 원거리장 각각에 대한 모델변수를 검토하고 이를 토대로 균질 반무한공간에서의 해석적인 해와 비교하여 봄으로써 알고리즘의 타당성을 검증하였다. 또한 3차원 타 수치모델링 기법과 비교하여 봄으로써 전도체의 2차원 가정을 검토하였다.

한편, 본 연구에서 제시한 선형 물성변화를 고려한 유한요소법 알고리즘을 이용하여 역산을 수행하기 위해서는 기존의 블록분할모형에 대한 수정이 필요하다. 역해변수인 블록간의 전기전도도가 선형적인 변화를 허용하는 변형된 블록 분할모형을 고안하고, 지표 송수신 시스템에서 고립형 이상체에 대한 분해능을 살펴봄으로써 분산방정식으로 표현되는 전자탐사 자료의 역해의 가능성 및 한계를 고찰하였다.

이 론

2.5차원 전자기장의 지배방정식 및 유한요소 방정식

자기쌍극자 송신원을 포함한 주파수영역 맥스웰 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \times E = -i\omega\mu H - i\omega\mu M_s \quad (1)$$

$$\nabla \times H = \sigma E - i\omega\epsilon E = \sigma' E \quad (2)$$

여기서 M_s : 자기송신원

Swift(1971)는 2차원 전원항에 의한 2차원 모형의 반응을 각각의 독립된 2개의 성분(TM, TE모드)에 대하여 계산하였다. 자기쌍극자와 같은 3차원 송신원은 2차원의 경우처럼 두 성분이 분리되어 표현되지 않고, 전기장과 자기장이 주향방향의 공간주파수의 함수로 서로 결합된 미분방정식의 형태로 표현되게 된다. 2차원의 경우와 동일하게 각각 TM(transverse magnetic), TE(transverse electric)이라 한다면(Stoyer *et al.*, 1976), 주향방향으로 푸리에 변환한 TM모드와 TE모드 맥스웰 방정식은 아래와 같이 표현된다.

TM 모드

$$\partial_y \hat{E}_z - \partial_z \hat{E}_y = -i\omega\mu \hat{H}_x - i\omega\mu \hat{M}_{sx} \quad (3)$$

$$\sigma'(1 - \frac{k_x^2}{k^2}) \hat{E}_z = \partial_y \hat{H}_x - \frac{k_x}{\omega\mu} \partial_z \hat{E}_x - ik_x \hat{M}_{sy} \quad (4)$$

$$-\sigma'(1 - \frac{k_x^2}{k^2}) \hat{E}_y = \partial_z \hat{H}_x + \frac{k_x}{\omega\mu} \partial_y \hat{E}_x - ik_x \hat{M}_{sz} \quad (5)$$

TE 모드

$$\partial_y \hat{H}_z - \partial_z \hat{H}_y = \sigma' \hat{E}_x \quad (6)$$

$$-i\omega\mu(1 - \frac{k_x^2}{k^2}) \hat{H}_z = -\partial_y \hat{E}_x - \frac{ik_x}{\sigma'} \partial_x \hat{H}_x + i\omega\mu \hat{M}_{sz} \quad (7)$$

$$i\omega\mu(1 - \frac{k_x^2}{k^2}) \hat{H}_y = -\partial_x - \frac{ik_x}{\sigma'} \partial_y \hat{H}_x - i\omega\mu \hat{M}_{sy} \quad (8)$$

여기서 $k^2 = i\omega\mu\sigma' = \omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu\sigma$

위의 식들을 살펴보면, 전원항과 공간주파수가 0이 아닌 경우에 존재하게 되는 전기장과 자기장이 결합되어 나타나는 항이 존재하는 것 이외에는 2차원 MT의 지배방정식과 동일한 것을 알 수 있다. 식 (4), (5), (7)과 (8)식을 (3)과 (6)식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 2개의 서로 결합된 2.5차원 미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} -\partial_y \left(\frac{\partial_y \hat{H}_x}{FM} \right) - \partial_z \left(\frac{\partial_z \hat{H}_x}{FM} \right) - ik_x [\partial_z \hat{E}_x] \partial_y \xi + ik_x [\partial_y \hat{E}_x] \partial_z \xi + \zeta^M \hat{H}_x \\ = -\zeta^M \hat{M}_{sx} + ik_x \partial_y \left(\frac{\hat{M}_{sy}}{FM} \right) + ik_x \partial_z \left(\frac{\hat{M}_{sz}}{FM} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$-\partial_y \left(\frac{\partial_y \hat{E}_x}{FE} \right) - \partial_z \left(\frac{\partial_z \hat{E}_x}{FE} \right) + ik_x [\partial_z \hat{H}_x] \partial_y \xi - ik_x [\partial_y \hat{H}_x] \partial_z \xi + \zeta^E \hat{H}_x$$

$$= -\partial_y \left(\frac{i\omega\mu}{F^E} \hat{M}_{sz} \right) + \partial_z \left(\frac{i\omega\mu}{F^E} \hat{M}_{sy} \right) \quad (10)$$

여기서 $F^M = \sigma' \left(1 - \frac{k_x^2}{k^2} \right)$ (TM impedance)

$$F^E = i\omega\mu \left(1 - \frac{k_x^2}{k^2} \right) \text{ (TE impedance)}$$

$$\zeta^M = i\omega\mu \text{ (TM admittance)}$$

$$\zeta^E = \sigma' \text{ (TE admittance)}$$

$$\xi = (k_x^2 - k^2)^{-1} = (F^M \zeta^M)^{-1} = (F^E \zeta^E)^{-1}$$

유한요소 방정식은 근사 전기장 E_N , 자기장 H_N 과 시험함수 v_N 을 요소의 기하학적 형상과 관련된 임의의 형상함수(shape function)를 사용하여 아래와 같이 정의함으로써 구해진다.

$$\begin{aligned} E_N(y, z) &= \sum_{j=1}^N E_{Nj}^e \Psi_j^e(y, z) \\ H_N(y, z) &= \sum_{j=1}^N H_{Nj}^e \Psi_j^e(y, z) \\ v_N &= \sum_{j=1}^N v_{Nj}^e \Psi_j^e(y, z) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 N_e : 요소의 절점수

Ψ_j^e : 요소의 형상함수

이때 형상함수는 완전조건(completeness)과 수렴조건(convergence criteria) 및 적합성(compatibility)을 만족해야 하며(임상진 외, 1985) 변분식에서의 시험함수는 전자기장을 나타내는 형상함수를 취하는 Galerkin법을 채택하였고 요소는 역산을 고려하여 선형 사각형요소를 채택하였다.

(11)식을 (9), (10)식에 대입하여 정리하면, 임의의 한 요소에 대한 유한요소 방정식을 다음과 같은 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{vmatrix} |S_{i,j}| & |T_{i,j}| \\ |W_{i,j}| & |V_{i,j}| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_i \\ E_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F^H \\ F^E \end{vmatrix} \quad (12)$$

여기서 S_{ij} , T_{ij} , W_{ij} , V_{ij} 는 한 요소에 대한 계수 행렬(coefficient matrix, stiffness matrix)로서 아래와 같이 표현된다.

$$S_{ij} = \int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{F^M} \left(\frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} \right) - \zeta^M \Psi_i^e \Psi_j^e \right) dydz \quad (13)$$

$$V_{ij} = \int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{F^E} \left(\frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} \right) - \zeta^E \Psi_i^e \Psi_j^e \right) dydz \quad (14)$$

$$T_{ij} = \int_{\Omega_e} ik_x \left(-\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \Psi_j^e + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial z} \Psi_j^e \right) dydz \quad (15)$$

$$W_{ij} = \int_{\Omega_e} ik_x \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \Psi_j^e - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial z} \Psi_j^e \right) dydz \quad (16)$$

모형반응계산 알고리즘에서 인위적인 경계면에서 발생하는 오차를 줄이고 보다 정확한 해의 계산을 위해서는 적절한 경계조건이 필요하다. 채택한 경계조건은 Unsworth 등(1993)이 적용하여 양호한 결과를 얻은 미분 경계조건과 무한거리에서의 이상체에 의한 전기장과 자기장이 0이 되는 조건을 혼합한 infinite element 경계조건이다. 한편, 2.5차원 전자기장 문제는 주향방향의 공간주파수 영역상에서 계산되었으므로 3차원 공간영역상으로 역푸리에 변환을 수행하여야 한다. 본 연구에서는 구간을 지수함수로 근사시켜서 신속한 적분을 수행할 수 있는 김정호(1987)의 알고리즘을 적용하였다.

선형적 물성변화를 고려한 요소 내 전기전도도 내삽함수

통상의 유한 요소법은 모델반응을 계산하고자 하는 영역을 요소로 분할하며, 요소 내에서의 물성은 일정한 것으로 가정한다. 그러나, 2.5차원 문제의 경우, 전기전도도의 공간에 대한 미분항을 포함하는 방정식을 풀어야 된다. Unsworth 등(1993)은 이러한 전기장과 자기장의 결합항을 제2의 전원항이라 간주하여 전기장과 자기장을 분리, 반복적 방법으로 처리하였다.

본 연구에서는 2.5차원 유한요소방정식의 정식화과정에서 불연속면을 포함하는 요소 내부에서는 물성이 선형적으로 변화할 수 있도록 확장하였다. 요소의 절점에 전기전도도가 주어지고 요소 내부에는 각 절점의 주변 물성값들의 선형 보간치로서 주어진다 고 본다면, 요소 각 절점의 전기전도도의 값에 대한 요소 내부의 전기전도도의 선형 내삽함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \sigma_i \phi_i = \sigma_1 \phi_1 + \sigma_2 \phi_2 + \sigma_3 \phi_3 + \sigma_4 \phi_4 \\ &= \sigma_1 \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} + \sigma_2 \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ &\quad + \sigma_3 \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} + \sigma_4 \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \end{aligned} \quad (17)$$

전기전도도 내삽함수는 유한요소방정식의 요소 내 전자기장을 나타내는 형상함수와 동일한 역할을 하며 실제로 선형 요소일 경우 이는 국부좌표계에서 정의된 선형 사각형 요소의 형상함수와 동등하다. 요소 내부의 전기전도도의 선형적 변화를 고려함으로써 2.5차원 유한요소방정식을 효과적으로 구할 수 있다. 매질 물성의 축선 및 심도방향의 변화율은 윗식을 각각 미분함으로써 구해진다.

반복적 비선형 역산

반복적 비선형 역산은 비선형관계를 가지는 모델변수와 모델 반응함수 사이의 관계를 선형화근사에 의하여 컨벌루션으로 표현될 수 있는 시스템으로 표현하고 측정값과 모델 반응

함수의 오차를 최소화하는 해를 반복적으로 구하는 형태를 취한다. 매 반복 단계에서 역해를 구하는 방법으로서 측정자료 벡터와 모델 반응함수 벡터의 자승오차를 최소로 하는 모델변수 변화벡터를 구하는 최소자승법을 생각할 수 있다. 그러나 물리탐사에서 역해는 유일하지 않으며, 매 반복단계에서의 자코비안을 계산할 때 최소자승법은 매우 불안정한 특성을 보인다. 또한 초기치에 매우 민감하여 부적절한 모델변수 벡터를 초기치로 채택할 경우, 해는 발산을 하게 된다 (Jackson, 1972; Lines *et al.*, 1984).

최소자승법의 불안정성을 극복하고 안정적인 결과를 얻기 위해 모델변수에 대한 여러 가지 제한조건(constraint condition)을 부가하는 것이 일반적이며 다음과 같은 평활화 연산자(regularization operator)를 정의하고,

$$R = W\delta \quad (18)$$

여기서, W : 제한조건을 표현하는 행렬 연산자.

δ : 모델변수 변화벡터.

다음과 같이 표현되는 목적함수를 정의하였을 때,

$$O = e'e + \lambda R'R \quad (19)$$

여기서 e : 측정자료와 이론치 사이의 오차.

λ : 라그랑지안 곱수.

윗 목적함수의 모델변수에 대한 미분이 최소값을 갖도록 하는 극치를 구하는 문제로 귀결되며 매 반복단계에서의 해는 다음과 같다.

$$\delta = (Z'Z + \lambda W'W)^{-1}Z'g \quad (20)$$

Z 는 미소 전기전도도 변화량에 대한 전자기장의 반응을 나타내는 자코비안 행렬이다. 라그랑지안 곱수로 연결된 제한조건을 나타내는 행렬 연산자의 정의에 따라 역해의 특성을 나타내게 되는데, 제한연산자 W 가 단위행렬이라면 통상의 감쇠 최소자승법에 해당하며 매 반복 단계시 구하는 해인 모델변수의 변화폭을 제한하여 해의 발산을 억제한다. 본 연구에서는 감쇠 최소자승법과 Constable 등(1987)이 제안한 모델변수의 축선방향 및 심도방향의 roughness를 최소화하는 방법을 채택하였다. 이는 지하구조의 인접한 물성변화량을 최소화시키는 제한조건을 의미하며 모델변수의 급격한 변화를 방지하고 부드럽게 변화하도록 작용하는 평활화 연산자의 하나이다. 이때의 매 반복단계시 구하는 모델변수 변화벡터는 다음과 같다(Zhou, 1989).

$$\delta = (Z'Z + \lambda_1 D_1' D_1 + \lambda_2 D_2' D_2)^{-1}Z'g \quad (21)$$

여기서 D_1 : 수평방향의 roughness를 나타내는 제한연산자.

D_2 : 수직방향의 roughness를 나타내는 제한연산자.

선형적 물성변화를 고려한 유한요소법의 블록 분할모형

통상적으로 역해를 구하기 위해서 이용하는 블록 분할모형

은 구하고자 하는 대상영역을 같은 물성치를 가지는 영역, 즉 블록으로 나누어 역산을 수행하는 방식을 취한다. 대상영역을 분할한 선형적인 모형을 그림 1-a의 모식도에 나타내었다.

반면, 본 연구의 2.5차원 전자기장 지배방정식에 의한 유한요소 방정식은 앞서의 식 (15)와 (16)에서 알 수 있듯이 요소 내부에서 전기전도도가 변화하는 특성을 가진다. 따라서 요소의 집합체인 블록 또한 블록 사이의 불연속은 허용될 수 없으며 결과적으로 통상적인 블록분할 방법으로는 역산의 매개변수로서의 블록을 효과적으로 정의할 수 없다.

블록간의 관계가 불연속이 아닌 선형적으로 변화해야 한다는 조건을 만족하는 블록모형 설정문제는 블록마다 선형적으로 변화하는 전이지대를 이루는 요소군을 설정함으로써 해결할 수 있다. 이에 의하면 2.5차원 블록 분할모형은 동일한 전기전도도 값을 가지는 요소의 집합체로 구성된 모델변수로서의 블록과 각 블록간 전기전도도를 선형적으로 변화하도록 역할을 하는 완충지대(transition zone)를 표현하는 요소군의 합으로서 표현되며 이의 모식도를 그림 1-b에 나타내었다.

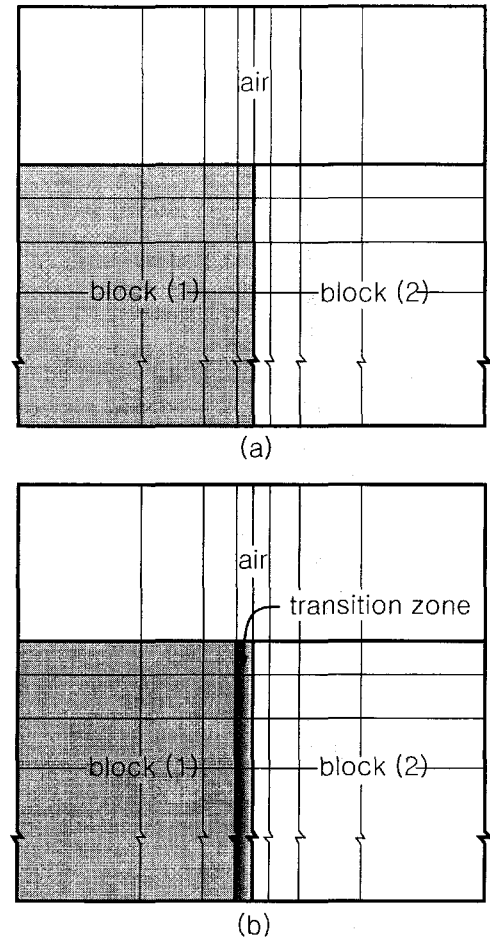


Fig. 1. A simple artificial model for 2.5-D inversion. (a) Conventional block model, (b) Modified block model used in this study.

균질 반 무한공간에서의 수치모델링 검증

전자탐사에서 근거리장은 균질 무한공간상에서 다음과 같이 정의되는 유도상수(West and Macnae, 1991)가 1 이하인 거리에서의 전자기장을 말한다.

$$|k|^{1/2} r: \text{induction number, } k^2 = -i\omega\mu\sigma$$

본 알고리즘은 송신원으로서 자기쌍극자를 포함하는 균질 반무한공간을 계산영역으로 설정하였으며 근거리장을 포함하는 총전자기장을 구하는 경우에 해당한다. 이 경우 균질 반무한공간에서의 수치해의 정확도를 결정하는 인자는 송신원 부근의 자기쌍극자에 의한 일차장이 지배적인 근거리장을 효과적으로 표현할 수 있는 요소의 개수 및 원거리장 영역에서의 요소의 개수, 그리고 각 영역마다 사용한 공간주파수의 개수 및 공간주파수의 상, 하한치로 요약할 수 있다. 수치 모델링시 역산을 고려하여 근거리장 영역내의 최소거리에서 총전자기장의 반응을 안정적으로 구할 수 있는 최적의 요소분할을 우선적으로 고찰하였다. 선택한 반 무한공간의 비저항은 100 Ωm, 주파수는 100 Hz이며 이 경우 근거리장에 포함되는 최대거리는 송신원에서 약 330m이다.

요소의 분할 - 근거리장 및 원거리장

쌍극자 송신원 중심으로 근거리장에 해당하는, 전자기장이 급격히 변화하는 영역에서 표피심도당 분할 요소의 수에 따른 수치해의 정확도를 살펴보았다. 그림 2는 표피심도당 요소의 개수 변화에 따른 자기장의 수직성분에 대하여 수치해와 이론치의 오차를 자료수로 구간평균한 결과를 나타낸 것이다. 여기서 선택한 영역은 송신원에 인접하여 해가 진동하는 근거리장과, 근거리장에 포함되나 요소의 조밀한 분할에 따라 안정적인 해를 구할 수 있는 50m에서 200m 구간이다.

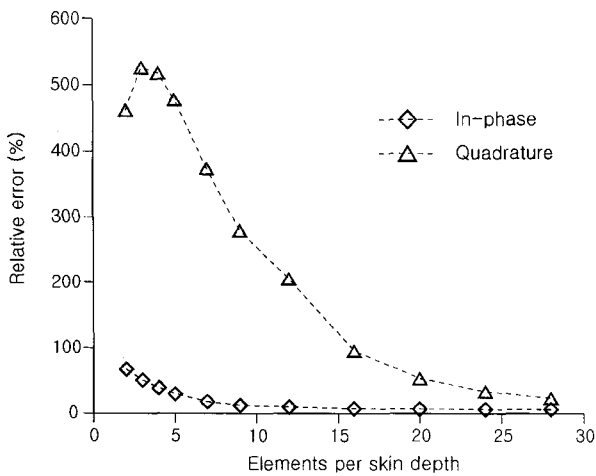


Fig. 2. Relative errors between numerical and analytic solution of vertical magnetic components as a function of mesh elements per skin depth. Error is averaged between 50 and 200m from the source considered as "Near Field".

표피심도당 요소의 수가 증가할수록 오차가 감소하는 것을 알 수 있으며 동상성분에 비해 이상성분의 감소폭이 큰 양상을 보인다. 일반적으로 근거리장 영역에서 균질 무한공간의 쌍극자장은 진공에서의 쌍극자장과 동일하며 동상성분만이 존재한다고 알려져 있다(West and Macnae, 1991). 근거리장 영역에서의 동상성분은 송신원에 의한 일차장을 나타내며 이상성분은 균질 반무한공간의 반응인 이차장을 의미한다. 따라서 대단히 작은 수치값을 가지는 이차장인 이상성분이 요소 분할에 큰 영향을 미친다. 근거리장에서 지배적인 동상성분은 대략 표피심도당 요소수가 7개 정도에서 안정적인 결과를 보이는 반면, 이상성분은 표피심도 당 요소의 수가 25개 이상이었을 때 안정적인 값으로 수렴하는 양상을 보인다. 수직자기장의 오차는 송신원에 인접하여 불안정하게 진동하는 영역을 구간에 포함시킨 까닭에 상대적으로 크게 나타난다.

근거리장을 나타내는 영역을 지나 거리가 멀어질수록 쌍극자원에 의한 일차장이 급속히 감소하고 균질 반무한공간의 반응이 지배적인 원거리장이 나타나게 된다. 원거리장을 포함하는 구간에서 표피심도당 요소의 개수에 따른, 수치해와 이론치의 자료수로 구간평균한 동상성분과 이상성분의 오차를 그림 3에 나타내었다. 택한 축선구간은 송신원으로부터 거리가 200m에서 500m 사이로서 표피심도가 330m에 비교하여 볼 때, 안정적인 수치해를 구할 수 있다고 판단되는 근거리장과 원거리장 영역을 포함하는 전이지대이다.

동상성분에 비해 이상성분이 표피심도당 요소 수에 따라 상대적으로 민감한 변화양상을 보이며 두성분 모두 공히 요소 수가 7개 이후 수치해가 안정적으로 수렴하는 양상을 보인다. Unsworth 등(1993)이 제시한 결과와 비교하여 보다 조밀한 요소 분할이 요구되는 이유는 송신원 및 근거리장을 포함하는 영역을 고찰대상으로 선택하였기 때문이며 동상성분보다는 이상성분이 원거리장의 요소의 분할 기준을 결정하게

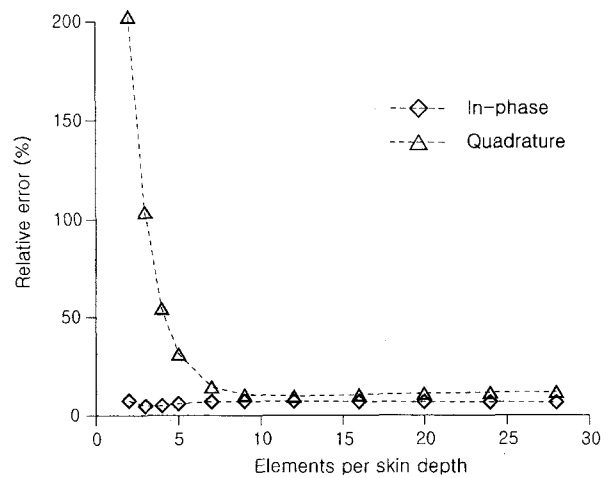


Fig. 3. Relative errors between numerical and analytic solution of vertical magnetic components as a function of mesh elements per skin depth. Error is averaged between 200 and 500m from the source considered as "Far Field".

된다. 이상의 검토를 거쳐 근거리장 영역에서는 요소의 수를 최대 50개로, 원거리장 영역에서는 요소의 수를 7개로 하여 모든 계산을 수행하였다.

공간주파수의 대역 및 공간주파수의 개수 - 근거리장 및 원거리장

2.5차원 전자기장은 주향방향 공간주파수 영역상에서 수치 계산을 수행하고 최종적으로 역 푸리에변환을 취함으로써 구해진다. 이 경우 구하고자 하는 수치해의 정확도를 좌우하는 인자는 사용하는 공간주파수의 개수, 상한 및 하한이며 정확도 검증을 위해 공간주파수 상, 하한을 각각 10^{-6} m^{-1} 에서 10^{-1} m^{-1} 로 잡고 전영역에 걸쳐 균일하게 25개의 공간주파수를 샘플링하여 구하였다.

그림 4는 송신원에서의 거리가 200m인 근거리장 영역의 공간주파수에 따른 균질 반무한공간에 대한 자기장의 수직성분을 도시한 결과이다. 동상성분 및 이상성분 모두 저주파수 영역에서 일정한 양상을 보이다가 $2 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 와 $2 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ 대역에서 급속한 변화를 하면서 0으로 수렴해 가는 형태를 가짐을 알 수 있다. 근거리장의 경우 대략 $5 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ 공간주파수로서 수렴하는 해를 얻는 데 충분하다. 그림 5는 원거리장 영역인 송신원에서 500m 떨어진 곳에서의 공간주파수에 따른 자기장의 수직성분을 나타낸 것이다. 전체적으로 근거리장에서의 양상과 동일하나 공간주파수 성분이 대략 $2 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ 로 상대적으로 낮은 공간주파수 값에서 수렴함을 알 수 있다.

본 연구에서는 공간주파수의 상한값을 근거리장을 고려하여 10^{-1} m^{-1} 로 하여 모든 계산을 수행하였다. 반면 공간주파수의 개수를 선택하는 것은 고찰한 바와 같이 전자기장의 변화양상이 공간주파수에 따라 다르므로 신중한 선택이 요구된다. 전자기장의 변화폭이 적은 저주파수 및 고주파수 대역에서는 적은 수의 공간주파수로 충분하나 그 이외의 대역에

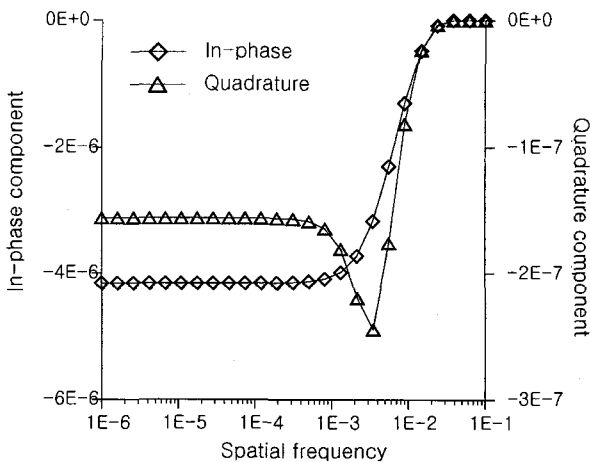


Fig. 4. In-phase and quadrature component of vertical magnetic component as a function of wave number. Receiver is located at 200m from the vertical magnetic dipole.

서는 보다 조밀한 샘플링이 필요하다. 일반적으로 공간주파수의 개수는 전자기장의 반응양상에 맞춰 적절히 샘플링 되었을 때 12개에서 16개 정도면 충분하다고 알려져 있다 (Stoyer et al., 1976; Unsworth et al., 1993). 적절한 공간주파수 개수를 결정하는 것은 매우 어려운 문제이며 통상 여러 가지 결과를 검토하여 경험적으로 결정하게 된다. 본 연구에서는 16개의 공간주파수를 선택하여 모든 계산을 수행하였다.

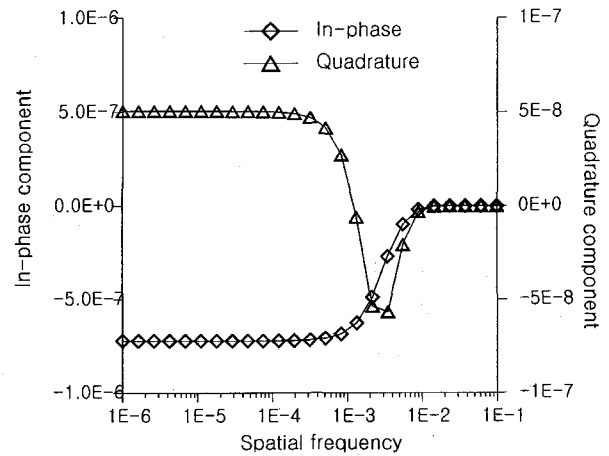


Fig. 5. In-phase and quadrature component of vertical magnetic component as a function of wave number. Receiver is located at 500m from the vertical magnetic dipole.

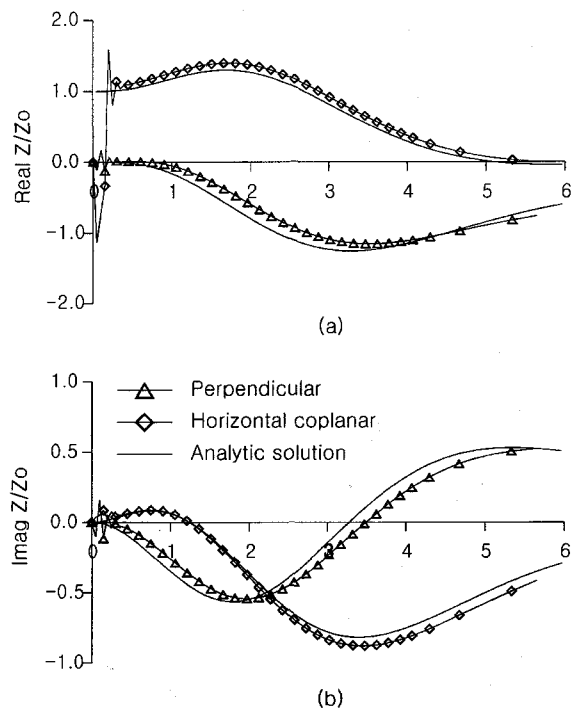


Fig. 6. Mutual impedance for two-loop over a homogeneous earth as a function of loop separation in skin depth. Used frequency is 100 Hz and homogeneous resistivity is 100 Ωm . (a) In-phase component, (b) Quadrature component

Mutual impedance - 이론치와의 비교

앞서 선정된 수치모델링 모형변수를 토대로 동일평면 (horizontal coplanar) 송수신 시스템 및 직교 루프(vertical coaxial) 송수신 시스템에서의 mutual impedance 반응곡선 (Nabighian, 1988)을 해석적인 해와 비교, 도시한 결과를 그림 6에 나타내었다. 사용한 주파수는 100 Hz이며 균질 반무한공간의 전기비저항은 100 Ωm이다.

동일평면 및 직교루프 송수신 시스템의 mutual impedance 수치해는 정확하게 일치하지는 않으나 전체적으로 이론해에 잘 부합됨을 알 수 있다. 또한 근거리장 영역 중 송신원에 인접한 거리에서는 수치적으로 불안정하여 반응곡선이 진동하는 바, 이를 자세히 살펴보기 위해서 그림 7에 일차장을 포함하는 수직자기장 성분의 절대치의 로그를 취한 값을 도시하였다. 일차장의 영향이 지배적인 송신원 부근에서 수치해가 급격히 진동하는 것을 볼 수 있으며 이상성분의 변화량이 동상성분에 비해 더 불안정한 양상을 나타낸다. 이를 수직선으로 표시하였는 바, 대략 표피심도의 1/3정도 위치이며 거리로는 170m 정도에 해당한다. 이는 근거리장으로 간주할 수 있는 최대거리가 330m 임을 고려해 볼 때, 근거리장의 절반 정도 이상의 거리에서는 충분히 안정적인 수치해를 구할 수 있음을 의미한다. slingram 등의 송수신 간격이 비교적 작은 탐사법에서는 안정적인 수치해의 확보는 중요하며 근거리장 영역에서의 표피심도당 요소의 수를 결정할 때에는 송수신 간격을 고려하여야 한다.

3차원 전자탐사 자료와의 비교

앞서 식 (15)와 (16)에 나타난 바와 같이 지하 매질의 물성이 다른 영역이 존재할 때 그 영역 경계면상 전후로 전기전도도의 선형적 변화를 가질 수 있도록 알고리즘을 구성하였다.

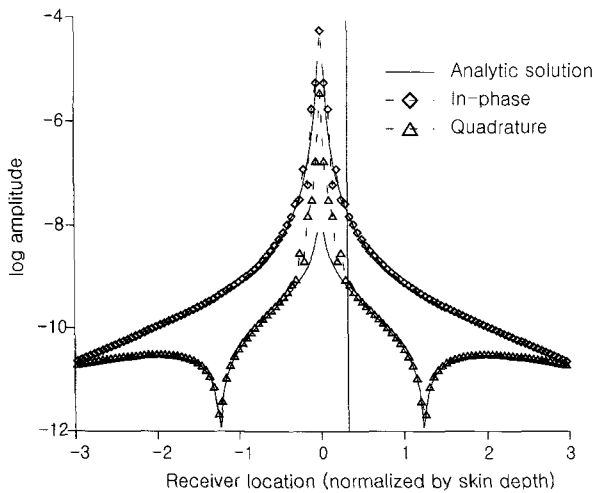


Fig. 7. Response of homogeneous half space model by vertical magnetic dipole source on homogeneous half space model. Used frequency is 100 Hz and homogeneous resistivity is 100 Ωm.

이러한 매질의 선형적 변화를 가지는 2.5차원 알고리즘에 의한 결과를 검토하고자 유한요소법과 적분방정식법을 병용한 혼성법(hybrid method)에 의한(Lee et al., 1981) 3차원 전도체에 의한 반응양상(그림 8)과 비교하여 보았다. 이때 주파수는 1000 Hz, 균질 반무한공간의 전기비저항은 30 Ωm이고 전도체의 전기비저항은 1 Ωm이며 전도체의 축선 방향과 심도방향의 길이는 30m와 90m, 주향 방향의 길이는 120m의 크기를 가진다. 송신원은 전도체 중심부에서 75m 떨어진 곳에 위치한 수직 자기쌍극자이다. 전도체 중심을 기준으로 -75m에서 200m 사이의 축선에서 전도체에 의한 이차 수직자기장 성분을 공기중에서의 수직 자기장으로 정규화한 자료를 도시한 것이다. 그림 9는 동일한 모델에 대하여 본 2.5차원 알고리즘에 의한 결과이다.

전도체 중심을 기준으로 좌측 축선의 반응양상은 거의 동일하나 오른쪽 축선에서는 전도체에서 멀어짐에 따라 Lee 등의 알고리즘에 비해 이상성분은 상대적으로 약간 큰 반응치를 보이고 동상성분은 낮은 값을 나타내는 점을 제외하면 두 성분 모두 전체적으로 동일한 양상을 보이고 있음을 알 수 있다. 이러한 전도체 주변에서의 두 반응치가 다른 것은 지하구조가 주향방향으로 일정한 2.5차원과 달리 3차원 알고리즘은 주향방향의 전도체 경계면에서 굽이쳐 돌아가는 유도전류 및 전하 집적에 의한 전류집중에 기인한 자기장이 존재하기 때문이다.

2차원 선전류원에 의한 전자탐사법의 경우, 이상체의 주향

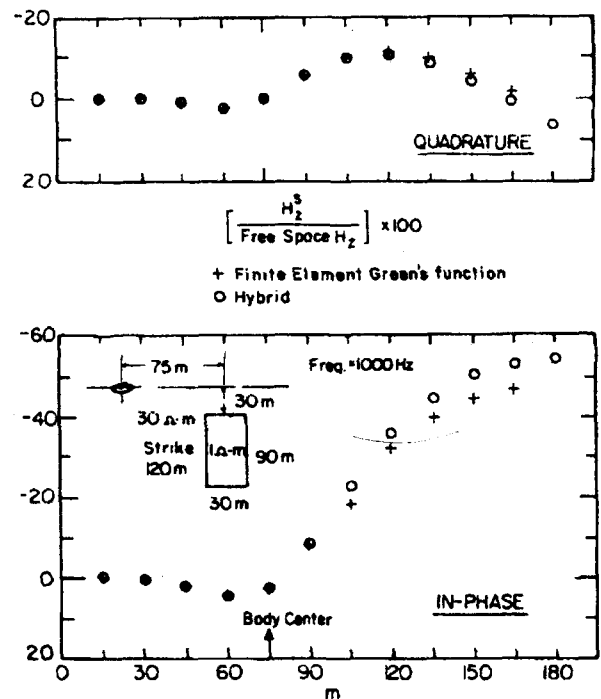


Fig. 8. Comparison of the normalized vertical magnetic field between the finite element solution and the hybrid solution for a conductive brick: Data plotted at the position of the receiver coil (Lee et al., 1981).

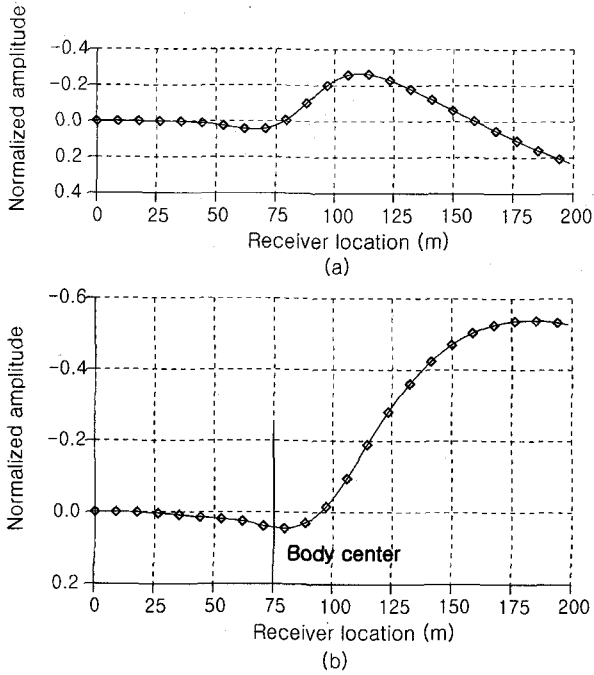


Fig. 9. Normalized vertical magnetic field for a conductive brick. Geometry is the same as Fig. 8, except strike extent approximation. (a) In-phase component, (b) Quadrature component

방향 연장이 폭에 비해 3배 이상이면 2차원 지하구조로 간주할 수 있다고 알려져 있다(Oristaglio and Worthington, 1980). 반면 송신원이 3차원인 경우, 대상영역을 2차원 이상체로 간주하는 2.5차원 가정을 만족하기 위해서는 이상체의 폭에 대한 주향방향의 연장정도가 2차원 가정에 비해 더 크게 요구되며 그림 8의 3차원 이상체의 주향방향 길이는 폭의 4배인 경우에 해당한다. 전도체의 2차원 가정을 만족하기 위한 기

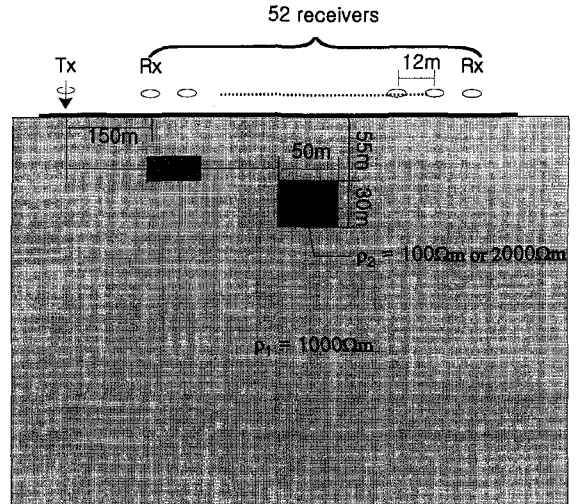


Fig. 10. Geometry of block model to verify the inversion result of an isolated body. Background resistivity is 1000 Ωm , resistivity of an isolated body is set to 100 Ωm , 200 Ωm respectively. Initial value for resistivity is 1000 Ωm .

준은 주향방향 연장에 대한 2.5차원 및 3차원 반응양상을 검토하여 결정하여야 하며, 3차원 전도체의 주향방향 연장이 길어질수록 2.5차원 가정에 접근하므로 2.5차원 결과에 점차 수렴하리라 생각된다.

고립형 이상체의 분해능

전자탐사 역산에서 고립형 이상체의 형태 및 전기전도도에 대한 분해 가능성을 살펴보기 위해 그림 10과 같이 배경매질의 전기비저항이 1000 Ωm 이고 이상체의 전기비저항은 100 Ωm 와 2000 Ωm 로 각각 저비저항과 고비저항 값을 가지는 경우의 영상단면을 구하여 보았다. 이상체에서 325m 떨어진 곳

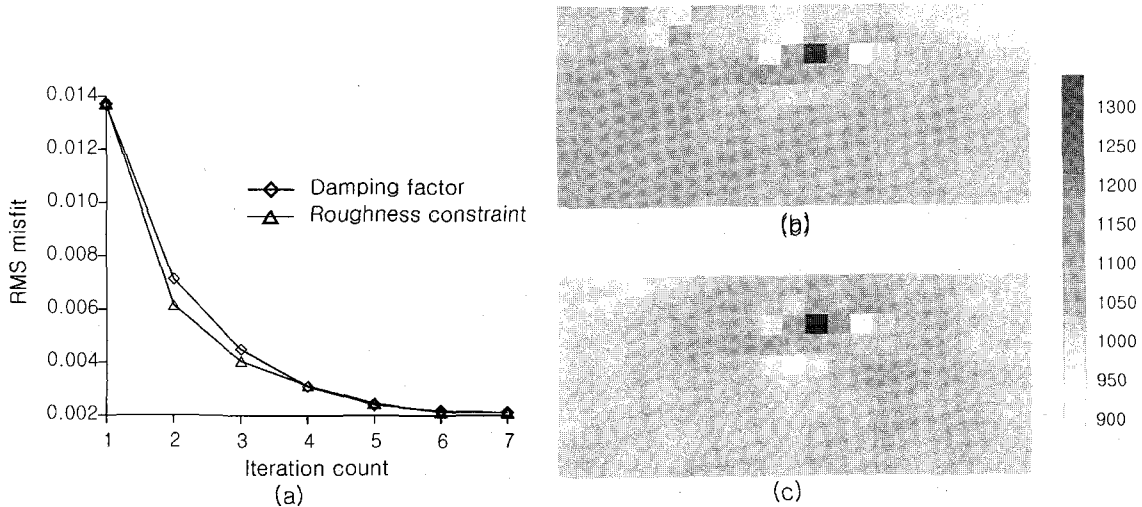


Fig. 11. RMS error curve and reconstructed images using two different constraint, damping and roughness for isolated body model. Resistive brick (2000 Ωm) is in the half space medium (1000 Ωm).

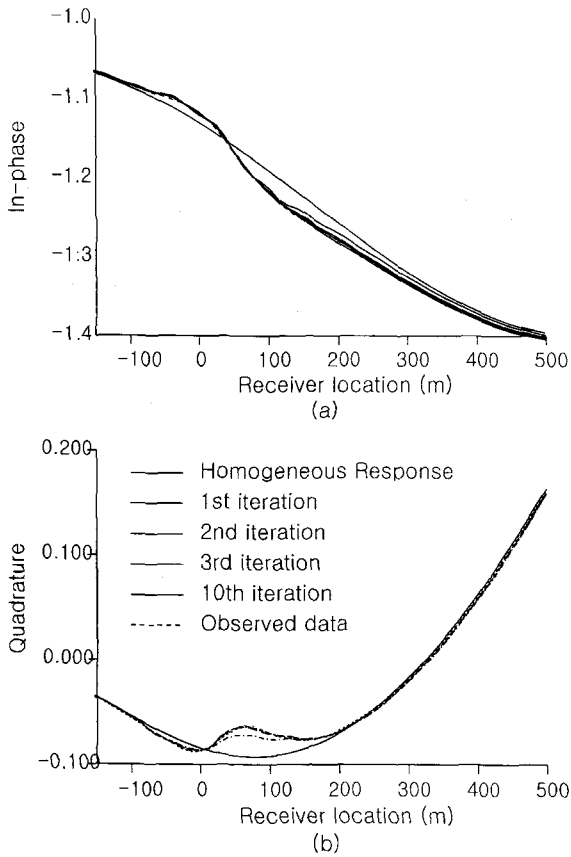


Fig. 12. Comparison of calculated field data with input data as iteration.
(a) In-phase component, (b) Quadrature component

에 단일 송신원이 위치하고 있다. 이로부터 150m 떨어진 위치에서부터 12m 간격으로 총 52개의 수신기를 위치시켰으며 역산자료로는 공기중의 쌍극자장으로 정규화시킨 수직자기

장 성분을 이용하였다. 역산에 있어서는 초기치를 $1000 \Omega\text{m}$ 로 주어 배경매질의 전기비저항을 알고 있다고 가정하고 고립형 이상체의 형태와 그 전기비저항의 참값을 어느 정도로 분해할 수 있는가를 알아보려고 하였다.

그림 11-a는 이상체의 전기비저항이 $2000 \Omega\text{m}$ 로서 고비저항을 가지는 모형에 대하여 감쇠최소자승법과 Occam 역해에 의한 결과를 나타낸 것이다. 두 방법 모두 RMS 오차가 빠르게 감소하기 시작하여 대략 6회의 반복에서 원하고자 하는 오차 범위내로 수렴함을 알 수 있다. 반면 그림 11-b의 영상 단면을 보면 이상체의 정확한 위치 및 형태는 정확히 파악할 수 있으나 그 값을 살펴보면 대략 $1300 \Omega\text{m}$ 로서 원래의 값과는 상당한 차이가 있음을 알 수 있다. 전도체내에서의 자기장의 반응은 분산거동을 나타내는 바, 이에 의한 역해는 이상체의 전기전도도 변화에 대응하는 자기장 변화폭이 둔감하고 또 완만한 형태를 띠기 때문이다. 이를 확인하고자 매 반복단계에서 구한 전기전도도 분포에 대한 자기장을, 초기 조건 때의 자기장과 전기전도도가 참값일 때의 자기장을 포함하여, 공기중의 수직 자기장으로 정규화시킨 결과를 그림 12에 나타내었다. 동상성분보다는 이상성분이 이상체에 대한 정보를 보다 크게 나타내고 있으며 대략 3회의 반복단계에서 구한 전기전도도 분포에 대한 자기장 반응양상은 이미 원래의 전기전도도를 가졌을 때의 반응양상과 거의 흡사한 결과를 내고 있음을 알 수 있다. 이는 배경매질에 대한 정보를 알고 있다 해도 고립 이상체의 형태에 대한 파악은 가능하나 전기전도도에 대한 정확한 값에 대한 추정은 매우 어려움을 시사한다.

그림 13-a는 동일한 구조를 가지는 모형에 대하여 고립형 이상체의 전기전도도가 $100 \Omega\text{m}$ 로서 저비저항 값을 가지는 이상체에 대하여 배경매질의 전기전도도를 알고 있다고 보았을 때의 오차곡선과 영상단면을 나타낸 것이다. 앞서의 경우

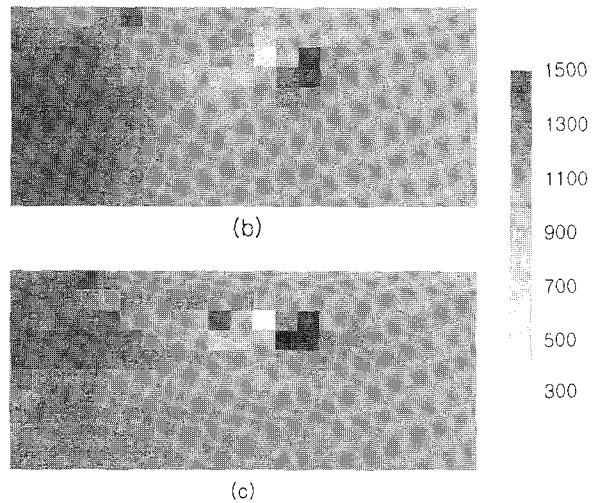
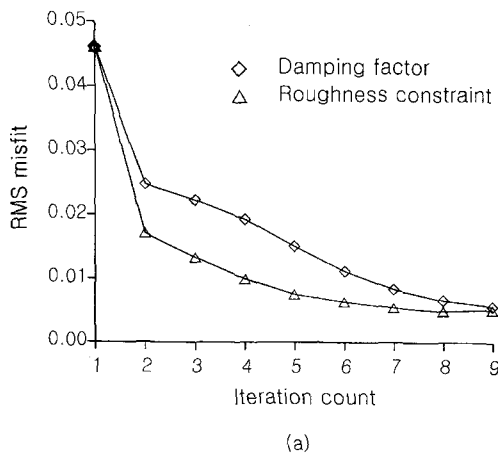


Fig. 13. RMS error curve and reconstructed images using two different constraint, damping and roughness for isolated body model. Conductive brick ($100 \Omega\text{m}$) is in the half space medium ($100 \Omega\text{m}$).
(a) RMS error curve, (b) Image obtained by DLSO, (c) Image obtained by smoothness constraint.

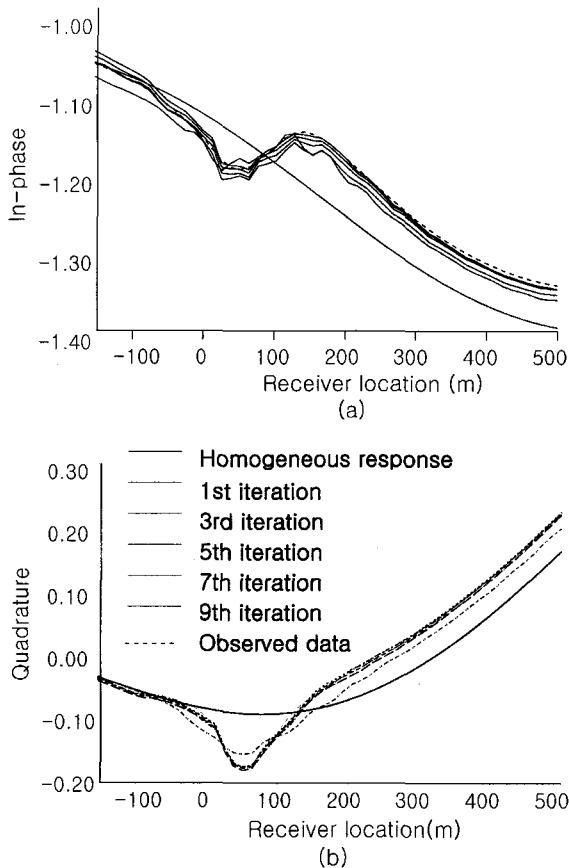


Fig. 14. Comparison of calculated field data with input data as iteration.

(a) In-phase component, (b) Quadrature component

와 유사하게 오차가 빠르게 감소함을 알 수 있으며 9회의 반복계산에서 원하고자 하는 오차범위 내로 수렴하는 결과를 얻었다. 또한 그림 13-b를 살펴보면 고립형 이상체의 형태를 잘 보여주고 있음을 알 수 있다. 이상체 축선방향 좌우로 고비저항 값을 가지는 이상체가 존재하는 것처럼 보이는 이유는 그림 10에서와 같은 단일 송신원에 의한 지표 다중 수신원 배열의 커버리지에 의해 결과로 생각된다. 고비저항 이상체의 경우와 마찬가지로 9번째의 반복단계에서 고립형 대상체의 전기비저항이 대략 $270 \Omega\text{m}$ 로서 고비저항 이상체보다는 상대적으로 참값에 근접하게 수렴함을 알 수 있다. 이는 전기전도도가 높은 이상체 탐지를 위한 전자탐사법의 특징을 말해준다 할 수 있으나 참값과 아직도 상당한 차이를 보이고 있다. 매 반복단계에서 구한 자기장을 초기조건 및 참 전기비저항에 의한 이론치와 동시에 도시한 그림 14를 살펴보면 동상성분이나 이상성분 모두 앞의 경우와 비교하여 이상체에 대한 정보를 포함하고 있음을 알 수 있고 보다 나은 역해를 얻을 수 있을 것으로 기대되나, 역시 대략 3회의 반복단계에서 구한 수직자기장 거동양상이 이미 원래의 해에 거의 근사함을 보이고 있으므로 이상체의 형태 파악은 가능하나 정확한 전기전도도에 대한 정확한 정보는 구하기는 고정 송신기

자료만으로는 사실상 불가능함을 의미한다.

결론

본 연구는 전자탐사 자료로부터 지하구조의 영상단면을 도출하는 수치모델링 및 역해를 포함하는 일관적인 알고리즘을 제시하였다. 2.5차원 수치모델링 알고리즘을 유한요소법을 이용하여 구현하고 모델변수에 대한 반응양상을 검토, 고찰하여 타당성을 검증하였고, 지표 전자탐사자료의 분해능을 고찰하고자 고립형 이상체에 대한 영상 해석단면을 구하였다.

1. 3차원 수직 자기쌍극자원을 가정한 2차원 모형반응 계산 알고리즘, 즉 2.5차원 모델링 알고리즘을 유한요소법을 이용하여 구현하였다. 결합된 맥스웰 미분방정식을 유한요소방정식으로 정식화할 때 선형적 물성변화를 고려하는 유한요소 알고리즘을 도출, 제시하였다.

2. 송신원의 영향이 큰 근거리장과 균질 반무한공간의 반응이 지배적인 원거리장 각각에 대한 모델변수를 검토하였다. 근거리장 영역에서의 전자기장을 정확히 구하기 위해서는 표피심도당 요소의 수는 적어도 25개는 필요한 반면, 원거리장 영역은 약 7개의 요소수로 원하고자 하는 결과를 얻을 수 있었다. 수치계산에 필요한 공간주파수는 16개를 사용하여 원하는 결과를 얻을 수 있었으며 전자기장의 거동이 공간 주파수에 따라 다르므로 공간주파수 샘플링에 있어서 신중한 선택이 필요하다. 또한 3차원 모형에 대한 결과와 비교하여 본 결과, 이상체의 폭에 대한 주향방향 연장 비가 2차원 가정보다 더 크게 요구됨을 알 수 있었다.

3. 역산모형으로서 본 연구에서 제시한 수치 모형반응 계산에 적합하도록 수정한 변형된 블록 매개변수모형을 고안하여 고립형 이상체에 대한 분해능을 살펴봄으로써 분산방정식으로 표현되는 전자탐사 자료의 역해의 가능성 및 한계를 고찰하였다. 고비저항 이상체에 대해서는 원래의 전기비저항 값보다 낮은 값을, 저비저항의 경우에는 실제보다 높은 전기비저항 값을 보여주었다. 이는 근본적으로 준정적 근사하에서 전기전도도의 변화폭에 대한 전자기장의 변화정도가 미미한 분산방정식의 한계이며 비록 배경매질의 전기전도도에 대한 정보를 알고 있다고 하여도 고립형 이상체의 전기전도도에 대한 정확한 값은 구할 수 없음을 확인하였다.

본 연구는 지표 쌍극자 송신원에 의한 수치모델링 및 역해를 포함하는 일관적인 알고리즘을 구성하여 최종적으로 해석자료로서 지하구조의 영상단면을 제시하고자 하는 목적을 가지고 있다. 따라서 본 연구에서 미흡했던, 실제 현장자료에 대한 충분한 자료처리 및 검토과정이 향후 보완되어야 할 중요한 과제이며, 시추공간 전자탐사에도 응용이 가능하므로 최근 연구가 활발한 전자탐사 토모그래피 분야에도 2.5차원 수치모델링 알고리즘이 유용하게 사용되리라 기대된다.

참고문헌

1. 김정호, 1987, 2차원 전기비저항 탐사 자료의 역산: 공학박사 학위논문, 서울대학교.
2. 임상진 외, 1985, 유한요소법 입문: 동명사.
3. Beamish, D., 1994, Two-dimensional regularized inversion of field data: *J. Appl. Geophys.*, v. 32, p. 357-374.
4. Constable, S. C., Parker, R. L. and Constable, C. G., 1987, Occam's inversion: a practical algorithm for generating smooth models from EM sounding data: *Geophysics*, v. 92, p. 289-300.
5. Jackson, D. D., 1972, Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data: *Geophy. J. Roy. Astr. Soc.*, v. 28, p. 97-109.
6. Jupp, D. L. B. and Vozoff, K., 1974, Stable iterative method for the inversion of geophysical data: *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, v. 42, p.957-976.
7. Lee, K. H., Pridmore, D. H. and Morrison, H. F., 1981, A hybrid three-dimensional electromagnetic modeling scheme: *Geophysics*, v. 46, p. 796-805.
8. Lee, K. H., 1978, Electromagnetic scattering by two-dimensional inhomogeneities: *Proc. Workshop on modeling of electric and electromagnetic methods*, Lawrence Berkeley Laboratory, Berkeley, Ca., p. 20-26.
9. Lines, L. R. and Treitel, S., 1984, Tutorial - A reiview of least-squares inversion and its application to geophysical data: *Geophys. Prosp.*, v. 32, p.159-186.
10. Nabighian, M. N., 1988, *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics - Theory*: Society of Exploration Geophysicists.
11. Oristaglio, M. L. and Worthington, M. H., 1980, Inversion of surface and borehole electromagnetic data for two-dimensional electrical conductivity models: *Geophys. Prosp.*, v. 28, p. 633-657.
12. Stodt, J., 1978, Application of the finite element method to the finite source 2-D earth EM problems: *Proc. Workshop on modeling of electric and electromagnetic methods*, Lawrence Berkeley Laboratory, Berkeley, Ca., p.8-19.
13. Stoyer, C. H. and Greenfield, R. J., 1976, Numerical solution of the response of a two dimensional earth to an oscillating magnetic dipole source: *Geophysics*, v. 41, p. 519-530.
14. Swift, C. J., 1971, Theoretical magnetotelluric and Turam response from two-dimensional inhomogeneities: *Geophysics*, v. 36, p.38-52.
15. Unsworth, M. J., Travis, B. J. and Chave, A. D., 1993, Electromagnetic induction by a finite electric dipole source over a 2-D earth: *Geophysics*, v. 58, p. 198-214.
16. West, G. F. and Macnae, J. C., 1991, *Physics of the electromagnetic induction exploration method*: *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, v. 2, Part A, p. 19-21.
17. Zhou, Q., 1989, Audio frequency electromagnetic tomography for reservoir evaluation: Ph.D. Thesis, University of California.