

영상의 변환 Image Transform

이 정 한
삼성종합기술원

1. 영상변환의 개요

..... 공학분야에서 일반적으로 다루는 함수는 연속적인 시간함수 또는 공간함수이다. 시간함수는 시간(t)에 따른 전압 전류 변화가 대표적이고, $g(t)$ 로 표기할 수 있으며 대부분 1차원 함수이다. 공간함수는 평면 위에 조사된 빛의 강도분포, TV 화면 위의 화상의 밝기분포 등이 있으며, 2개의 공간좌표축을 x 와 y 라고 하면 $g(x, y)$ 로 표기할 수 있다. $g(x, y)$ 에 시간변화를 추가하면 $g(x, y, t)$ 가 되어 3차원함수가 되지만 시간축으로는 2차원함수 $g(x, y)$ 의 배열로 다룰 수 있으므로 대부분의 경우 2차원함수로 취급이 가능하다.

의료영상은 X-선 영상, 초음파 영상, CT 영상, MRI 영상 등 다양한 영상 장비로부터 얻어지는데 대부분은 환부의 정지영상의 배열로 취급이 가능하다.

영상의 변환은 영상의 특성측정이나 영상분석, 영상 압축 등을 하기 위해 사용한다.

영상변환은 순변환(Transform)과 역변환(Inverse Transform)이 모두 가능해야 한다. 한 영상에 순변환과 역변환을 순차적으로 적용하면 원래의 영상으로 복구되어야 한다. 특히 의료영상은 이 과정에서 영상정보의 손실이 없어야 한다. 영상의 변환은 표본화(sampling)

과정을 거쳐 이산신호(Discrete Signal 또는 Digital Signal)로 바꾸어 Computer에서 수행을 한다.

다양한 영상변환 방법이 있지만 Fourier 변환이 가장 많이 쓰인다. Fourier 변환을 많이 쓰는 큰 이유는 FFT(Fast Fourier Transform) Alorithm을 사용하면 Computer를 사용하여 정확하고 빠른 연산이 가능하기 때문이다. Fourier 변환은 복소연산을 수행해야 한다.

실시간 연산이 필요한 경우에는 Fourier 변환보다 더 빠른 연산이 가능한 영상변환을 사용하기도 한다.

2. Fourier 전개 (Fourier Series)

어떤 함수 $g(t)$ 가 주기 T 인 주기함수라면 $g(t) = g(t$

+ T)이고, 이 함수는 다음과 같이 삼각함수 수열의 합으로 변환할 수 있다.

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + a_n \sin(2\pi n f_0 t)]$$

여기서, $t_0 < t \leq t_0 + T$

$$f_0 = 1/T$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

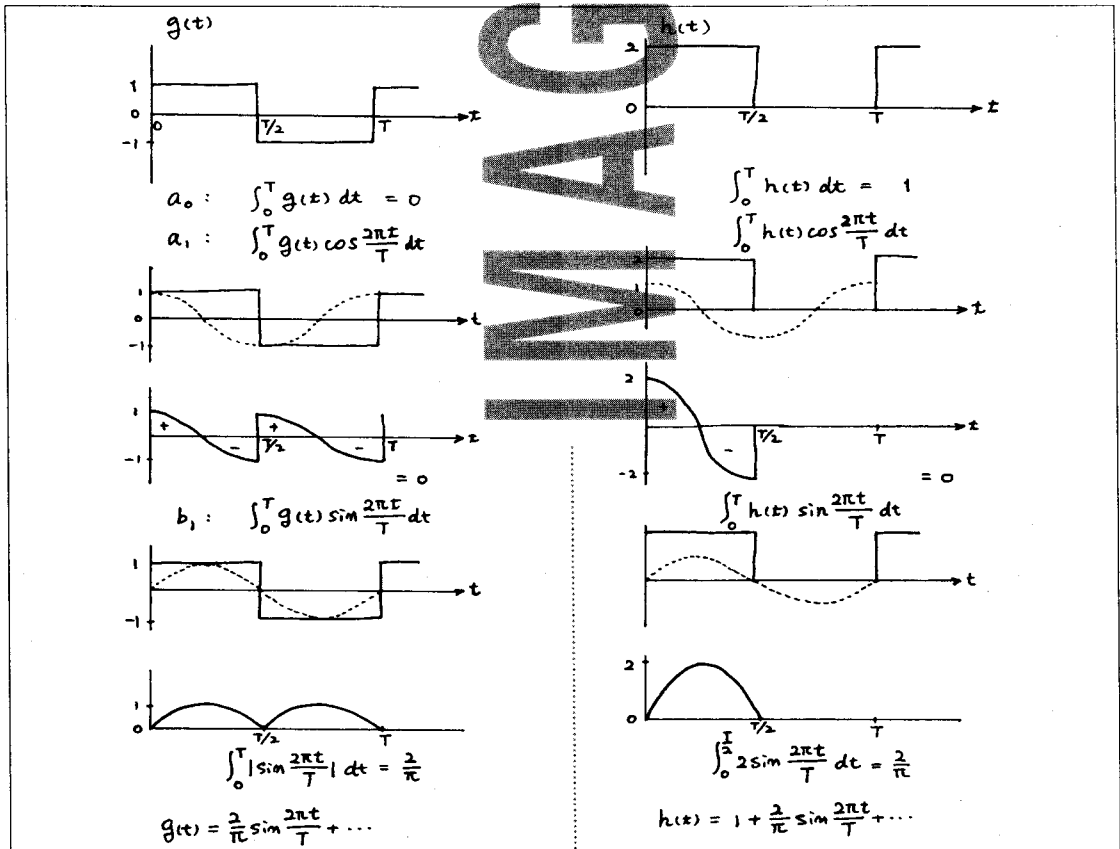


Fig 1. Fourier 전개의 예

3. Fourier 변환

Fourier 전개식에 Euler의 식 $\exp(2n0t) = \cos(2n0t) + i\sin(2n0t)$ 을 대입하여 정리하면 다음식이 된다.

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i2\pi n f_0 t)$$

여기서

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) \exp(-i2\pi n f_0 t) dt.$$

비주기함수 또는 주기가 무한히 긴 시간함수 $g(t)$ 와 1차원 공간함수 $g(x)$ 의 Fourier 변환 $G(f)$ 와 $G(u)$ 는 다음식으로 구한다.

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i2\pi f t) dt = F[g(t)]$$

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-i2\pi u x) dx = F[g(x)]$$

여기서 f 와 u 는 주파수(frequency)와 공간주파수(spatial frequency)이고, Fourier 전개에서 nf_0 에 대응한다. 역 Fourier 변환은 다음식이 된다.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(i2\pi f t) df = F^{-1}[G(f)]$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \exp(i2\pi u x) du = F^{-1}[G(u)]$$

Fourier 변환과 역 Fourier 변환을 Fourier 변환쌍이라고 한다. 일반적으로 $g(t)$ 또는 $g(x)$ 는 연속적인 실함수(real function)이고, 이것들의 Fourier 변환은 복소함수(complex)가 된다. 다음부터 공간함수를 사용하여 설명을 하겠다.

실함수 $g(x)$ 의 Fourier 변환 $G(u)$ 은 복소함수이므로 실수부(real part) $R(u)$ 와 허수(imaginary part) $I(u)$ 로 나누어진다.

$$G(u) = R(u) + iI(u)$$

다음과 같이 극좌표(polar)형으로 표기할 수 있다.

$$G(u) = |G(u)| \exp[i\phi(u)]$$

여기서 $\phi(u) = \arctan[I(u)/R(u)]$ 이다.

● Fourier 변환쌍

$g(t)$	$G(f)$
$ag_1(t) + bg_2(t)$	$aG_1(f) + bG_2(f)$
$d^n g(t)/dt^n$	$(i2\pi f)^n G(f)$
$\int g(t) dt$	$G(f)/i2\pi f$
$g(t-a)$	$\exp(-i2\pi f a)G(f)$
$\exp(i2\pi f_0 t)g(t)$	$G(f-f_0)$
$g(at)$	$G(f/a)/a$

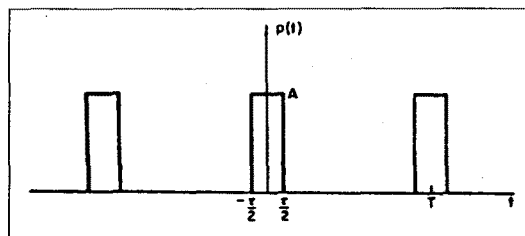


Fig 2. Periodic pulse train of Ex. 1.

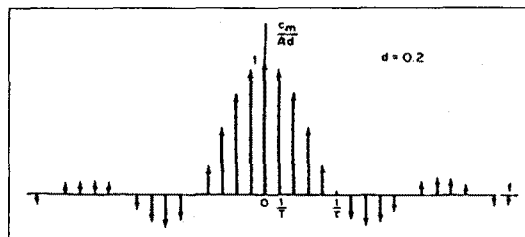


Fig 3. Amplitude spectrum of periodic pulse train of Ex. 3-1 with $d=0.2$.

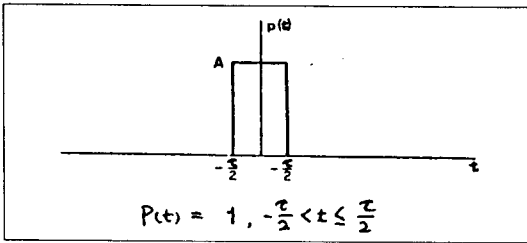


Fig 4. Nonperiodic pulse of Ex. 2

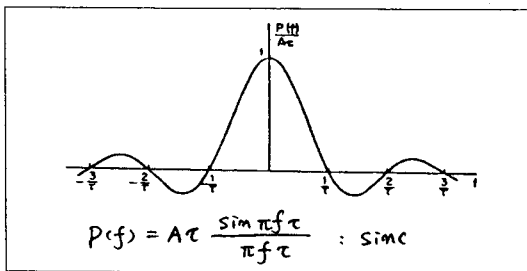


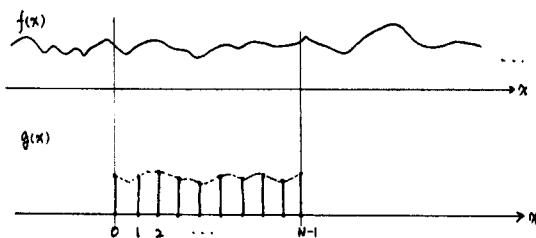
Fig 5. Amplitude spectrum of nonperiodic pulse of Ex. 2

4. 이산 Fourier 변환

주기가 무한히 긴 함수의 Fourier 변환을 Computer로 계산하는 것은 곤란하므로 이 함수(또는 신호)를 특정기간동안 표본화하여 사용한다. 다음 그림과 같이 임의의 함수 $f(x)$ 를 표본화 개수 N 으로 표본화 한 함수를 $g(x)$ 라 하면 다음과 같다.

$$g(x) = f(x), x=0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$= 0, \text{ 그외 범위.}$$



(일반적으로 표본화한 함수 $g(x)$ 는 변수를 표본화 개수 n 으로 바꾸어 $g(n)$ 으로 표기한다)

표본화한 함수 $g(x)$ 의 Fourier 변환은 연속함수가 아니므로 적분이 Σ 로 바뀐 이산 Fourier 변환(DFT : Discrete Fourier Transform)이 된다.

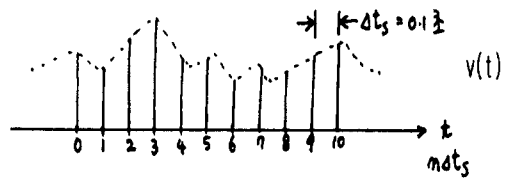
$$G(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} g(x) \exp(-i2\pi ux / N)$$

$$g(x) = \sum_{u=0}^{N-1} G(u) \exp(i2\pi ux / N)$$

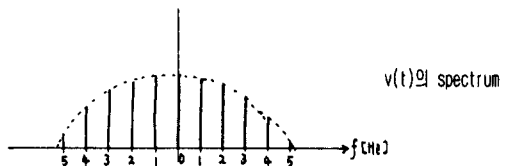
이 경우에도 실함수 $g(x)$ 의 Fourier 변환 $G(u)$ 는 복수함수가 된다.

* 이산 Fourier 변환의 예

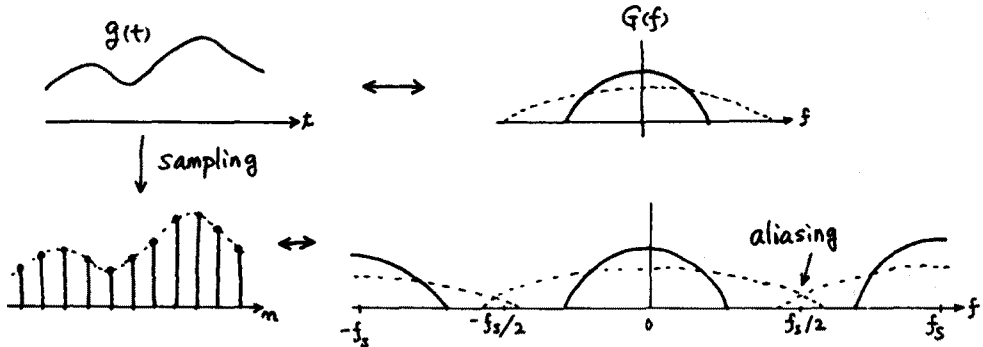
마이크로폰의 출력신호 $v(t)$ 를 1초동안 균등한 간격으로 11개 표본화($N=11$) 한 신호를 $g(n)$ 라 하자. 이때 표본값 사이의 시간 간격 t_s 는 1초/($N-1$)이므로 0.1초이다. 따라서 표본화 주파수(sampling frequency) f_s 는 $1/t_s$ 이므로 10Hz이다.



$g(n)$ 에서 추출할 수 있는 주파수 성분은 DC, 1Hz, 2Hz, 3Hz, 4Hz, 5Hz 이다.



따라서 표본화를 할 때 주파수 분해능(frequency resolution)은 표본화 구간의 폭으로 정해지고(즉, 주파



수분해능 = 1/표본화구간의 폭), 표본화된 함수가 의미를 갖는 주파수 대역폭은 표본화 주파수의 1/2가 된다. 이 $f_s/2$ 를 Nyquist 주파수라고 한다. 표본화 할 함수가 Nyquist 주파수보다 높은 주파수 성분을 포함하고 있으면 aliasing이라는 현상이 발생한다.

연속함수를 표본화하면 표본화한 함수의 주파수 성분(즉, spectrum)은 연속함수의 주파수 성분이 표본화 주파수 간격으로 연속하여 나타난다.

즉, 연속함수의 주파수 대역폭(frequency bandwidth)이 Nyquist 주파수보다 넓으면 위 그림과 같이 표본화한 함수에서는 주파수성분의 겹쳐짐(alising)이 발생하여 원래의 함수를 왜곡시킨다. 이 현상을 없애기 위해 표본화 전에 연속신호의 주파수 대역폭을 Nyquist 주파수 이하로 제한을 해야만 된다. 이 때 사용하는 저역통과 여파기(LPF: Low Pass Filter)를 anti-aliasing filter라 한다.

5. 2차원 Fourier 변환

영상은 2차원 또는 3차원 함수로 다루어야 하는데 대부분 2차원 함수로 취급할 수 있다. 2차원 영상 함수를 $f(x, y)$ 라 하자. 예를 들면 $f(x, y)$ 는 2차원 평면위의 점(X, Y)에 조사되는 빛의 세기이다. $f(x, y)$ 의 Fourier 변환은 다음식이 된다.

$$F(u, v) = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) \exp(-i2\pi ux / N) \exp(-i2\pi vy / M)$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

$$y = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

2차원 Fourier 변환은 1차원 Fourier 변환을 \times 방향과 y 를 나누어 각각 실행하면 된다. 위의 2차원 Fourier 변환을 할 때 계산량은 $N^2 + M^2$ 번의 복소수 곱셈과 $N(N-1) + M(M-1)$ (약 $N^2 + M^2$)번의 복소수 덧셈을 실행해야 한다. 이 계산량은 특히 영상의 실시간처리를 하는 경우에는 computer의 계산속도가 크게 향상된 현재도 과도한 값이다. 이 계산량을 줄이는 Fourier 변환 Algorithm이 FFT(Fast Fourier Transform)이다. FFT를 사용하면 $(N \log 2N) + (M \log 2M)$ 번의 복소수 곱셈과 덧셈으로 Fourier 변환이 된다. 영상의 Matrix가 $N \times M$ 일 경우 DFT와 FFT의 계산 시간비는 $N^2 / N \log 2N$ 이다. FFT를 하기 위해서는 표본화간격이 균등해야 한다.

• 비교

Pixel 개수가 256×256 인 2차원 영상을 Fourier 변환할 때 DFT와 FFT의 계산량 비교

$$DFT \text{ 계산} / FFT \text{ 계산} = 256^2 / 256 \log 256 = 65536 / 2048 = 32$$

Pixel 개수가 1024×1024 인 2차원 영상을 Fourier 변환할 때 DFT 와 FFT 의 계산량 비교

$$\begin{aligned} \text{DFT 계산/FFT 계산} &= 1024^2/1024 \log_2 1024 = 1048576-10240 \\ &= 1024 \end{aligned}$$

즉 FFT가 256×256 영상은 32배, 1024×1024 영상은 102.4배 빠르게 Fourier 변환을 수행한다.

```

*FORTRAN FFT SUBROUTINE
      SUBROUTINE FFT(F, LN)
COMPLEX F(1024), U, W, T, CMLPX
PI = 3.14159265
N = 2**LN
NV2 = N/2
NM1 = N-1
J=1
DO 3 N=1, NM1
      IF(1. GE. J) GOTO 1
      T=F(J)
      F(J)=F(I)
      F(I)=T
      K=NV2
      IF(K. GE. J) GOTO 3
      J=J-K
      K=K/2
      GOTO 2
      J=J+K
DO 5 L=1, LN
      LE=2**L
      LE1=LE/2
      U=(1. 0. 0. 0)
      W=CMLPX(COS(PI/LE1),
              -SIN(PI/LE1))

```

```

DO 5 J=1, LE1
      DO 4 I=J,N,LE
          IP=I+LE1
          T=F(IP)*U
          F(IP)=F(I)-T
          F(I)=F(I)+T
      U=U*W
DO 6 I=1,MN
      F(I)=F(I)/FLOAT(N)
RETURN
END

```

6. Fourier 변환의 특성

영상의 Fourier 변환은 2차원 공간주파수 공간 각 점에 복소함수로 나타난다. 복소함수는 실수부와 허수부 또는 크기(magnitude)와 위상각(phase)으로 표기할 수 있는데 이것을 정확하게 가시화(display) 할 수 없다. 일반적으로 magnitude를 display 한다. 또는 magnitude의 제곱을 display 하기도 하며, 이것을 power spectrum이라 한다.

Figs 6, 7, 8 : 구형파(rectangular wave or step function)와 선형증가(ramp) 함수의 한 주기에 대한 주파수 성분의 합성. 많은 주파수 성분을 사용하여 합성(즉, 재구성)할수록 원파형과 근사해진다.

Figs 9 : 구형파와 선형증가 함수의 25개 주파수 항의 크기(magnitude). 구형파는 홀수(odd)항 만 존재함. (원점대칭인 함수의 spectrum은 홀수항만 있음.)

Fig 10 : Fourier 변환의 가역성 또는 Duality
 $g(x) \longleftrightarrow G(u)$

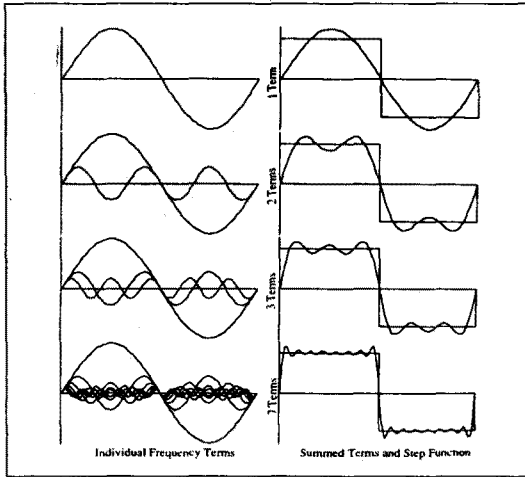


Fig 6. Summation of Fourier frequency terms to fit a simple step function.

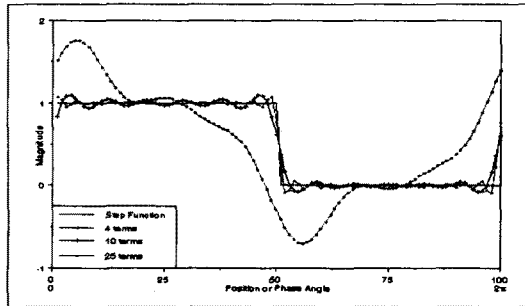


Fig 7. Match between a step function and the first 4, 10, and 25 Fourier terms.

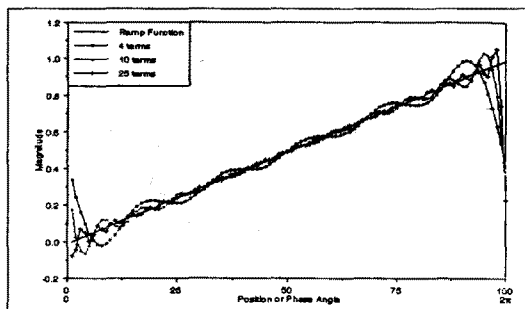


Fig 8. Match between a ramp function and the first 4, 10, and 25 Fourier terms.

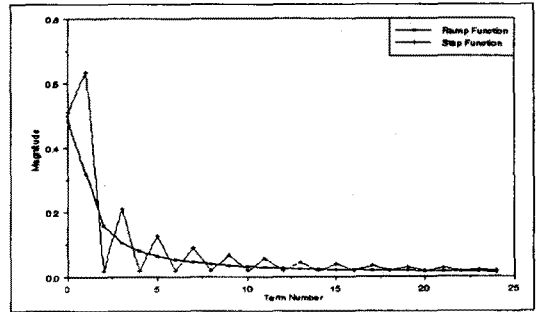


Fig 9. Magnitude of the first 25 Fourier terms fit to the step and ramp in Figures 2 and 3.

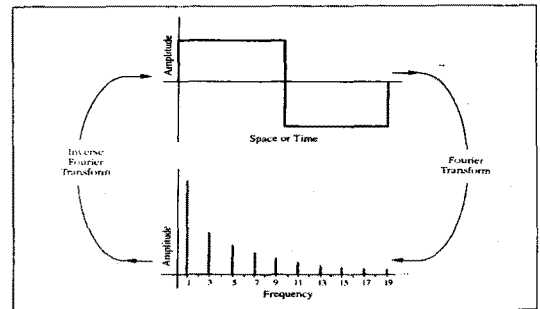


Fig 10. Role of the forward and inverse transform and the spatial and frequency domain representations of a step function

저주파성분 : 원 함수의 전체적인 형태를 결정한다.
 고주파성분 : 원 함수의 상세부(edge 등)를 결정한다.

⇒ 넓은 주파수 대역을 취할수록 원 함수를 정확하게 표현한다

● 2차원 함수의 Fourier 변환

Fig 11 : x축 방향으로 계단(step) 함수이고, y축 방향으로는 변화가 없는 2차원 함수의 Fourier 변환, y축 방향의 공간주파수 성분은 $v=0$ 에서만 값이 존재하고, x축의 공간주파수 성분은 u축 방향으로 sinc함수가 나타난다.

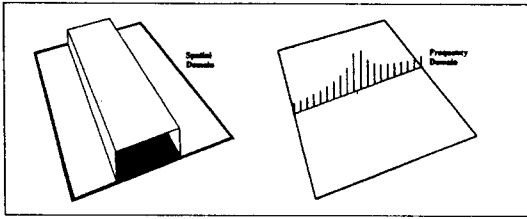


Fig 11. Two-dimensional presentation of a step function and its frequency transform.

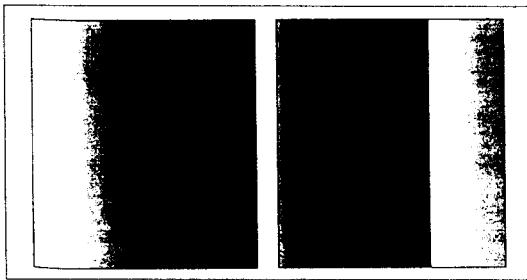


Fig 12. Two-dimensional image of a simple one-dimensional ramp(left), and the same image shifted laterally(right).

Figs 12, 13, 14 : 한 축방향으로 선형 증가하는 2차원 선형 증가함수와 power spectrum, 낮은 주파수의 25 주파수를 사용하여 재구성한 함수.

Fig 15 : 2차원 정현(sinusoidal) 함수의 Fourier 변환.

Figs 16, 17 : 2차원 함수의 공간회전이 공간주파수 평면에 나타나는 영향. 공간함수를 회전시킨 만큼 spectrum도 공간 주파수평면에서 회전한다.

Fig 18 : 2차원 사각형 계단함수의 Fourier 변환과 대역폭제한을 약 spectrum을 사용한 재구성, 대역폭이 넓어질수록 edge가 명확해짐.

Figs 19, 20 : 2차원 사각형 계단함수의 power spectrum.

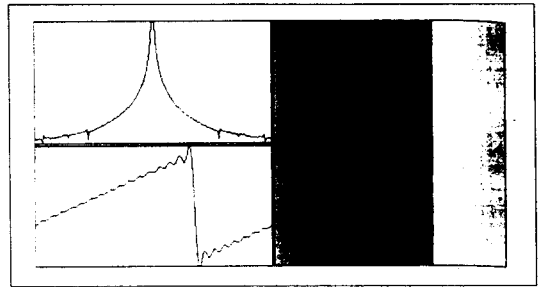


Fig 13. The horizontal profile of the transform power spectrum from Figure 7(top left), the retransformed image using the first 25 terms(right), and its horizontal brightness profile(bottom left).

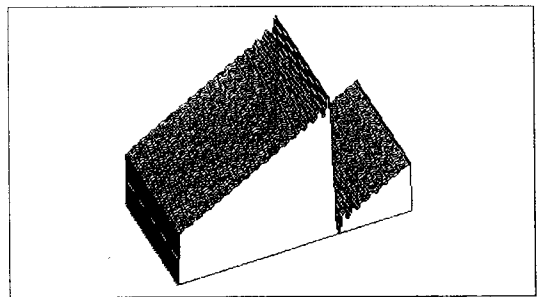
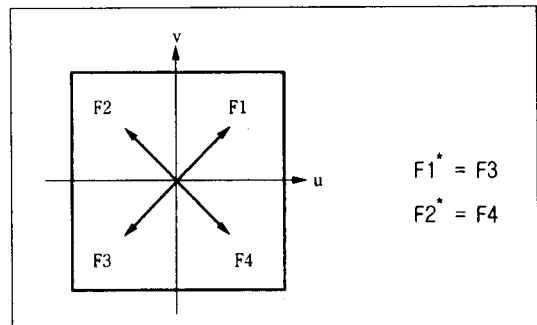


Fig 14. Isometric plot of a reconstructed two-dimensional image of the results shown in Figure 8. based on the first 25 terms in ice Fourier transform of the shifted linear ramp.

Fig 21 : 다양한 2차원 함수의 Fourier 변환.

실수함수(real function)의 Fourier 변환은 원점에 대하여 complex conjugate symmetric 함.



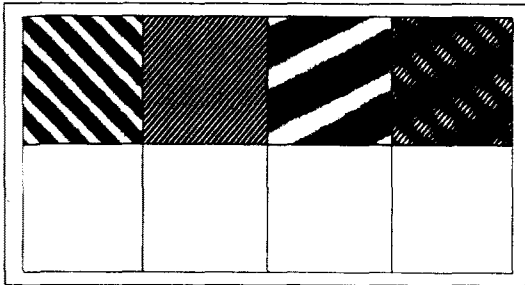


Fig 15. Three sinusoidal patterns, their frequency transforms, and their sum.

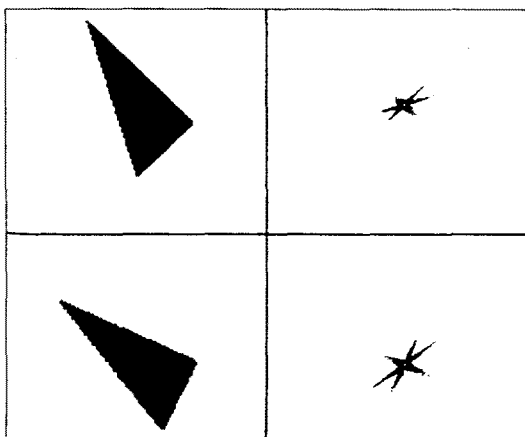


Fig 16. Rotation of a spatial-domain image(left), and the corresponding relation of the frequency transform(right)

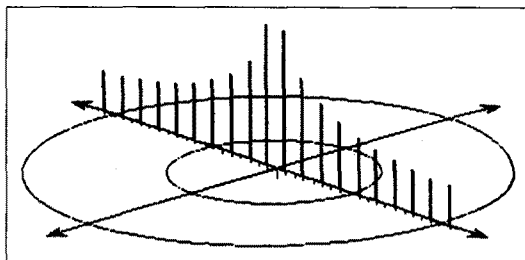


Fig 17. Frequency transform of a step function rotates with orientation of the spatial image

Fig 22, 23 : 완전한 2차원 정현함수와 비정현함수의 Fourier 변환.

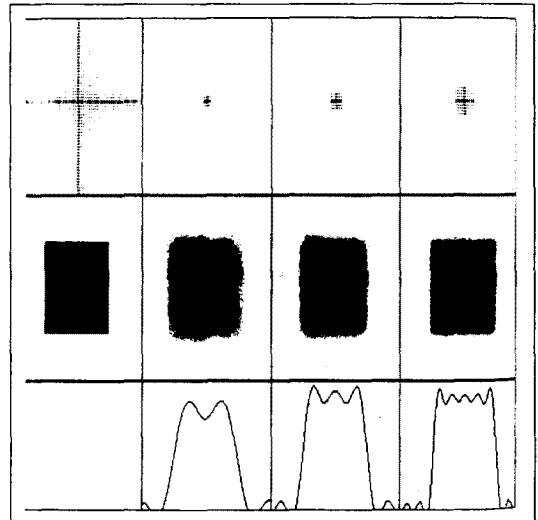


Fig 18. A two-dimensional step function and its frequency transform(left), and reconstructions with different numbers of terms(shown as a portion of the frequency transform). Bottom row shows horizontal line profiles through the center of the reconstructed spatial image.

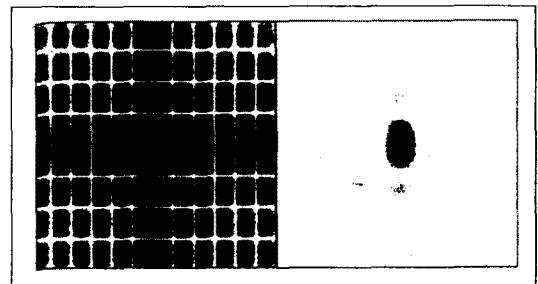


Fig 19. The two-dimensional frequency transform of a rectangular step function shown as a logarithmic display of the power spectrum(left) and the magnitude(right)

Fig 24 : Aliasing이 있는 2차원 함수의 Fourier 변환.
CRT Display에서 주사선의 영향 또는 halftone printer에서 발행한다.

2차원 spectrum에서 aliasing 성분을 제거하고 원 함수를 재구성한다.

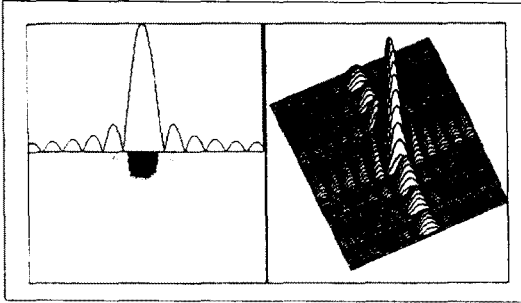


Fig 20. The magnitude image from Figure 14 shown with cross section(left) and isometric display(right).

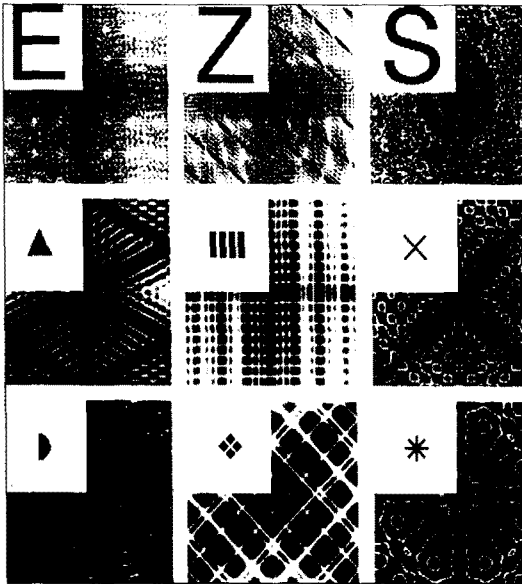


Fig 21. Nine two-dimensional black and white shapes(insets) with their frequency transforms.(Image courtesy Arlo Reeves, Dartmouth Univ.

*영상의 주기적인 구조

공간주파수 평면에서 power spectrum의 peak로 나타나며, 이 peak의 원점에서부터 거리와 방향은 영상의

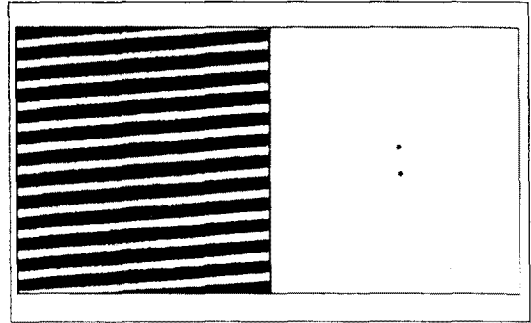


Fig 22. A set of sinusoidal lines(left) and the frequency transform(right)

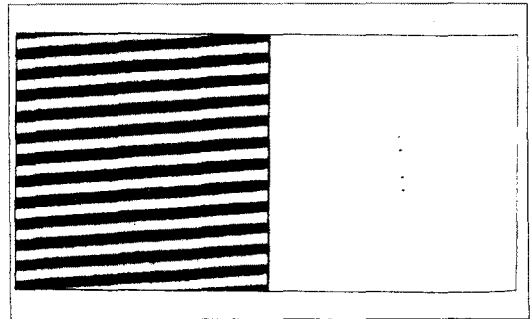


Fig 23. The same lines as Figure 17 with a non-sinusoidal brightness profile.

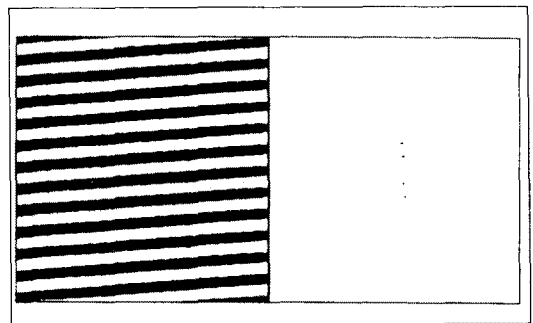


Fig 24. The same lines as Figure 18 with aliasing.

특성과 관계가 있다.