Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.24, NO.1, March, 1998

負在庫期間에 의존하는 負在庫比率을 갖는 確率的 部分負在庫모델*

A Stochastic Partial Backorder Inventory Model with a Backorder Ratio Depending on Backorder periods*

김정자**

Jung-Ja Kim**

Abstract

This paper presents a stochastic partial backorder inventory model for the situation in which demand follows normal distribution and back order ratio during the stockout period decreases exponentially according to the length of backorder period. In the paper, an objective function is formulated to minimize the average annual cost, which is the sum of the ordering, carrying, time-proportional backordering, and lost sales cost. And then sensitivity analysis for various exponential backorder ratios and standard deviations of leadtime demand are presented. The inventory model in the paper is reduced to a backorder model and lost sales model, when backorder ratio is 1 and 0, respectively.

1. 서 론

현재까지 정량발주 재고시스템에서 부재고와 유실판매를 고려하여 경제적 발주량을 구하는 문제는 여러 학자들에 의하여 연구되어왔다. 정량발주 재고시스템에서 負在庫(backorders)와 遺失販賣(lost sales)를 고려한 초기의 연구로서 Hadley 와 Whitin[1]의 부재고모형과 유실판매모형을 들 수 있다. 이들은 확정적 수요와 확률적 수요하에서 각각 재고모형을 개발하고 발주점과 발주량을 구하는 해법을 제시하였다. 그후 Park[3,4]은 수요와 조달기간이 확정적인 상황하에서 품절기간중의 수요를 부재고와 유실판매를 동시에 고려하여 경제적 발주량을 구하는 부분부재고모형을 제안하고 해석적인 방법에 의하여 발주점과 발주량을 구하였다. Kim과 Park[2]은 Park[3,4]의 연구를 기초로 확률적인 수요하에서 부재고와 유실판매를 동시에 고려한 경제적 발주량을 구하는 부분부재고모형을 제안하고 발주점과 발주량을 구하는 반복적인 해법을 제안하였다.

한편, 姜과 朴[5]은 수요가 확정적이고 조달기간이 불확실한 상황하에서 품절기간중 수요가 모두 부재고되는 확률적 부재고모형을 제안하였다. 李와 李[11]는 이들의 연구를 확장하여 수요가 확정적이고 조달기간이 불확실한 상황하에서 품절기간중 수요의 일부만 부재고되고 나머지의 수요가 유실판매되는 근사적인 부분부재고모형을 개발하고 발주점과 발주량을 구하는 반복적 해법을 개발하였다. 그후 金, 李 및 春日井[6]은 李와 李[11]의 근사

---

* 이 논문은 동아대학교 1996년도 "교수해외파견 연구자원계획"에 의하여 수행되었음

** 동아대학교 산업공학과

적인 부분부재고모형을 수정한 부분부재고모형을 개발하고 발주점과 발주량을 구하는 반복적 해법을 제시하였다.

이상에서 제안된 부분부재고모형은 모두 부재고비율이 부재고기간의 길이에 의존하지 않고 일정하다는 가정하에 재고관련비용을 유도하고 이를 최소로하는 해법을 제안하고 있다. 최근 수요와 조달기간이 확정적 상황하에서 시간비례 부재고비용과 부재고비율을 부재고기간 의존함수로 정의하여 개발한 부분 부재고모형에 관한 연구가 金과 春日井[8]에 의해 수행되었다. 한편, 이들의 연구를 확장하여 수요가 확정적이고 조달기간이 불확실한 상황하에서 李[9]는 부재고비율을 부재고기간의 선형함수로 가정한 부분부재고모형을 제안하였으며, 金과 李 및 森戶[7]는 부재고비율을 負의 지수함수로 가정하고 시간가중 부재고비용과 유실판매비용을 고려한 부분부재고모형을 개발하고 발주점과 발주량을 구하는 반복적 해법을 개발하였다. 그후 李[10]는 동일한 상황하에서 시간가중 부재고비용과 수량가중부재고비용 및 유실판매비용을 고려한 부분부재고모형을 개발하고 해를 구하는 반복적 해법을 제안하였다.

본연구는 조달기간중의 수요가 정규분포를 따르는 상황하에서 품절기간중 수요의 일부만 부재고되고 나머지의 수요가 유실판매되는 확률적 부분부재고시스템에 대한 Kim과 Park[2]의 기존연구를 기초로하여 수행하였다. 이 기존연구에서는 부재고비율을 부재고기간과는 무관하게 일정하다고 가정하고 모형을 구축하고 있으므로 그 적용가능성이 제약되어 있다. 본연구에서는 품절발생시의 소비자의 구매행동을 고려하여 부재고비율을 부재고기간에 의존하는 지수함수로 정의하여 모형을 구축하였다.

본연구에서는 재고관련비용으로 발주비용, 재고유지비용, 시간가중 부재고비용, 유실판매비용을 고려하여 연간 총재고비용을 유도하고 이를 최소화하는 발주점과 발주량을 구하는 모형을 제시하였다.

한편 본연구에서 제시한 재고모형은 누적 기대부재고비율(cumulative expected backorder ratio)이 1과 0인 양극단에서는 통상의 부재고모형과 유실판매 재고모형으로 환원된다.

2 .모형의 정식화

2.1 기호

A	: 주기당 발주비용(원/주기)
$B(r)$	: 주기당 누적기대부재고비율
C_B	: 연간 기대부재고비용(원)
C_H	: 연간 기대재고유지비용(원)
C_O	: 연간 기대발주비용(원)
C_P	: 연간 기대유실판매비용(원)
D	: 연간 평균수요(個/年)
$f(x)$	: 조달기간중의 수요의 정규확률밀도함수($x \geq 0$)
H	: 단위당 연간 재고유지비용(원/個·年)
$K(R, r)$	: 연간 총재고비용(원)
P	: 단위당 유실판매비용(원/個)
Q	: 주기당 발주량(個)
R	: 주기당 수요량(個)
r	: 발주점(個)
t	: 부재고기간(年)
T	: 기대주기의 길이(年)
x	: 조달기간중의 수요량(個)
$y_l(r)$	: 주기당 기대품절수량(個)
λ	: 부재고기간에 의존하는 부재고비율의 형태를 나타내는 파라메터 ($\lambda \geq 0$)
$\beta(t)$	: 부재고비율 ($0 \leq \beta(t)=\exp(-\lambda t) \leq 1$)
μ	: 조달기간중의 평균수요량(個)
σ	: 조달기간중의 수요의 표준편차(個)
π	: 연간 단위당 부재고비용(원/個·年)

2.2 모형의 가정

가) 제품의 단가는 발주량에 무관하고 일정하다.

나) 前期의 부재고는 次期에 모두 만족된다.

다) 조달기간중의 수요는 정규분포에 따른다.

라) 품절기간중의 수요의 부재고비율은 부재고기간(t)의 의존함수로서 負의 지수함수 $\beta(t)=\exp(-\lambda t)$에 따른다.

2.3 모형의 정식화

〈그림 1〉은 조달기간중의 수요가 불확실한 상황하에서의 部分負在庫를 갖는 재고시스템을 도식화한 것이다. 여기서 조달기간중의 수요의 정규확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 주기당 기대품절수량 $y_1(r)$은 다음과 같다.

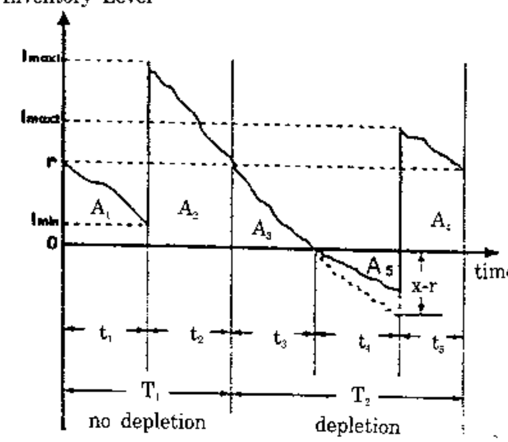

그림 1. 확률적 수요를 갖는 부분부재고시스템

$$y_1(r) = \int_r^{\infty} (x-r) f(x)dx$$

〈그림 1〉에서 알 수 있는 바와 같이 조달기간중의 수요의 크기에 따라 품절이 있는 주기($x>r$)와 품절이 없는 주기($0 \le x \le r$)로 구분된다. 〈그림 1〉로부터 품절이 없는 주기의 납품직전의 재고수준 ($I_{\min}$)과 납품직후의 재고수준 (I_{max1})및 품절이 있는 주기의 납품직후의 재고수준 (I_{max2}) 그리고 재고수준의 변화에 따른 각 시간을 구하면 다음과 같다.

$$I_{\min} = r - x$$
$$t_1 = x/D$$
$$I_{max1} = r - x + Q$$
$$t_2 = (Q - x)/D$$
$$t_3 = r/D$$
$$t_4 = (x - r)/D$$
$$I_{max2} = Q - B(r)(x - r)$$
$$t_5 = \{ Q - B(r)(x - r) - r \}/D$$

〈그림 1〉에서 $x>r$ 일때만 품절이 발생하므로 $\lambda>0$인 경우의 주기당 누적기대부재고량 $B(r)y_1(r)$은 다음과 같다.

$$B(r)\ y_1(r) = \int_r^{\infty} [\int_0^{t_4} D\ \exp(-\lambda t)dt\ ] f(x)dx$$
$$= \frac{D}{\lambda}\int_r^{\infty} \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-\lambda(x-r)}{D}\right) \right\} f(x)dx$$
$$= \frac{D}{\lambda}\{ \bar{F}(r) - G_0(r) \}$$

단, $\bar{F}(r) = \int_r^{\infty} f(x)dx$

$$G_0(r) = \int_r^{\infty} \exp\left(\frac{-\lambda(x-r)}{D}\right) f(x)dx$$

따라서 주기당 누적기대부재고비율은 식(1)과 같다.

$$B(r) = \frac{D}{\lambda y_1(r)}\{ \bar{F}(r) - G_0(r) \} \tag{1}$$

한편, 〈그림 1〉로부터 주기당 기대수요량 R과 기대주기의 길이 T를 구하면 각각 다음과 같다.

$$R = \int_0^r (t_1 + t_2) D f(x)dx + \int_r^{\infty} (t_3 + t_4 + t_5) D f(x)dx$$
$$= Q\int_0^r f(x)dx + \int_r^{\infty} [Q + \{1 - B(r)\}(x-r)] f(x)dx$$
$$\therefore R = Q + \{1 - B(r)\}\ y_1(r) \tag{2}$$

$$T = \int_0^r (t_1 + t_2) f(x)dx + \int_r^{\infty} (t_3 + t_4 + t_5) f(x)dx$$
$$= \frac{Q}{D}\int_0^r f(x)dx + \frac{1}{D}\int_r^{\infty} [Q + \{(1-B(r)\}(x-r)] f(x)dx$$
$$= \frac{Q + \{1-B(r)\}\ y_1(r)}{D}$$
$$\therefore T = \frac{R}{D} \tag{3}$$

여기서 $\lambda>0$ 인 경우의 연간 기대재고관련비용을 유도하면 다음과 같다.

(1) 연간 기대발주비용

$$C_o = \frac{AD}{R} \tag{4}$$

(2) 연간 기대재고유지비용

먼저 〈그림 1〉로부터 품절이 없는 주기의 주기당 기대재고는 면적 A_1과 A_2의 합의 기대치, 품절이 있는 주기의

주기당 기대재고는 면적 A_3과 A_4의 합의 기대치가 됨으로 이를 구하면 각각 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
E(A_1+A_2) &= \frac{1}{2}E\,[(r+I_{\min})t_1+(I_{max1}+r)t_2] \\
&= \frac{Q}{D}\int_0^r (r-x+\frac{Q}{2})f(x)dx \\
&= \frac{Q}{D}\left\{ r-\mu+y_1(r)+\frac{Q}{2}\int_0^r f(x)\,dx \right\} \\
E(A_3+A_4) &= \frac{1}{2}E[r\,t_3+(I_{max2}+r)\,t_3] \\
&= \frac{1}{2D}\int_r^\infty \{Q-B(r)(x-r)\}^2 f(x)dx \\
&= \frac{Q^2}{2D}\int_r^\infty f(x)\,dx - \frac{B(r)Q}{D}y_1(r) + \frac{B(r)^2}{2D}y_2(r)
\end{aligned}
$$

단, $y_2(r) = \int_r^\infty (x-r)^2 f(x)dx$

따라서 주기당 기대재고량을 구하기 위하여 위의 두식을 합하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2D}[Q^2+2\{r-\mu+(1-B(r))\,y_1(r)\}Q+B(r)^2y_2(r)]$$

위 식에서 Q를 식(2)에 의해 R-{1-B(r)}y_1(r)로 변환시킨 후 H/T를 곱하여 연간 총재고비용을 구하면 다음의 식(5)와 같다.

$$
\begin{aligned}
C_H &= H(\frac{R}{2}+r-\mu)+\frac{HB(r)^2y_2(r)}{2R} \\
&\quad -\frac{H\{1-B(r)\}y_1(r)}{2R}[2r-2\mu+\{1-B(r)\}y_1(r)]
\end{aligned} \tag{5}
$$

(3) 연간 기대부재고비용

조달기간중의 수요가 $x>r$일 경우만 품절이 발생함으로 〈그림 1〉에서 주기당 기대부재고량은 기대면적 A_5가 된다.

$$
\begin{aligned}
E(A_5) &= \int_r^\infty \left\{ \int_0^{t_4} D\,\exp(-\lambda t)\,t\,dt \right\} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_r^\infty \left[\frac{D}{\lambda}-(\frac{D}{\lambda}+x-r)\exp(\frac{-\lambda(x-r)}{D}) \right] f(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda}[\int_r^\infty \frac{D}{\lambda}\{1-\exp(\frac{-\lambda(x-r)}{D})\}f(x)dx \\
&\quad -\int_r^\infty (x-r)\exp(\frac{-\lambda(x-r)}{D})f(x)dx] \\
&= \frac{1}{\lambda}[B(r)y_1(r) - G_1(r)]
\end{aligned}
$$

단, $G_1(r) = \int_r^\infty (x-r)\exp(\frac{-\lambda(x-r)}{D})f(x)dx$

따라서 연간 기대부재고비용은 위의 주기당 기대부재고량에 π/T를 곱하여 구하면 다음의 식(6)과 같다.

$$C_B = \frac{\pi D}{\lambda R}[B(r)\,y_1(r) - G_1(r)] \tag{6}$$

(4) 연간 기대유실판매비용

주기당 기대유실수요량은 {1 - B(r)}y_1(r)이므로 여기에 P/T를 곱하여 연간 기대유실판매비용을 구하면 다음과 같다.

$$C_P = \frac{DP\{1-B(r)\}\,y_1(r)}{R} \tag{7}$$

(5) 연간 총재고비용

이상에서 구한 $\lambda>0$ 인 경우의 C_O, C_H, C_B 및 C_P를 합하여 연간 총재고비용을 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
K(R,r) &= \frac{1}{2R}[2AD+HR(R+2r-2\mu)+HB(r)^2y_2(r) \\
&\quad +H\,y_1(r)\{1-B(r)\}2\mu-2r-(1-B(r))\,y_1(r) \\
&\quad +\frac{2\pi D}{\lambda}B(r)y_1(r)-G_1(r) \\
&\quad +2DP\{1-B(r)\}y_1(r)]
\end{aligned} \tag{8}
$$

한편, $\lambda \to 0$ 인 경우에 $B(r)=1$이고, $C_B = \pi y_2(r)/(2R)$ (부록 1 참조)이므로 식(8)로부터 연간 총재고비용은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
K(R,r) &= \frac{1}{2R}[2AD] \\
&\quad +\frac{1}{2R}[HR(R+2r-2\mu)+(H+\pi)y_2(r)]
\end{aligned} \tag{9}
$$

3. 해법절차

이제 식(8)을 이용하여 $\lambda>0$ 인 경우의 연간 총재고비용을 최소로 하는 R과 r을 구해보자. 여기서 R과 r이 최적이 될 필요조건(necessary condition)을 구하기 위하여 연쇄법칙(chain rule)을 이용하여 식(8)을 R과 r로 편미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial K}{\partial R} = \frac{-1}{2R^2}[2AD - HR^2 + HB(r)^2 y_2(r) - Hy_1(r)\{1-B(r)\}\{2r - 2\mu + (1-B(r))y_1(r)\} + \frac{2\pi D}{\lambda}\{B(r)y_1(r) - G_1(r)\} + 2DP\{1-B(r)\}y_1(r)]$$

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{H}{R}[R - \{1 - B(r) + B(r)^2\}y_1(r) - \frac{\lambda B(r) y_1(r)}{D}\left\{\mu - r - (1-B(r))y_1(r) + \frac{DP}{H}\right\} - \frac{\pi}{H}G_1(r) + B(r)\{B(r)\overline{F}(r) - G_0(r)\}\frac{y_2(r)}{y_1(r)}]$$

위의 두식을 0으로 놓고 정리하면 미지수가 R과 r인 다음의 연립방정식을 얻는다.

$$R^2 = \frac{1}{H}[2AD + Hy_1(r)\{1-B(r)\} \times \{2\mu - 2r - (1-B(r))y_1(r)\} + HB(r)^2 y_2(r) + \frac{2\pi D}{\lambda}\{B(r)y_1(r) - G_1(r)\} + 2DP\{1-B(r)\}y_1(r)] \tag{10}$$

$$R = \{1 - B(r) + B(r)^2\}y_1(r) + \frac{\pi}{H}G_1(r) + \frac{\lambda B(r) y_1(r)}{D}\left\{\mu - r - (1-B(r))y_1(r) + \frac{DP}{H}\right\} + B\{G_0(r) - B(r)\overline{F}(r)\}\frac{y_2(r)}{y_1(r)} \tag{11}$$

한편, $\lambda \to 0$ 인 경우 식(9)의 연간 총재고비용은 볼록함수이다(부록 2 참조). 따라서 식(9)를 최소로 하는 R과 r의 필요충분조건을 구하기 위하여 식(9)를 R과 r로 편미한 결과를 0으로 놓고 정리하면 식(12)와 식(13)을 얻는다.

$$R^2 = \frac{1}{H}[2AD + (H+\pi)y_2(r)] \tag{12}$$

$$R = \frac{1}{H}(H+\pi)y_1(r) \tag{13}$$

이상의 결과를 이용하여 본연구에서는 $\lambda = 0$ 인 경우는 식(13)을 식(14)에 대입하여 二分法(bisection method)으로 r을 구한 후에 이를 식(13)에 대입하여 R을 구하였다. 한편, $\lambda > 0$ 인 경우는 식(8)의 연간 총비용함수의 볼록성이 증명되어 있지 않으므로 λ의 값을 0으로부터 증분시켜 가면서 식(11)을 식(10)에 대입하여 二分法으로 r을 구한 후에 이를 식(11)에 대입하여 R을 구하였다.

이상에서 구한 r과 R을 이용하면 발주량 Q는 식(2)로부터 유도된 식(14)에 의해 구할 수 있다.

$$Q = R - \{1 - B(r)\}\ y_1(r) \tag{14}$$

위의 해법절차에서 연립방정식을 풀 경우 적분계산을 필요로 한다. 여기서, $r' = (r-\mu)/\sigma$ 라 두고, $\Phi(r')$과 $\phi(r')$을 각각 표준정규분포의 累積餘函數와 확률밀도함수로 정의하면 다음의 식에 의하여 적분값을 구할 수 있다(부록 3 참조).

$$\overline{F}(r) = \int_r^\infty f(x)dx = \Phi(r')$$

$$y_1(r) = \int_r^\infty (x-r)f(x)dx = (\mu - r)\Phi(r') + \sigma\ \phi(r')$$

$$y_2(r) = \int_r^\infty (x-r)^2 f(x)dx = \{(\mu-r)^2 + \sigma^2\}\Phi(r') + \sigma(\mu - r)\phi(r')$$

$$G_0(r) = \int_r^\infty \exp(\frac{-\lambda(x-r)}{D})f(x)dx = \exp(\frac{\lambda}{D}(r - \mu + \frac{\lambda\sigma^2}{2D})\Phi(r' + \frac{\lambda\sigma}{D})$$

$$G_1(r) = \int_r^\infty (x-r)\exp(-\frac{\lambda(x-r)}{D})f(x)dx = \sigma\ \phi(r') + (\mu - r - \frac{\lambda\sigma^2}{D}) \times \exp(-\frac{\lambda}{D}(\mu - r - \frac{\lambda\sigma^2}{2D}))\ \Phi(r' + \frac{\lambda\sigma^2}{2D})$$

4. 수치예 및 감도분석

어느 회사에서 한 품목의 조달기간중의 수요가 평균이 50개이고 표준편차가 10개인 정규분포에 따르고 나머지 자료들이 다음과 같이 주어져 있다.

D = 200 단위/年
P = 0.3 만원/단위
H = 단위당 0.1 만원/年
π = 부재고단위당 0.4 만원/年
A = 5 만원/주기

위의 자료를 이용하여 λ의 여러 값에 대한 발주점, 발주량 및 연간기대재고비용을 구하면

표 1. λ의 감도분석 (σ= 10)

(단위: 개, 만원)

λ	0.0	1.0	5.0	10.0	50.0	500.0
주기당수요량(R)	160.1	155.2	150.4	149.1	147.7	147.4
발주량(Q)	160.1	153.9	148.7	147.4	146.2	146.0
발주점(r)	18.0	28.9	41.7	46.4	53.5	56.5
누적부재고비율($B(r)$)	1.0	0.9	0.8	0.7	0.4	0.1
연간발주비(C_0)	6.2	6.5	6.6	6.7	6.8	6.8
연간재고유지비(C_H)	5.2	5.8	6.7	7.1	7.7	8.0
연간부재고비(C_B)	1.4	0.6	0.2	0.1	0.0	0.0
연간유실판매비(C_P)	0.0	0.5	0.7	0.7	0.6	0.6
연간 총재고비용($K(R, r)$)	12.8	13.4	14.2	14.6	15.1	15.4

표 2. 표준편차(σ)에 대한 감도분석 (λ = 5.0)

(단위: 개, 만원)

표준편차(σ)	1.0	5.0	10.0	15.0
주기당 수요량(R)	145.8	147.4	150.4	153.5
발주량(Q)	145.0	146.3	148.7	151.2
발주점(r)	41.8	41.5	41.7	42.7
연간 총재고비용($K(R,r)$)	13.8	13.9	14.2	14.6

표 1과 같다. 본연구에서는 二分法에 의하여 구한 해의 검증을 위하여 위의 자료와 식(8)의 연간 총재고비용을 최소로하는 해를 格子法(grid search method)으로 구한 결과 두방법에 의한 해가 일치하였다.

표 1로부터 $\lambda \leq 5$ 인 경우 $\lambda > 5$ 인 경우에 비하여 상대적으로 발주점, 발주량 및 연간 총재고비용의 민감도가 높음을 알 수 있다. 또한 λ의 값이 증가함에 따라 발주점, 발주량 및 연간 총재고비용이 증가하여 일정한 값에 수렴해가는 것을 알 수 있다. 한편, 표 1로부터 λ의 변화에 따른 연간 부재고비용과 연간 유실판매비용을 보면 λ=0.0 인 경우 부재고 비율이 1 즉 부재고모형으로 환원되기 때문에 부재고비용이 가장 많고 유실판매비용이 0 이며, λ값이 증가함에 따라 부재고비율이 감소하기 때문에 부재고비는 감소하고 있음을 알 수 있다.

표 2는 λ의 값을 5.0으로 고정시킨 후 σ의 여러 값에 대한 발주점과 발주량 및 연간 총재고비용을 산출하여 작성한 것이다. 표 2에서 알 수 있는 바와 같이 본연구에서 제시된 모형은 불확실성의 크기를 나타내는σ의 값이 증가함에 따라 발주점, 발주량 및 연간 총재고비용이 모두 증가함을 알 수 있다.

한편, 표 1과 표 2부터 본연구에서 제시된 모형은 σ보다는 λ의 값의 변화에 더욱 민감하다는 사실을 알 수 있다.

5. 기존모형과의 관련성

여기서는 본연구에서 유도된 정량발주 재고모형과 기존에 개발된 모형과의 관련성에 대하여 검토하기로 한다. 먼저 $\lambda \to 0$인 경우의 연간 총재고비용함수인 식(9)는 조달기간중의 수요가 불확실한 상황하에서의 부재고모형의 비용함수가 된다. 한편, $\lambda \to \infty$ 인 경우에 $B(r)=0$, $C\_B=0$ 이 되므로 식(8)은 다음과 같이 변환된다.

$$K(R, r) = \frac{1}{2R}[2AD + HR(R + 2r - 2\mu) + Hy_1(r)\{2\mu - 2r - y_1(r)\} + 2DPy_1(r)] \qquad (15)$$

식(15)는 조달기간중의 수요가 불확실한 상황하에서의 유실판매모형의 비용함수가 된다. 식(8)에서 $y_1(r) \to S$(S는 확정적 상황하에서의 주기당 품절수량), $y_2(r) \to S^2$, $(\mu - r) \to S$, $(x-r) \to S$로 변환하면 식(16)을 얻는다.

$$K(R, S) = \frac{D}{R}[A + \frac{H}{2D}(R - S)^2 - \frac{\pi}{\lambda}S$$

$$\times \exp(-\frac{\lambda S}{D}) + PS$$
$$+ \frac{D}{\lambda}(\frac{\pi}{\lambda} - P)(1 - \exp(-\frac{\lambda S}{D})] \quad (16)$$

식(16)은 수요와 조달기간이 확정적 상황하에서 지수부재고비율을 갖는 金과 春日井 [8]의 연간 총재고비용함수와 일치한다.

한편, 식(9)와 식(15)에서 $(\mu\text{-}r) \rightarrow S$, $y_1(r) \rightarrow S$, $y_2(r) \rightarrow S^2$으로 변환하면, 식(17) 및 식(18)을 얻는다.

$$K(R,S) = \frac{1}{2R}[2AD + H(R-S)^2 + \pi S^2] \quad (17)$$
$$K(R,S) = \frac{1}{2R}[2AD + H(R-S)^2 + 2DPS] \quad (18)$$

식(17)과 식(18)은 수요와 조달기간이 확정적 상황하에서 Hadley와 Whitin[1]에 의해 유도된 부재고모형과 유실판매모형의 비용함수와 일치한다. 단, 본연구에서는 시간가중부재고비용만 고려하고 단위당 부재고비용은 고려하고 있지 않기 때문에 식(17)에는 단위당 부재고비용항이 포함되어 있지 않다. 식(17)과 식(18)로부터 S=0 인 경우 $R = Q$가 되므로 Harris에 의해 유도된 EOQ 모형의 비용함수가 됨은 자명하다.

한편, 식(12)와 식(13)에서 $y_1(r) \rightarrow S$, $y_2(r) \rightarrow S^2$으로 변환하고 연립방정식을 풀어 Q ($\lambda \geq 0$일 때 $B(r) = 1$이 되므로 $R = Q$가 성립함)와 S를 구하면 다음과 같다.

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{H}}\sqrt{\frac{H+\pi}{\pi}} \quad (19)$$

$$S = \sqrt{\frac{2AD}{\pi}}\sqrt{\frac{H}{H+\pi}} \quad (20)$$

식(19)는 春日井[12]이 수요와 조달기간이 확정적 상황하에서 부재고만을 고려하여 유도한 최적발주량과 일치한다.

6. 結 論

본연구에서는 품절기간중의 수요에 대한 고객의 다양한 반응을 고려하여 품절기간중 긴급을 요하지 않거나 인내심 있는 고객은 수요가 충족될 때까지 기다리며, 긴급을 요하는 경우는 다른 구매처에서 구매하게 되는 현실상황을 반영하기 위하여 負在庫와 遺失販賣를 동시에 고려하여 모형을 구축하였다. 특히 본연구에서는 품절기간중의 부재고 비율이 부재고기간의 길이에 따라 변화하는 현실상황을 반영하기 위하여 負의 지수함수를 도입하였다.

본연구는 조달기간중의 수요를 정규분포로 가정하고, 연속적인 두개의 발주점간의 기간을 재고주기로 파악하여 주기당 재고관련비용을 정식화하고 연간 총재고비용함수를 도출하였다. 그리고 수치자료를 이용하여 이분법으로 연간 총재고비용함수를 최소로하는 발주량과 발주점을 구하고, λ와 조달기간중의 수요의 표준편차 σ에 대한 感度分析을 실시하여 발주량과 발주점 및 연간 총재고비용의 변동상태를 검토하였다. 그리고 본연구에서 제안한 부분부재고를 갖는 정량발주모형과 기존의 모형과의 관련성을 검토하여 본연구에서 제시된 모형의 누적부재고비율이 0과 1일 때 각각 부재고모형과 유실판매모형으로 환원됨을 입증하였다.

한편 본연구를 현실의 재고문제에 적용하기 위해서는 부재고비율 λ를 추정하여야 한다. 부재고비율은 과거의 재고관리 대상품목의 부재고기간의 경과에 따른 부재고비율의 자료를 이용한 회귀분석을 통하여 추정할 수 있다.

부 록 1

$\lambda \rightarrow 0$ 일때 $B(r) = 1$, $C_B = \pi y_2(r)/(2R)$이 된다.

[증명]

식(1)로부터 $\lambda \rightarrow 0$일때 $B(r)$는 不定形이므로 L'Hopital의 정리에 의해 $B(r)$의 극한값을 구하면 다음과 같다.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} B(r) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{D}{\lambda y_1(r)} \{ \overline{F}(r) - G_0(r) \}$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{D\int_r^{\infty} [1 - \exp(-\lambda(x - \frac{r}{D})] f(x)dx}{\lambda \int_r^{\infty} (x-r) f(x)dx}$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\int_r^{\infty} (x-r)\exp(-\lambda(x - \frac{r}{D}) f(x)dx}{\int_r^{\infty} (x-r) f(x)dx}$$

$$= 1$$

한편, 식(6)의 C_B에 식(1)의 $B(r)$를 대입하면, $\lambda \to 0$ 일 때 C_B는 不定形이 되므로 L'Hopital의 정리를 적용하여 C_B의 극한값을 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0} C_B &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\pi D}{\lambda R}[B(r)y_1(r) - G_1(r)] \\ &= \frac{\pi D}{R}\lim_{\lambda\to 0}\int_r^{\infty} \frac{D - D + \lambda(x-r)\exp(\frac{-\lambda(x-r)}{D})}{\lambda^2} f(x)dx \\ &= \frac{\pi}{2R}\lim_{\lambda\to 0}\int_r^{\infty} (x-r)^2\exp\left(\frac{-\lambda(x-r)}{D}\right) f(x)dx \\ &= \frac{\pi}{2R}\int_r^{\infty} (x-r)^2 f(x)dx \\ &= \frac{\pi}{2R}y_2(r)\end{aligned}$$

Q.E.D.

부 록 2

식(8)의 연간 기대비용함수 $K(R, r)$은 $B(r) = 1$일 다음의 식으로 변환되며, 볼록함수(convex function)가 된다.

$$K(R, r) = \frac{1}{2R}[2AD + HR(R + 2r - 2\mu) + (H+\pi)y_2(r)] \tag{9}$$

[증명]

$$\frac{\partial^2 K}{\partial R^2} = \frac{1}{R^3}\left[2AD + (H+\pi)\int_r^{\infty}(x-r)^2 f(x)dx\right] > 0$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial r^2} = \frac{H+\pi}{R}\int_r^{\infty} f(x)\,dx > 0$$

$$-\frac{\partial^2 K}{\partial r\,\partial R} = \frac{H+\pi}{R^2}\int_r^{\infty}(x-r)f(x)\,dx > 0$$

여기서 · 위식을 이용하여 헤시안 매트릭스(Hessian matrix)의 행렬식$|H|$을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}|H| &= \frac{\partial^2 K}{\partial R^2}\frac{\partial^2 K}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial^2 K}{\partial r\,\partial R}\right)^2 \\ &= \frac{H+\pi}{R^3}[2AD\int_r^{\infty} f(x)\,dx \\ &\quad + (H+\pi)\{\int_r^{\infty}(x-r)^2 f(x)\,dx\int_r^{\infty} f(x)\,dx \\ &\quad - \left[\int_r^{\infty}(x-r)f(x)\,dx\right]^2\}]\end{aligned}$$

여기서 $f = (x-r)\sqrt{f(x)}$, $g = \sqrt{f(x)}$라 정의하면

$$\begin{aligned}&\int_r^{\infty}(x-r)^2 f(x)dx\int_r^{\infty} f(x)dx - \left[\int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx\right]^2 \\ &= \int_r^{\infty} f^2 dx\int_r^{\infty} g^2 dx - \left[\int_r^{\infty} f\cdot g\,dx\right]^2\end{aligned}$$

이 된다. 한편 Schwarz의 不等式에 의하면 다음 식이 성립한다.

$$\int_r^{\infty} f^2 dx\int_r^{\infty} g^2 dx \geq \left[\int_r^{\infty} f\cdot g\,dx\right]^2$$

따라서 $|H| > 0$이 성립하므로 $B(r) = 1$일때 식(9)의 $K(R, r)$은 볼록함수가 된다.

Q.E.D.

부 록 3

여기서

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$r' = \frac{r-\mu}{\sigma}$$

$$v = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$w = v + \frac{\lambda}{D}\sigma$$

$$\Phi(r') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{r'}^{\infty}\exp\left(\frac{-v^2}{2}\right)dv$$

$$\phi(r') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-r'^2}{2}\right)$$

이라 두면

$$\begin{aligned}\int_r^{\infty} f(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{r'}^{\infty}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv \\ &= \Phi(r')\end{aligned}$$

$$\int_r^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{r'}^{\infty}(\mu + \sigma v)\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv$$

$$= \mu\Phi(r') + \sigma\phi(r')$$

$$\int_r^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{r'}^{\infty} (\mu+\sigma\upsilon)^2 \exp(-\frac{\upsilon^2}{2})d\upsilon$$

$$= \mu^2\Phi(r') + 2\mu\sigma\phi(r') + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{r'}^{\infty} \upsilon^2\exp(-\frac{\upsilon^2}{2})d\upsilon$$

$$= (\mu^2+\sigma^2)\Phi(r') + \sigma(\mu+r)\phi(r')$$

이상의 식을 이용하여 증명하면 다음과 같다.

$$\bar{F}(r) = \Phi(r')$$

$$y_1(r) = (\mu-r)\Phi(r') + \sigma\phi(r')$$

$$y_2(r) = \{(\mu-r)^2+\sigma^2\}\Phi(r') + \sigma(\mu-r)\phi(r')$$

$$G_0(r) = \int_r^{\infty} \exp(-\frac{\lambda(x-r)}{D}) f(x)dx$$

$$= \exp\left\{\lambda(r-\frac{\mu}{D})\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\times \int_{r'}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\upsilon^2+\frac{2\lambda\sigma}{D}\upsilon)\right\}d\upsilon$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{D}\left[r-\mu+\frac{\lambda\sigma^2}{2D}\right]\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\times \int_{r'}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\upsilon+\frac{\lambda\sigma}{D})^2\right\}d\upsilon$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{D}(r-\mu+\frac{\lambda\sigma^2}{2D})\right\}\Phi(r'+\frac{\lambda\sigma}{D})$$

$$G_1(r) = \int_r^{\infty}(x-r)\exp\left\{-\frac{\lambda(x-r)}{D}\right\}f(x)dx$$

$$= \int_r^{\infty} x\exp\left\{-\frac{\lambda(x-r)}{D}\right\}f(x)dx$$

$$-r\int_r^{\infty}\exp\left\{-\frac{\lambda(x-r)}{D}\right\}f(x)dx$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda r}{D}\right\}\left[\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{r'}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\lambda}{D}(\mu+\sigma\upsilon)-\frac{\upsilon^2}{2}\right\}d\upsilon\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{r'}^{\infty}\upsilon\exp\left\{-\frac{\lambda}{D}(\mu+\sigma\upsilon)-\frac{\upsilon^2}{2}\right\}d\upsilon\right]$$

$$-rG_0(r)$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{D}(r-\mu+\frac{\lambda\sigma^2}{2D})\right\}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\mu\int_{r'}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\upsilon+\frac{\lambda\sigma}{D})^2\right\}d\upsilon\right.$$

$$\left.+\sigma\int_{r'}^{\infty}\upsilon\exp\left\{-\frac{1}{2}(\upsilon+\frac{\lambda\sigma}{D})^2\right\}\right]d\upsilon - r\,G_0(r)$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{D}(r-\mu+\frac{\lambda\sigma^2}{2D})\right\}\cdot$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[(\mu-\frac{\lambda\sigma^2}{D})\int_{r'+\frac{\lambda\sigma}{D}}^{\infty}\exp\left[\frac{w^2}{2}\right]dw$$

$$+\sigma\int_{r'+\frac{\lambda\sigma}{D}}^{\infty}w\exp\left[-\frac{w^2}{2}\right]dw]-r\,G_0(r)$$

여기서

$$\int_{r'+\frac{\lambda\sigma}{D}}^{\infty}w\exp\left[-\frac{w^2}{2}\right]dw$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}(r'+\frac{\lambda\sigma}{D})^2\right\}$$

$$G_0(r) = \exp\left\{\frac{\lambda}{D}(r-\mu+\frac{\lambda\sigma^2}{2D})\right\}\Phi(r'+\frac{\lambda\sigma}{D})$$

이므로

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{D}(r-\mu+\frac{\lambda\sigma^2}{2D})\right\}$$

$$\times\left[\left(\mu-\frac{\lambda\sigma^2}{D}\right)\Phi\left(r'+\frac{\lambda\sigma}{D}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(r'+\frac{\lambda\sigma}{D})^2\right\}\right]$$

$$-r\exp\left\{\frac{\lambda}{D}(r-\mu+\frac{\lambda\sigma^2}{2D})\right\}\Phi(r'+\frac{\lambda\sigma}{D})$$

$$= \sigma\phi(r') + (\mu-r-\frac{\lambda\sigma^2}{D})$$

$$\times\exp\left\{\frac{\lambda}{D}(r-\mu+\frac{\lambda\sigma^2}{2D})\right\}\Phi(r'+\frac{\lambda\sigma}{D})$$

Q.E.D.

참 고 문 헌

[1] Hadley, G. and T.M. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Prentice - Hall Inc., New Jersey, 1963, pp. 42-50.

[2] Kim, D.H. and Park, K.S., "(Q,r) Inventory Model with a Mixture of Lost Sales and Time-Weighted Backorders", *J. Opl. Res.Soc.*, Vol.36, No.3(1985), pp.231-238.

[3] Park, K.S., "Inventory Model with Partial Backorders", *Int. J. System Sci.*, Vol.13, No.12(1982), pp.1313-1317.

[4] Park. K.S., "Another Inventory Model with a Mixture

of Backorders and Lost Sales", *Naval Res.Logis. Quart.*, Vol.30, No.3(1983), pp.397-400.

[5] 姜錫昊, 朴光泰, "注文引渡期間이 不確實한 狀況下에서의 (Q, r)在庫模型과 多段階 分配시스템에의 應用에 관한 硏究", 韓國經營科學會誌, 第 11券, 第 1號 (1986), pp.44-50.

[6] 金 正 子, 李 康 雨, 春日井 博,"調達期間の不確實性を考慮した部分バックオ-ダモデルに關する硏究", 日本經營工學會誌, Vol.42, No.5(1991), pp.338-344.

[7] 金 正 子, 李 康 雨, 森戸 晋,"可變バックオ-ダ比率をもつ確率的な部分バックオ-ダシステムに關する硏究", 日本經營工學會誌, Vol.46, No.4(1995), pp.306-312.

[8] 金 正 子, 春日井 博, "部分バックオ-ダを考慮した經濟的發注量モデル", 日本經營工學會誌, Vol.45 No.1 (1994), pp.71-76.

[9] 李 康 雨, "線形 負在庫比率을 갖는 確率的 部分負在庫시스템에 관한 硏究, 大韓産業工學會誌. Vol.20. NO.3(1994), pp.105-116.

[10] 李 康 雨, "指數 負在庫比率을 갖는 確率的 部分負在庫시스템에 관한 硏究, 한국경영과학회지, Vol.21 , NO.1 (1996), pp.71-80.

[11] 李 康 雨, 李 相 道,"調達期間이 不確實한 상황하에서의 部分負在庫模型에 관한 硏究, 大韓産業工學會誌, Vol.17, NO.1, (1991), pp.51-58.

[12] 春日井 博, ORの基礎と技法, 稅務經理協會, (1971) p.69

97년 7월 최초 접수, 98년 1월 최종 수정