Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.24, N0.3, September, 1998

대기행렬 모형에서 틀리기 쉬운 정지랜덤합에 관한 소고

A Note on Common Mistakes about Stopped Random Sums Arising in Queueing Models

채경철* · 박현민**

Kyung C. Chae* · Hyun M. Park**

Abstract

We frequently encounter stopped random sums when modelling queueing systems. We also notice occasional mishandling of stopped random sums in the literature. The purpose of this note is to prevent further mistakes by identifying and correcting typical mistakes about stopped random sums. As an example model, we use the two-phase M/G/1 queue with multiple vacations.

1. 서론

복수휴가형 M/G/1 모형에서, 유휴기간 (idle period)을 I 라하고, 일련의 휴가기간들을 V_1, V_2, V_3, ⋯ 라 하면, 다음과 같이 I를 V들의 정지랜덤합 (stopped random sum)으로 나타낼 수 있다.

$$I = V_1 + V_2 + \cdots + V_K \tag{1}$$

(1)식의 K는 정지시간 (stopping time) 이라 불리는데, 복수휴가모형의 정지규칙 (stopping rule) 에 의하면, $V_1+V_2+\cdots+V_{K-1}$ 동안에는 고객이 아무도 도착하지 않았고 V_K 동안에는 고객이 한 명 이상 도착했음을 의미한다.

정지랜덤합은 대기행렬모형을 포함한 여러 확률모형에 널리 활용되고 있는 개념이다. 반면에, 정지랜덤합을 틀리게 다루는 사례 또한 종종 등장한다. 예를 들어, (1)식에서 간과하기 쉬운 점은 한 명이상 도착한 V_K 가 0명씩 도착한 $V_1, V_2, \cdots, V_{K-1}$ 보다 확률적으로 더 길다는 사실이다. 이러한 사실이 Takagi[8] 에 의해 밝혀지기까지 (Takagi 자신을 포함하여) 여러 저자들이 실수를 했는데 [4, 5, 7], 최근에 또 한 건의 실수사례가 등장했다.

Selvam과 Sivasankaran[6] (이후 S&S 라 부름) 는 최근 복수휴가형 M/G/1 에 2단계 서비스기능을 추가한 모형을 제시했다. 이 모형에서도 유휴기간은 여전히 (1)식과 동일한데, S&S 는 V_K를 $V_1, V_2, \cdots, V_{K-1}$과 동일하게 취급함으로써 기존의 실수를 다시 범했다. 또한, 이 모형의 바쁜기간 (busy period) 역시 정지랜덤합으로 나타낼 수 있는데, S&S 는 이조차도 틀리게 구했다. 그런데 문제는 이러한 실수를 후속연구에서도 무심코 답습한다는 점이다[1]. 본 연구의 목적은 정지랜덤합에 관한 전형적인 실

* 한국과학기술원 산업공학과 교수
** 한국과학기술원 산업공학과 석사과정

수를 지적하고 이를 세밀히 분석함으로써 독자들이 정지 랜덤합을 실수 없이 활용할 수 있도록 하는 것이다.

2. 복수휴가형 M/G/1 의 유휴기간

복수휴가형 M/G/1 모형에서, 포아송 도착률 (Poisson arrival rate)을 λ라하고, I와 V의 라플라스 변환 (LT: Laplace transform)을 각각 $I^*(\theta)$ 와 $V^*(\theta)$ 라 하면, Takagi [8] 이전에, 그리고 최근 S&S[6]에 의해서, 범해진 실수는 다음과 같다.

$$I^*(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} P_r\{K=k\} \cdot \{V^*(\theta)\}^k \tag{2}$$

이는 (1)식의 V들을 K와 독립으로 간주(또는 착각)함으로써, 이들을 서로 독립이고 동일한 분포를 따르는 확률변수 (iid RV) 로 취급한 결과이다.

유휴기간 시작시점에서 본다면 앞으로 발생할 $V_1, V_2, \cdots$ 는 iid RV 이다. 그러나, (마치 유휴기간이 끝난 시점에서 보듯이) (1)식의 형태로 유휴기간을 나타냈을 때에는 $V_1, V_2, \cdots V_K$가 (여전히 독립이기는 하나) 동일하지 않다. Takagi [8]의 결과는 다음과 같다.

$$I^*(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} P_r\{K=k\} \cdot \left\{\frac{V^*(\theta+\lambda)}{V^*(\lambda)}\right\}^{k-1} \left\{\frac{V^*(\theta)-V^*(\theta+\lambda)}{1-V^*(\lambda)}\right\} \tag{3}$$

(3)식에서 보듯이, 0명 도착한 V_1 (또는 $V_2, V_3, \cdots, V_{K-1}$)의 LT와 1명이상 도착한 V_K 의 LT 는 서로 다르다.

K의 분포는 다음과 같이 얻는다. 앞으로 발생할 iid RV V동안 0명 도착할 확률은 $V^*(\lambda)$ 이고 1명이상 도착할 확률은 $\{1-V^*(\lambda)\}$ 이므로, K는 다음과 같은 형태의 기하분포를 따른다.

$$P_r\{K=k\} = \{V^*(\lambda)\}^{k-1} \cdot \{1-V^*(\lambda)\},\ k=1,2,\cdots \tag{4}$$

(4)식을 (3)식에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$I^*(\theta) = \{V^*(\theta) - V^*(\theta+\lambda)\} / \{1-V^*(\theta+\lambda)\} \tag{5}$$

비고 1 : (2)식과 같은 실수를 범하게 된 이유중 하나는 (2)식과 (5)식의 기대치가 동일하다는 점이다. 즉, Wald 공식에 의해서 $E[I] = E[K] \cdot E[V]$ 인데, 이는 K가 정지시간인 경우뿐만 아니라 V들과 독립인 경우에도 성립한다.

3. 복수휴가형 M/G/1 의 바쁜기간

이 절에서는 복수휴가만 다루고, 2단계 서비스 모형은 다음 절에서 추가한다. 복수휴가형 M/G/1의 바쁜기간 B는 다음과 같이 정지랜덤합으로 나타낼 수 있다.

$$B = T_1 + T_2 + \cdots + T_K \tag{6}$$

(6)식에서 T_1은 유휴기간동안 도착한 고객들의 총 서비스 시간이고, T_k 는 T_{k-1}동안 (k=2,3, ⋯ ,K) 도착한 고객들의 총 서비스시간인데, 바쁜기간의 정지규칙에 의하면 T_1, T_2, ⋯ , T_{K-1} 동안에는 고객이 한 명이상씩 도착했으나 T_K동안에는 0명이 도착했음을 알 수 있다. 그리고, (6)식은 (1)식보다 일반적인 형태인데, 이는 T들이 서로 종속이기 때문이다(T들의 크기도 서로 다름).

편의상, 바쁜기간의 시작시점에서 앞으로 발생할 T_k (k=1,2,⋯)를 고려하자. T_k 동안 도착할 고객수를 N_k 라 하고 (유휴기간동안 도착한 고객수는 N_0 라 함), T_k 의 LT 을 $T_k^*(\theta)$ 그리고 N_k 의 확률생성함수(PGF)를 $N_k(z)$ 라 하면 다음의 관계가 성립한다.

$$T_k^*(\theta) = N_{k-1}(z)\big|_{z=S^*(\theta)},\ k \ge 1 \tag{7}$$

$$N_k(z) = T_k^*(\theta)\big|_{\theta=\lambda-\lambda z},\ k \ge 1 \tag{8}$$

$$N_0(z) = \{V^*(\lambda-\lambda z) - V^*(\lambda)\} / \{1-V^*(\lambda)\} \tag{9}$$

(7)식에서 $S^*(\theta)$는 서비스시간 S의 LT이고, (9)식은 (1)식의 V_K 동안 도착한 고객수의 PGF 이다.

먼저 (8)식을 이용해서 ((6)식의) K의 분포를 다음과 같이 얻는다. (비고 5 참조)

$$P_r\{K \le k\} = P_r\{N_k=0\} = N_k(z)\big|_{z=0} = T_k^*(\lambda) \tag{10}$$

$$P_r\{K=k\} = \begin{cases} T_k^*(\lambda) - T_{k-1}^*(\lambda) & , k \geq 2 \\ T_1^*(\lambda) & , k=1 \end{cases} \tag{11}$$

다음, B의 LT은 다음과 같이 K에 조건을 걸어서 나타낸다.

$$B^*(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} P_r\{K=k\} \cdot E[e^{-\theta B} \mid K=k] \tag{12}$$

(12)식의 $E[e^{-\theta B}|K=k]$를 효과적으로 구하기 위해서 다음을 정의한다.

$$\Omega_k^*(\theta,z) = E[e^{-\theta(T_1+T_2+\cdots+T_k)} z^{N_k}],\ k=1,2,\cdots \tag{13}$$

(13)식은 $T_1 + \cdots + T_k$ 와 N_k의 결합(joint) 변환인데, z에 0을 대입하면 N_k의 PGF 부분이 다음과 같이 $P_r\{N_k=0\}$ 로 대체된다.

$$\begin{aligned} \Omega_k^*(\theta,0) &= E[e^{-\theta(T_1+\cdots+T_k)}, N_k=0] \\ &= P_r\{N_k=0\} \cdot E[e^{-\theta(T_1+\cdots+T_k)} \mid N_k=0] \end{aligned} \tag{14}$$

(14)식에 (10)식을 대입하면 아래의 (15)식을 얻고, 이로부터 다시 (16)식을 얻는다.

$$\Omega_k^*(\theta,0) = P_r\{K \leq k\} \cdot E[e^{-\theta(T_1+\cdots+T_k)}|K \leq k] \tag{15}$$

$$\begin{aligned} P_r\{K=k\} \cdot E[e^{-\theta B}|K=k] &= E[e^{-\theta B}, K=k] \\ &= E[e^{-\theta B}, K \leq k] - E[e^{-\theta B}, K \leq k-1] \\ &= \begin{cases} \Omega_k^*(\theta,0) - \Omega_{k-1}^*(\theta,0) & , k \geq 2 \\ \Omega_1^*(\theta,0) & , k=1 \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

비고2 : (16)식의 θ에 0을 대입하면 (11)식을 얻음.

비고3 : (16)식의 의의는 B의 조건부 (K에 조건) LT을 명시적으로 나타낸 것이라 할 수 있는데, 이는 2단계 서비스 기능을 추가한 모형에서 활용됨. 반면에, 복수휴가만 고려하는 경우에 (16)식을 (12)식에 대입하면, 다음과 같이 당연(trivial)한 결과를 얻음.

$$\begin{aligned} B^*(\theta) &= \Omega_1^*(\theta,0) + \sum_{k=2}^{\infty}\{\Omega_k^*(\theta,0) - \Omega_{k-1}^*(\theta,0)\} \\ &= \lim_{k\to\infty} \Omega_k^*(\theta,0) \\ &= \lim_{k\to\infty} \Omega_k^*(\theta,z)\ (\because \lim_{k\to\infty} z^{N_k} = z^0 = 1 = 0^{N_k}) \\ &= N_0(z)|_{z=S^*(\theta+\lambda-\lambda z)}|_{z=S^*(\theta+\lambda-\lambda z)}|\cdots \\ &= N_0(z)|_{z=B_{MG1}^*(\theta)} \end{aligned} \tag{17}$$

(17)식에서 $B_{MG1}^*(\theta)$는 복수휴가기능이 없는 기본 (standard) M/G/1 모형의 바쁜기간 LT 이다(일부 생략된 유도 과정은 (19)식 참조).

4. 복수휴가형 2단계 서비스 M/G/1 의 바쁜기간

복수휴가형 2단계 서비스 시스템은 다음과 같이 작동한다. 서어버(server)는 유휴기간동안 도착한 N_0명의 고객을 1단계에서 한꺼번에 집단(group 또는 batch)서비스한 다음, 2단계에서는 N_0명을 한 명씩 개별(individual)서비스 한다. 집단서비스시간 G는 iid RV 인데, 편의상 첫 번 G를 G_1이라 하고, $G_1+S_1+\cdots+S_{N_0}$ 동안 도착하는 고객수는 N_1이라 하자. $N_1=0$ 이면 바쁜기간이 종료되고 유휴기간이 시작된다. 그러나 $N_1 \geq 1$이면, N_1명의 고객을 한꺼번에(G_2시간 걸려서) 집단서비스하고나서 이들을 다시 한 명씩 개별서비스한다. 그리고, $N_1 \geq 1$인 경우에는 또다시 $G_2+S_1+\cdots+S_{N_1}$ 동안 도착하는 고객수인 N_2가 0이면 바쁜기간이 종료되고 0이 아니면 바쁜기간이 계속되는 식으로 진행된다.

비고4 : 위와 같은 2단계 서비스 모형을 게이티드(gated)형이라 부른다. 반면에, 집단서비스 도중에 도착하는 고객도 진행중인 집단서비스에 포함시키는 모형을 고갈 (exhaustive)형이라 부른다[3]. S&S는 고갈형을 다루었지만, 일반적으로 게이티드형이 보편적이므로 (그리고, 다루기가 용이하므로), 본 연구에서는 게이티드형을 다룬다. 참고로, 고갈형에서는 아래의 (18)식에서 $G^*(\theta)$를 $G^*(\theta+\lambda-\lambda S^*(\theta))$로 대체하여야 함.

복수휴가형 2단계 서비스 모형의 바쁜기간 역시 (6)식으로 나타낼 수 있다. 단, 추가된 2단계 서비스 기능을 다

음과 같이 (7)식에 반영시킨다. ($G^*(\theta)$는 G의 LT 임.)

$$T_k^*(\theta) = \begin{cases} G^*(\theta) \cdot N_{k-1}(z)\big|_{z=S^*(\theta)} & \text{, if } N_{k-1} \geq 1 \\ 1 & \text{, if } N_{k-1} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

비고5 : (18)식의 $G^*(\theta)$에 1을 대입하면 (7)식이 된다. 그런데, (7)식에서 $N_{k-1} \geq 1$인 경우와 $N_{k-1}=0$인 경우를 따로 취급하지 않은 이유는 $N_{k-1}=0$인 경우에 자동적으로 T_k가 0이 되고 아울러 T_{k+1}, T_{k+2}, … 가 모두 0이 되기 때문이다. 반면에, (18)식에서는 두 경우를 반드시 따로 취급해야만 0명을 집단서비스하는 상황을 피할 수 있다.

일단 (7)식을 (18)식으로 고치고나면 (8)식부터 (16)식까지 모두 유효하다. 다만, (13)식의 속성이 달라진다. 2단계 서비스기능이 없는 경우에는 ((17)식에 이미 나타나 있듯이) 다음의 관계를 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \Omega_1^*(\theta,z) &= E[e^{-\theta T_1} z^{N_1}] = T_1^*(\theta+\lambda-\lambda z) \\ &= N_0(z)\big|_{z=S^*(\theta+\lambda-\lambda z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2^*(\theta,z) &= E[e^{-\theta(T_1+T_2)} z^{N_2}] = \Omega_1^*(\theta,z)\big|_{z=S^*(\theta+\lambda-\lambda z)} \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (19) \\ \Omega_{k+1}^*(\theta,z) &= \Omega_k^*(\theta,z)\big|_{z=S^*(\theta+\lambda-\lambda z)} \end{aligned}$$

그러나, 2단계 서비스기능이 추가되면, (7)식과 (18)식의 차이에 의해서 (19)식이 다음과 같이 달라진다.

$$\begin{aligned} \Omega_1^*(\theta,z) &= T_1^*(\theta+\lambda-\lambda z) = G_1^*(\theta) \\ &\quad \cdot N_0(S^*(\theta))\big|_{\theta=\theta+\lambda-\lambda z} \\ \Omega_2^*(\theta,z) &= P_r\{N_1=0\} \cdot \Omega_2^*(\theta,z|N_1=0) \\ &\quad + P_r\{N_1 \geq 1\} \cdot \Omega_2^*(\theta,z|N_1 \geq 1) \\ &= \Omega_1^*(\theta,0) + G_2^*(\theta+\lambda-\lambda z) \\ &\quad \cdot \{\Omega_1^*(\theta,S^*(\theta+\lambda-\lambda z)) - \Omega_1^*(\theta,0)\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \Omega_{k+1}^*(\theta,z) &= \Omega_k^*(\theta,0) + G_k^*(\theta+\lambda-\lambda z) \cdot \\ &\quad \{\Omega_k^*(\theta,S^*(\theta+\lambda-\lambda z)) - \Omega_k^*(\theta,0)\} \end{aligned}$$

예를 들어, $\Omega_2^*(\theta,z) \neq G_2^*(\theta)\Omega_1^*(\theta,S^*(\theta))\big|_{\theta=\theta+\lambda-\lambda z}$인 이유는 $N_1 \geq 1$인 경우에 한해서 서어버가 두 번째 집단서비스를 수행하기 때문이다. (비고5 참조)

마지막으로 B의 조건부 (K에 조건) LT은 (20)식을 (16)식에 대입하여 얻는다. 그러나, (16)식을 (12)식에 대입하더라도, 2단계 서비스가 없는 경우의 (17)식과 같이 간단한 형태로 $B^*(\theta)$를 나타내기는 어렵다.

이제 S&S가 범한 실수를 분석한다. 앞에서 언급했듯이, S&S는 유휴기간 LT을 구할 때 (1)식의 V들을 iid RV로 취급함으로써 (3)식 대신 (2)식을 사용했다. 이와 유사하게, S&S는 바쁜기간 LT을 구할 때 (6)식의 T들은 iid RV $\bar{T}$로 대체함으로써 (12)식 대신 다음 식을 사용했다. ($\overline{T^*}(\theta)$는 $\bar{T}$의 LT임).

$$B^*(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} P_r\{\bar{K}=k\} \cdot \{\overline{T^*}(\theta)\}^k \quad (21)$$

먼저, (21)식의 $\bar{K}$는 (2)식의 K와 같이 기하분포를 따르는데, 그 분포는 ((4)식과 유사한 형태로서) 다음과 같다.

$$P_r\{\bar{K}=k\} = \{1-\overline{T^*}(\lambda)\}^{k-1}\overline{T^*}(\lambda), \; k=1,2,\cdots \quad (22)$$

다음, (21)식의 $\bar{T}$는 (6)식의 T들을 대표하는 개념인데, 이는 무작위로 뽑힌 (전형적인) T를 의미한다. 편의상, 시간축에서 바쁜기간만 남기고 유휴기간을 모두 제거했다고 하면, 시간축을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$B_1 + B_2 + \cdots = (T_1 + T_2 + \cdots + T_{K_1}) + (T_{K_1+1} + \cdots + T_{K_1+K_2}) + \cdots \quad (23)$$

(23)식 우변의 T들중 하나를 무작위로 뽑되, 각각이 (길이에 불문하고) 뽑힐 확률이 동일하다고 하면, 이 때 뽑힌 T가 바로 $\bar{T}$이다. 그리고, $\bar{T}$ 동안 0명 도착할 확률이 (22)식의 $\overline{T^*}(\lambda)$이다.

비고6 : (2)식과 (3)식의 기대치가 동일하듯이, (21)식과 (12)식의 기대치가 동일함을 다음 절에서 보인다. 즉, $E[B] = E[\bar{K}] \cdot E[\bar{T}]$의 관계가 성립하는데, 이는 Wald 공식의 형태이다. (6)식 자체로는 Wald 공식의 적용범주를 벗어나지만, (6)식의 T

들을 $\bar{T}$ 로 (그리고, K를 $\bar{K}$ 로) 대체하면 Wald 공식형태의 결과를 얻는다는 점이 흥미롭다.

비고7 : S&S7가 필요로 했던 것은 $B^*(\theta)$가 아니라 $E[B]$ 였기 때문에, 그들의 실수가 다른 결과에 영향을 미치지는 않았음.

비고8 : Doshi[3] 가 $\bar{T}$ 라는 개념을 사용하여 (휴가가 없는) 2단계 서비스 M/G/1 모형을 분석한 이후, 후속연구에서도 모두 동일한 방법을 사용하고 있음[1,2,6].

5. 복수휴가형 2단계 서비스 M/G/1 의 $E[B]$

바쁜기간의 기대치 $E[B]$는 직접 (12)식을 미분해서 얻는 것보다, 간접적으로 (18)식을 미분해서 얻는 것이 더 편리하다. 바쁜기간 시작시점의 관점으로는 $E[B]$를 $\sum_{k=1}^{\infty} E[T_k]$로 나타낼 수 있는데, $E[T_k]$는 다음과 같이 (18)식으로부터 얻는다.

$$E[T_1] = E[G] + E[N_0] \cdot E[S]$$
$$E[T_2] = P_r\{N_1 \geq 1\} \cdot \{E[G] + E[N_1 | N_1 \geq 1] \cdot E[S]\}$$
$$= \{1 - T_1^*(\lambda)\} \cdot E[G] + E[S] \cdot \lambda E[T_1] \qquad (24)$$
$$\vdots$$
$$E[T_k] = \{1 - T_{k-1}^*(\lambda\} \cdot E[G] + E(S) \cdot \lambda E[T_{k-1}],\ k \geq 2$$

(24)식을 k=∞ 까지 모두 더하되, 편의상 $\rho = \lambda E[S]$ 라 하면, 다음과 같이 직감적으로도 납득이 가는 결과를 얻는다.

$$E[B] = E[N_0] \cdot E[S] \cdot (1 + \rho + \rho^2 + \cdots)$$
$$+ E[G] \cdot (1 + \rho + \rho^2 + \cdots) \cdot [1 + \{1 - T_1^*(\lambda)\}$$
$$+ \{1 - T_2^*(\lambda)\} + \cdots]$$
$$= \{E[N_0] \cdot E[S] + E[K] \cdot E[G]\} / (1 - \rho) \qquad (25)$$

(25)식에서 $E[K]$는 (10)식을 이용해서 다음과 같이 구한 것이다.

$$E[K] = \sum_{k=1}^{\infty} P_r\{K \geq k\} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \{1 - T_{k-1}^*(\lambda)\}$$

비고9 : 고갈형 (비고4 참조)에서도 (25)식은 유효함. 다만, $E[K]$의 값은 게이티드형의 경우보다 큼.

이제, (21)식의 기대치인 $E[\bar{K}] \cdot E[\bar{T}]$가 $E[B]$와 동일함을 보인다 (비고6 참조). 먼저, (23)식에서 $\{B_1, B_2, \cdots\}$ 와 $\{K_1, K_2, \cdots\}$ 는 재생과정 (renewal process)이므로, $\bar{T}$ 의 정의에 의해서 다음 관계가 성립한다.

$$E[B] = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i}{n} = E[\bar{T}] \cdot E[K] \quad (26)$$

다음, $E[\bar{K}]$가 (26)식의 $E[K]$와 동일함은 (22)식을 이용해서 다음과 같이 보인다.

$$E[\bar{K}]^{-1} = \overline{T^*}(\lambda) = P_r\{\text{무작위 선택된 } T\text{동안 0명 도착}\}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \frac{E[t\text{동안 발생한 } B\text{의 개수}]}{E[t\text{동안 발생한 } T\text{의 개수}]} \qquad (27)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} K_i} = E[K]^{-1}$$

6. 결론

본 연구에서는 복수휴가형 2단계 서비스 M/G/1 모형의 유휴기간과 바쁜기간을 예로 들어서, 문헌에서 종종 발견되는 정지랜덤합에 대한 전형적인 실수를 지적하고 그 이유를 분석함으로써 동일한 실수가 다시 발생치 않도록 하였다.

또한, 복수휴가형 2단계 서비스 M/G/1 과 같이 복잡한 모형의 바쁜기간을 구하는 과정에서 정지시간에 조건을 거는 방법을 사용했는데, 이 방법은 이미 바쁜기간이 알려져 있는 기존 모형에서도 조건부 바쁜기간을 구할 때 활용될 수 있을 것이다.

마지막으로, 바쁜기간의 기대치를 비교하는 과정에서 Wald 공식 형태의 관계식 $E[B] = E[\bar{K}] \cdot E[\bar{T}]$를 얻었는데, 이로 인한 Wald 공식의 확장가능성은 추후과제로 남긴다.

참고문헌

[1] 김태성, 채경철, "2단계 서비스와 일반휴가 대기행렬", 대한산업공학회지, 제22권, 제1호, pp.95-104, 1996.

[2] 이정은, 이효성, "N정책하의 2단계 서비스 대기행렬 시스템", 대한산업공학회/한국경영과학회 '98춘계공동학술대회논문집, Session A 14.2, pp.1-8, 1998.

[3] Doshi, B. T., "Analysis of a Two Phase Queueing System with General Service Times", *OR Letters*, Vol. 10, pp.265-272, 1991.

[4] Lee, H. W., "Bulk Arrival Queues with Server Vacations", *Appl. Math. Modeling*, Vol.13, pp.374-377, 1989.

[5] Levi, Y. and Yechiali, U., "Utilization of Idle Time in an M/G/1 Queueing System", *Mgmt. Sci.*, Vol.22, pp.202-211, 1975.

[6] Selvam, D. D. and Sivasankaran, V., "A Two-Phase Queueing System with Server Vacations", *OR Letters*, Vol.15, pp.163-168, 1994.

[7] Takagi, H., *Queueing Analysis of Vacation Models*, Research Report TR 387-0032, TRL, Tokyo, 1987.

[8] Takagi, H., *Queueing Analysis, Vol. I : Vacation and Priority Systems*, North -Holland, Amsterdam, 1991.

98년 8월 최초 접수, 98년 8월 최종 수정