

## 다품목 순환 생산시스템에 대한 평균 대기시간의 분석

### Analysis of mean waiting times for a multiclass cyclic production system

홍성조\* · 김상직\*

Sung Jo Hong\* · Sang Jik Kim\*

#### Abstract

We consider a multiclass production system processed by a single machine with cyclic order. Each part belongs to one of several classes and arrives at each queue in a Poisson process. The processing discipline at each queue is either exhaustive or gated. We introduce a new approach to analysis of mean waiting times for each queue. We formulate mean waiting times as cost functions on state of the system. The mean waiting times are obtained by solving a set of  $O(J^2)$  linear equations, where  $J$  is the number of queues in the system. We also obtain the mean number of parts of each queue in the system at an arbitrary time. Based on this result, we plot the numerical values of the mean waiting times for several parameter settings.

#### 1. 서론

유연생산시스템에 있어서 부품의 종류에 따라 설정된  $J$ 개의 대기행렬(작업대)을 1대의 기계가 순환하면서 가공하는 제조시스템을 흔히 볼 수 있다. 각 대기행렬에서의 가공방식으로는 완전(exhaustive)가공방식 즉, 그 대기행렬내의 부품이 모두 가공될 때까지 계속해서 가공한 후, 다음 대기행렬로 이동하는 방식이 있다. 또한 기계가 도착했을 때 그 대기행렬에 대기하고 있는 부품만을 가공하고 도중에 도착하는 부품은 다음 번 방문 때에 가공하는 게이트(gate)가공방식, 그리고 일종의 비축출형 우선권 대기행렬로 생각할 수 있는 제한(limited)가공방식 즉, 한 번 방문 때에 1개의 부품만을 가공하고 다음 대기행렬로 이동하는 방식 등이 있다. 모든 작업대에서 동일한 가공 규칙을 갖는 순환 생산시스템에 대하여서는 그 동안 많

은 연구가 이루어져 왔다[2,3,7,9]. 그러나, 요구품질이 서로 다른 부품을 동일 기계에서 처리하기 위한 생산시스템의 설계에 있어서 기계 이용률(traffic intensity)을 높이고, 시스템을 효율적으로 운용하기 위해서 각 대기행렬에서 서로 다른 가공방식을 취하는 혼합가공방식 모형의 도입은 매우 중요한 방법 중의 하나이다[5]. 따라서 본 연구에서는 이와 같이 복수개( $J$ 개)의 서로 다른 종류의 부품이 각각의 대기행렬에 도착하며, 1대의 기계가 순환하면서 각 대기행렬에서 미리 정해진 가공방식에 따라 가공하는 생산시스템을 고려한다. 한편, 제조리드타임(manufacturing lead time)중에서 대기시간이 차지하는 부분이 가장 크다고 알려져 있다[10]. 따라서 본 연구에서는 생산시스템의 성능 평가 척도로서 평균 대기시간을 고려하였다. 이와 같은 생산시스템의 대기시간은 지금까지 일반적으로 관련된 연립방정식을 유도하여 그 값을 구하

\* 동국대학교 산업공학과

였다[9]. 혼합가공방식을 고려한 연구로는 Ozawa[5], Takagi[8] 등이 있다. Ozawa[5]는 두 개의 대기행렬이 있는 시스템을 고려했으며, Takagi[8]는 복수개의 대기행렬이 있는 시스템의 대기시간에 대한 분포를 구하고, 평균 대기시간을  $O(J)$ 개의 연립방정식을 유도하여 구하였다. 본 연구에서는 보다 적은 수의 연립방정식으로부터 평균 대기시간을 구할 수 있는 방법을 제안하였다. 먼저 시스템의 거동을 잘 나타내는 적당한 변수들로 시스템의 상태를 정의하고, 평균 대기시간을 비용함수로 기술하여 이를 시스템 상태의 선형 함수의 형태로 유도하였다. 그리고, 이 선형 함수의 관계식으로부터 일반화된 리틀의 공식(generalized little's formula) 및 PASTA(Poisson arrivals see time averages)성질 등을 적용하여  $O(J)$ 개의 연립방정식으로부터 정상상태에서의 평균 대기시간을 구할 수 있음을 보였다.

제2절에서는 순환 생산시스템을 기호와 함께 자세히 기술하고 주어진 시스템에 대한 평균 대기시간을 비용함수로 정의하였다. 제3절에서는 임의의 주어진 시점에서의 시스템 상태를 분석하였다. 제4절에서는 임의의 주어진 시스템 상태에서의 비용함수를 시스템 상태의 함수로 유도하였다. 제5절에서는 일반화된 리틀의 공식과 PASTA 성질을 이용하여 이들 비용함수들의 정상상태에서의 값과 함께 임의의 시점에서의 시스템내의 부품 수를 구하였다. 끝으로 제6절에서는 본 연구의 알고리즘에 대한 수치 예를 보였다.

## 2. 모형과 기호

서로 다른  $J$ 종류의 부품을 한 대의 기계가 순환  $(1, 2, \dots, J, 1, 2, \dots)$ 하면서 가공하는 다품종 순환 생산시스템을 고려한다. 임의의 종류  $j$  부품은 도착률  $\lambda_j$ 를 갖는 포아송과정에 따라 대기행렬  $j$ 에 도착하며, 가공시간  $S_j$ 를 필요로 한다. 각 가공시간은 서로 독립이고 임의의 분포를 따른다. 각 대기행렬에서의 가공방식은 완전가공방식 혹은 게이트가공방식이다. 즉, 기계가 완전가공방식을 채택하고 있는 대기행렬에 도착하면 선착순(first come first served)에 따라 그 대기행렬내의 부품을 모두 가공한 후, 다음 대기행렬로 이동한다. 만약 게이트가공방식을 채택하고 있는 대기행렬에 도착하였다면 도착 시점에 그 대기행렬

에 대기중인 부품만을 선착순으로 가공하고 다음 대기행렬로 이동하며, 가공 중에 도착하는 부품은 다음 순환 때에 가공된다. 서로 다른 종류의 부품을 처리하기 위한 준비시간은 무시할 수 있다고 가정한다.

기계가 대기행렬  $j$ 에서 계속해서 가공하는 시간을 가공기간  $j$ (processing period  $j$ )라고 하고, 이들의 집합을  $J \equiv \{1, 2, \dots, J\}$ 로 나타낸다. 게이트 가공방식인 경우는  $G$ , 완전 가공방식인 경우는  $E$ 의 첨자를 사용하여 구별하기로 한다. 또한,  $\lambda \equiv \sum \lambda_j$ ,  $\rho_j \equiv \lambda_j E[S_j]$ ,  $\rho_j^+ \equiv \sum \rho_i$ 로 정의하고, 시스템의 안정상태 조건으로서  $\rho \equiv \rho_j^+ < 1$ 이라고 가정한다. 또한 도착과정과 가공시간은 서로 독립이라고 가정한다.  $c(t)$ 는 시점  $t$ 에서의 현재 가공기간(current period) 즉, 시점  $t$ 에서 기계가 가공중인 대기행렬을 나타낸다. 만약 기계가 시점  $t$ 에서 대기행렬  $c$ 의 부품을 가공하고 있다면,  $c(t) = c$ 이다.  $r(t)$ 는 시점  $t$ 에서 가공중인 부품의 잔여 가공시간(remaining processing time)을 나타낸다. 기계가 게이트가공방식을 채택하고 있는 대기행렬에서 가공중이라면 현재 가공기간 중에 도착하는 모든 부품은 다음 순환 때에 가공되기 때문에 대기행렬 내에 있는 부품 중에서 현재 가공기간 중에 가공되는 부품을 게이트 내의 부품이라고 부르고, 이를  $g(t)$ 로 나타낸다. 그러면 임의의 시점  $t$ 에서 기계가 가공 중인 대기행렬 내에 있는 부품은 현재 가공중인 부품, 게이트 내에 있는 부품, 현재 가공 중이지도 않고 현재 가공기간 중에는 가공되지 않는 부품으로 분류할 수 있다. 현재 가공 중이지도 않고 현재 가공기간 중에는 가공되지 않는 부품을 대기 부품이라고 부른다. 따라서 현재 기계가 가공하고 있지 않은 모든 대기행렬에 있는 부품은 대기부품이 되고, 이를 벡터  $n(t) \equiv (n_1(t), \dots, n_J(t))$ 로 나타낸다.  $n_j(t)$ 는 대기행렬  $j$ 에 있는 대기부품의 수를 나타낸다. 과정  $\{c(t) : t \geq 0\}$ ,  $\{r(t) : t \geq 0\}$  및  $\{g(t) : t \geq 0\}$ 는 우연속(right continuous)이고 좌극한(left-hand limits)을 가지며, 부품의 도착 시점에서는 좌연속이고, 우극한을 가진다고 한다. 한편,  $\{n(t) : t \geq 0\}$ 는 좌연속이고 우극한을 가진다고 한다. 본 연구에서는 임의의 시점  $\sigma^e$  ( $e = 1, 2, \dots$ )에 도착하는  $e$ 번째 부품에 주목한다. 또한  $i_{im}(t)$ 는 시점  $t$ 에서 대기행렬  $i$ 의  $m$ 번째 위치의 정보를 나타낸다. 만약 시점  $t$ 에서  $e$ 번째 도착 부품이 대기행렬  $i$ 의  $m$ 번째 위치에 있다면  $i_{im}(t) = \sigma^e$ 이고, 만약 시점  $t$ 에서 대기행렬  $i$ 의  $m$ 번째 위

차에 부품이 없다면  $l_{im}(t) = \infty$ 로 두고 이들 정보를 벡터  $L(t) = (l_{im}(t); i=1, \dots, J; m=1, 2, \dots)$ 로 나타낸다. 부품의 도착 시점과 가공기간의 완료시점을 이들 과정의 전이시점(transition epoch)으로 한다.  $X(t)$ 는 시점  $t$  이전의 최근 전이시점에서의 도착 부품의 종류를 나타낸다. 만약 최근 전이시점이 부품의 도착시점이 아니면  $X(t) = 0$ 로 둔다.  $X(t)$ 는 우연적이고 좌극한을 갖는다고 한다. 여기서, 이 시스템의 거동(evolution)을 나타내는 확률과정  $\{Y(t) = (X(t), c(t), r(t), g(t), n(t), L(t)); t \geq 0\}$ 를 정의한다.

그러면 이 확률과정은 앞서 기술한 가공방식에 대해, 부품의 도착 시점과 가공기간 완료시점을 전이시점으로 하는 정상전이확률(stationary transition probability)을 가지는 마코프과정을 내재(imbed)한다. 확률과정  $\{Y(t); t \geq 0\}$ 가 취하는 값을 시스템 상태라고 부른다.

시스템 상태  $Y = (x, c, r, g, n, L)$ 일 때 도착하는  $e$ 번째 부품의 평균 대기시간을 구하기 위하여 다음과 같은 3가지 형태의 비용함수를 정의한다.

- $W_j(Y, e)$ : 대기행렬  $j$ 에 도착해서부터 대기행렬  $j$ 가 가공되기 시작할 때까지의 평균 대기시간 (대기부품으로서의 평균 대기시간).
- $H_j(Y, e, i)$ : 임의의 대기행렬  $i$ 의 가공기간 동안 대기행렬  $j$ 에서의 평균 대기시간.
- $G_j(Y, e)$ : 대기행렬  $j$ 의 가공이 시작된 이후 자신의 가공이 시작 될 때까지의 평균 대기시간(게이트 내의 부품으로서의 평균 대기시간).

여기서  $x \neq j$ 이면 위의 비용함수 값은 모두 0이 된다. 그러면 시스템 상태  $Y = (x, c, r, g, n, L)$ 일 때 도착하는  $e$ 번째 부품의 도착에서부터 가공 직전까지의 총 평균 대기시간은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^J \{W_j(Y, e) + G_j(Y, e)\} \quad (2.1)$$

### 3. 시스템 상태의 분석

$Y = (x, c, r, g, n, L)$ 를 임의의 전이시점에서의 시스템 상태라고 할 때, 그 이후 기계가 대기행렬  $i$ 에 도착했을 때의

시스템의 상태를  $Y^i(Y)$ 로 나타내기로 한다. 즉,

$$Y^i(Y) \equiv (X^i(Y), c^i(Y), r^i(Y), g^i(Y), n^i(Y), L^i(Y))$$

여기서,  $n^i(Y) \equiv (n_1^i(Y), \dots, n_J^i(Y))$ 이며,  $n_j^i(Y)$ 는 그 시점에서 대기행렬  $j$ 에 있는 부품의 수를 나타낸다. 그러면,  $X^i(Y) = 0, c^i(Y) = i, E[r^i(Y)] + E[g^i(Y)]E[S_c] = E[n_j^i(Y)]E[S_j]$ 이다.  $R(Y)$ 를 현재의 가공기간  $c$ 를 완료하는데 소요되는 시간의 기대치라고 하면  $M/G/1$  대기행렬의 분석으로부터 다음 식을 얻을 수 있다[1].

$$R(Y) \equiv \begin{cases} \frac{r+(g+1)(x=c)E[S_c]}{1-\rho_c}, & c \in \Pi_E \\ r+gE[S_c], & c \in \Pi_G \end{cases} \quad (3.1)$$

여기서,  $1\{A\}$ 는 임의의 사상  $A$ 에 대하여  $A$ 가 일어나면 1의 값을 가지고, 그렇지 않으면 0의 값을 갖는 지시함수(indicator function)이다. 위 식(3.1)은 시스템 상태의 요소  $(r, g)$ 의 함수이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R(Y) = r\delta_r(c) + g\delta_g(c) + \delta(x, c) \quad (3.2)$$

단,

$$\delta_r(c) \equiv \begin{cases} 1/(1-\rho_c), & c \in \Pi_E \\ 1, & c \in \Pi_G \end{cases}$$

$$\delta_g(c) \equiv \begin{cases} E[S_c]/(1-\rho_c), & c \in \Pi_E \\ E[S_c], & c \in \Pi_G \end{cases}$$

$$\delta_c(x, c) \equiv \begin{cases} 1_{xc} E[S_c]/(1-\rho_c), & c \in \Pi_E \\ 0, & c \in \Pi_G \end{cases}$$

그러면 기계가 대기행렬  $i$ 에 도착하는 시점에 대기행렬  $j$ 에 있는 대기부품의 수  $n_j^i(Y)$ 는 (1)  $e$ 번째 부품의 도착 시점에 대기행렬  $j$ 에 있던 대기부품 (2) 가공기간  $c$  동안에 대기행렬  $j$ 에 도착하는 부품, (3) 가공기간  $c$ 를 완료한 후, 기계가 대기행렬  $i$ 에 도착할 때까지의 경과 시간 동안 대기행렬  $j$ 에 도착하는 부품들의 합이다. 한편 가공기간  $c$ 를 완료한 후, 기계가 대기행렬  $i$ 에 도착할 때까지

의 거치는 대기행렬(가공기간)을  $\Pi_{c,j}$ 로 나타낸다. 만약  $c < j$ 이면  $\Pi_{c,j} = \{c, c+1, \dots, j-1\}$ 이 된다. 따라서,

$$E[n_j^i(Y)] = n_j + 1_j(x, c) + \lambda_j R(Y) + \sum_{k \in \Pi_{c+1,j}} \lambda_j E[R(Y^k)] \quad (3.3)$$

단,  $x \neq j$  혹은  $x = c \in \Pi_E$ 이면,  $1_j(x, c) = 0$ , 그 이외는  $1_j(x, c) = 1$ .

한편,  $E[R(Y^k)] = \delta(k) E[n_k^k(Y)]$ 이므로 식(3.3)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E[n_j^i(Y)] = n_j + 1_j(x, c) + \lambda_j \{R(Y) + \sum_{k \in \Pi_{c+1,j}} \delta(k) E[n_k^k(Y)]\} \quad (3.4)$$

그러면, 행렬  $(E[n^1(Y)], \dots, E[n^j(Y)])$ 의 대각 요소는 다음과 같이 얻을 수 있다(여기서  $\delta$ 는 행렬의 전치를 나타냄).

$$N(Y) \equiv (E[n^1(Y)], \dots, E[n^j(Y)]) \\ = n + 1(x, c) + \{r\delta_j(c)1 + g\delta(c)1 + \delta(x, c)1 + N(Y)U(c)\}\Lambda \quad (3.5)$$

$$\text{단, } \Lambda \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix}$$

$$1(x, c) \equiv (1_1(x, c), \dots, 1_j(x, c)), \quad 1 \equiv (1, \dots, 1),$$

$$U(c) \equiv \begin{bmatrix} u_{11}(c) & u_{12}(c) & \dots & u_{1j}(c) \\ u_{21}(c) & u_{22}(c) & \dots & u_{2j}(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j1}(c) & u_{j2}(c) & \dots & u_{jj}(c) \end{bmatrix}$$

$$\text{여기서 } u_{kj}(c) \equiv \begin{cases} \delta(k), & k \in \Pi_{c+1,j} \\ 0, & k \notin \Pi_{c+1,j} \end{cases} \quad k, j = 1, \dots, j$$

따라서, 임의의  $c$ 에 대하여 역행렬  $(\Lambda^{-1}U(c))^{-1}$ 이 존재

한다면,  $N(Y)$ 는 다음과 같은 행렬의 형태로 구할 수 있고, 또한 상태  $Y$ 의 요소  $r, g, n$ 에 선형이라는 것을 알 수 있다.

$$N(Y) = \{(n+1(x, c))\Lambda^{-1} + r\delta_j(c)1 + g\delta(c)1 + \delta(x, c)1\}(\Lambda^{-1}U(c))^{-1} \quad (3.6)$$

### 4. 임의의 상태에서의 대기시간

본 절에서는 제2절에서 정의된 각 가공방식에 대하여 비용함수  $W_j(Y, e)$ ,  $H_j(Y, e, i)$ 와  $G_j(Y, e)$ 의 식을 각각 구하고, 그 일반식을 유도한다. 만약  $x \neq j$ 이면 위의 비용함수들은 모두 0이 되기 때문에,  $x = j$ 에 대해서만 고려한다.

#### 4.1 게이트 가공방식

기계가 게이트 가공방식을 따르는 대기행렬에 도착하면 그 시점에 대기중인 부품들만 가공을 하고, 그 대기행렬의 가공기간 중에 도착하는 부품은 다음 방문 때에 가공된다. 따라서 게이트 가공방식을 취하고 있는 대기행렬  $j$ 에 도착한  $e$ 번째 부품의 대기부품으로서의 평균 대기시간  $W_j^G(Y, e)$ 는 현재 가공기간  $c$ 의 잔여 시간과 현재 가공기간  $c$ 가 완료된 후 기계가 대기행렬  $j$ 에 도착할 때까지 거치는 가공기간들의 합으로 구성된다. 따라서

$$W_j^G(Y, e) = R(Y) + \sum_{k \in \Pi_{c+1,j}} E[R(Y^k)] \quad (4.1)$$

한편, 기계가 임의의 대기행렬  $j$ 에서 가공하고 있는 동안에 대기행렬  $j$ 에서 대기부품으로서의 평균 대기시간  $H_j^G(Y, e, i)$ 는  $c \neq i$ 인 경우에는 가공기간  $i$ 를 시작한 때부터 그 가공기간이 완료될 때까지의 시간이며,  $c = i$ 인 경우에는 그 부품의 도착에서부터 현재 가공기간  $c$ 가 완료될 때까지의 시간이다. 따라서,  $e$ 번째 부품의 가공이 완료될 때까지 기계가 지나지 않는 대기행렬들도 있음을 고려하면 다음 식을 얻는다.

$$H_j^G(Y, e, i) = \begin{cases} E[R(Y^i)] = E[n_i^i(Y)]\delta(i), & c \in \Pi_{j,i} \\ R(Y), & c = i \\ 0, & c \in \Pi_{i+j} \end{cases} \quad (4.2)$$

또한, 대기행렬  $j$ 의 가공을 시작한 때부터  $e$ 번째 도착 부품의 가공이 시작될 때까지 제이트 내에서의 대기시간  $G_j^G(Y,e)$ 는  $e$ 번째 부품보다 먼저 도착한 부품의 총 가공 시간과 같다. 따라서,

$$G_j^G(Y,e) = n_j E[S_j] \quad (4.3)$$

### 4.2 완전 가공방식

기계가 완전 가공방식을 따르는 대기행렬에 도착하면 그 대기행렬에 있는 부품이 모두 가공 완료될 때까지 계속해서 가공을 한 후, 다음 대기행렬로 이동한다. 따라서 완전 가공방식을 취하고 있는 대기행렬  $j$ 에 도착한  $e$ 번째 부품의 대기부품으로서의 평균 대기시간  $W_j^E(Y,e)$ 는 만약  $c=j$ 이면 0이고,  $c \neq j$ 이면 현재 가공기간  $c$ 의 잔여 시간과 현재 가공기간  $c$ 가 완료된 후 기계가 대기행렬  $j$ 에 도착할 때까지 거치는 가공기간들의 합이므로 다음과 같다.

$$W_j^E(Y,e) = \begin{cases} 0, & c=j \\ R(Y) + \sum_{k \in \Pi_{-j}} E[D(Y^k(Y))], & c \neq j \end{cases} \quad (4.4)$$

한편,  $H_j^E(Y,e,i)$ 는 가공기간  $i$ 의 길이와 같으므로,  $i=j$ 인 경우,

$$H_j^E(Y,e,j) = 0 \quad (4.5)$$

이고,  $i \neq j$ 인 경우,  $c \neq i$ 이면 가공기간  $i$ 를 시작할 때부터 그 가공기간이 완료될 때까지의 시간 간격과 같다. 또한  $c=i$ 이면 그 부품이 도착해서부터 현재 가공기간  $c$ 가 완료될 때까지의 시간과 같다. 따라서  $e$ 번째 부품의 가공을 완료할 때까지 기계가 거치지 않는 대기행렬들도 있음을 고려하면 다음 식을 얻는다.

$$H_j^E(Y,e,i) = \begin{cases} 0, & c=j \\ E[R(Y^i(Y))] = E[n_i^i(Y)]g(i), & c \in \Pi_{j+i} \\ R(Y), & c=i, \\ 0, & c \in \Pi_{i+j} \end{cases} \quad (4.6)$$

또한,  $G_j^E(Y,e)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$G_j^E(Y,e) = \begin{cases} r+gE[S_j], & c=j \\ n_j E[S_j], & c \neq j \end{cases} \quad (4.7)$$

### 4.3 비용 함수의 일반식

식(4.1)에서 식(4.7)로부터 비용 함수는 시스템 상태  $Y$ 의 요소  $(r, g, n)$ 에 대해 선형임을 알 수 있다. 따라서 상수의 계수  $\phi_j(c), \psi_j(c), w_j(c), \omega_j(c), \phi_j(c,i), \psi_j(c,i), w_j(c,i), \omega_j(c,i), \eta_j(c), \theta_j(c), g_j(c)$ 를 각 가공방식에 따라 적절히 선택함으로써 다음과 같이 일반식으로 나타낼 수 있다.

즉,  $x=j$ 인 경우,

$$W_j(Y,e) = r\phi_j(c) + g\psi_j(c) + nw_j(c) + \omega_j(c) \quad (4.8a)$$

$$H_j(Y,e,i) = r\phi_j(c,i) + g\psi_j(c,i) + nw_j(c,i) + \omega_j(c,i) \quad (4.8b)$$

$$G_j(Y,e) = r\eta_j(c) + g\theta_j(c) + ng_j(c) \quad (4.8c)$$

$x \neq j$ 인 경우,

$$W_j(Y,e) = 0, \quad H_j(Y,e,i) = 0, \quad G_j(Y,e) = 0 \quad (4.9)$$

따라서,  $e$ 번째 부품의 도착시점에서의 시스템 상태  $Y(\sigma^e)$ 에 대한 과도분포(transient distribution)를 알 수 있다면, 그 부품의 총 평균 대기시간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E \left[ \sum_{j=1}^J |W_j(Y(\sigma^e),e) + G_j(Y(\sigma^e),e)| \right] \quad (4.10)$$

그러나, 다음절에서는 과도분포를 구하는 대신, 대기시간에 대한 정상상태(steady state)의 값을 구한다.

## 5. 정상상태에서의 대기시간

제4절에서는 시스템 상태가 임의의  $Y$ 일 때 도착한 특정 부품에 대하여 비용함수를 분석하였다. 그러나 충분한 시간 동안 운영되어 온 시스템은 정상상태에 도달하게 될 것이다. 이 절에서는 비용함수  $W_j, H_j, G_j$ 의 정상상태에서의 값을 일반화된 리틀의 공식(generalized little's formula)[11]과 PASTA 성질[12] 등을 이용하여 구한다.  $\bar{q}^c$ 를 시스템이 가공기간  $c$ 에 있었던 시간의 비율이라고 두면  $\bar{q}^c$ 는 다음과 같다.

$$\bar{q}^c = \rho_c \tag{5.1}$$

또한, 현재가공기간이  $c$ 일 때, 그 잔여 가공기간의 기대치  $E[RLc]$ 의 정상상태의 값  $\bar{E}[RLc]$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{E}[RLc] = \frac{E[S_c^2]}{2E[S_c]} \tag{5.2}$$

그러면, 정상상태에서의 값을  $\bar{r}^c \equiv \bar{E}[RLc]\bar{q}^c$  라고 정의하면, 다음 식을 얻는다.

$$\bar{r}^c = \frac{\lambda_c E[S_c^2]}{2} \tag{5.3}$$

한편, 임의의  $e$ 번째 도착 부품이 대기행렬  $j$ 에서의 대기시간을 다음과 같이 나누어 정의한다.

- $W_j^e$ : 도착해서부터 대기행렬  $j$ 가 가공되기 시작될 때까지의 대기시간
- $H_j^e(i)$ : 대기행렬  $i$ 의 가공기간 동안 대기행렬  $j$ 에서의 대기시간
- $G_j^e$ : 대기행렬  $j$ 의 가공이 시작된 후 자신이 가공되기 직전까지의 대기시간

그리고, 총 평균 대기시간  $\bar{\omega}_{sj}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{\omega}_{sj} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{e=1}^N (W_j^e + G_j^e)}{\sum_{e=1}^N 1\{X(\sigma^e)=j\}} \tag{5.4}$$

$X(\sigma^e) \neq j$ 이면  $W_j^e = 0, G_j^e = 0$ 이므로,  $\bar{\omega}_{sj}$ 는 대기행렬  $j$ 에 도착하는 부품이 도착해서부터 가공되기 시작할 때까지의 평균 대기시간의 정상상태의 값을 나타낸다. 이 값을 구하기 위해 다음 식들을 정의한다.

$$\bar{H}_j(c,i) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N H_j^e(i) 1\{c(\sigma^e)=c\} \tag{5.5a}$$

$$\bar{W}_j(c) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N W_j^e 1\{c(\sigma^e)=c\} \tag{5.5b}$$

$$\bar{G}_j(c) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N G_j^e 1\{c(\sigma^e)=c\} \tag{5.5c}$$

또한,

$$\bar{W}_j \equiv \sum_{c=1}^J \bar{W}_j(c) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N W_j^e \tag{5.6a}$$

$$\bar{H}_j(i) \equiv \sum_{c=1}^J \bar{H}_j(c,i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N H_j^e(i) \tag{5.6b}$$

$$\bar{G}_j \equiv \sum_{c=1}^J \bar{G}_j(c) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N G_j^e \tag{5.6c}$$

그리고, 다음을 가정한다.

- (1) 확률과정  $\{Y(t) : t \geq 0\}$ 는 재생성 과정(regenerative process)이다[6].
- (2) 시스템은 초기에 0의 상태에서 시작된다.
- (3)  $N_B$ 를 한 재생사이클 동안 가공되는 부품수라고 할 때, 그 기대치  $E[N_B]$ 는 유한하다.

위 가정으로부터 식 (5.5a), (5.5b) 및 (5.5c)는 만약 다음 식에서 분자 항이 유한이라고 할 수 있다면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{W}_j(c) = \frac{E[\sum_{e=1}^{N_B} W_j^e 1\{c(\sigma^e)=c\}]}{E[N_B]} \tag{5.7a}$$

$$\bar{H}_j(c,i) = \frac{E[\sum_{e=1}^{N_B} H_j^e(i) 1\{c(\sigma^e)=c\}]}{E[N_B]} \tag{5.7b}$$

$$\bar{G}_j(c) = \frac{E[\sum_{e=1}^{N_B} G_j^e 1\{c(\sigma^e)=c\}]}{E[N_B]} \tag{5.7c}$$

부품의 도착시점에서 시스템 상태의 부품에 대한 평균 값  $\bar{Y}^c \equiv (\bar{X}^c, c\bar{q}^c, \bar{r}^c, \bar{g}^c, \bar{n}^c, \bar{L}^c)$ , (단,  $\bar{n}^c \equiv (\bar{n}_1^c, \dots, \bar{n}_J^c)$ )는 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{Y}^c \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N Y(\sigma^e) 1\{c(\sigma^e)=c\} \tag{5.8}$$

여기서  $\bar{q}^c$ 는 대기행렬  $c$ 의 부품을 가공하고 있을 때 도착하는 부품의 비율이다. 나아가, 부품에 대한 평균 값이 존재하고 또한,  $E[\sum_{e=1}^{N_B} n(\sigma^e) 1\{c(\sigma^e)=c\}] < \infty$ ,  $E[\sum_{e=1}^{N_B} g(\sigma^e) 1\{c(\sigma^e)=c\}] < \infty$  및  $E[\sum_{e=1}^{N_B} n(\sigma^e) 1\{c(\sigma^e)=c\}] < \infty$ 이라고 가정한다. 그러면 다음 값을 얻을 수 있다.

$$\bar{r}^c = \frac{E[\sum_{e=1}^{N_B} r(\sigma^e) | \{c(\sigma^e)=c\}]}{E[N_B]} < \infty \quad (5.9a)$$

$$\bar{g}^c = \frac{E[\sum_{e=1}^{N_B} g(\sigma^e) | \{c(\sigma^e)=c\}]}{E[N_B]} < \infty \quad (5.9b)$$

$$\bar{n}^c = \frac{E[\sum_{e=1}^{N_B} n(\sigma^e) | \{c(\sigma^e)=c\}]}{E[N_B]} < \infty \quad (5.9c)$$

한편, 시스템 상태의 시간에 대한 평균값  $\bar{Y}^c \equiv (\bar{X}^c, c\bar{q}^c, \bar{r}^c, \bar{g}^c, \bar{n}^c, \bar{L}^c)$  (단  $\bar{n}^c \equiv (\bar{n}^c_1, \dots, \bar{n}^c_j)$ ) 및  $\tilde{Y} \equiv (\tilde{X}, \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{g}, \tilde{n}, \tilde{L})$  (단  $\tilde{n} \equiv (\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_j)$ )는 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{Y}^c \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Y(s) | \{c(s)=c\} ds \quad (5.10)$$

$$\tilde{Y} \equiv \sum_{c=1}^J \bar{Y}^c = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Y(s) ds \quad (5.11)$$

그러면, 비용함수들의 정상상태의 값에 대한 식을 다음과 같이 얻는다. 식(4.8) 및 (5.9)로부터 식(5.7)의 분자 항이 유한임을 알 수 있다. 따라서 식(4.8), (5.7), (5.8) 및 (5.9)로부터 다음 식을 얻는다.

$$\bar{W}_j(c) = \frac{\lambda_j}{\lambda} \{ \bar{r}^c \phi_j(c) + \bar{g}^c \psi_j(c) + \bar{n}^c w_j(c) + \bar{q}^c \omega_j(c) \} \quad (5.12a)$$

$$\bar{H}_j(c,i) = \frac{\lambda_j}{\lambda} \{ \bar{r}^c \phi_j(c,i) + \bar{g}^c \psi_j(c,i) + \bar{n}^c w_j(c,i) + \bar{q}^c \omega_j(c,i) \} \quad (5.12b)$$

$$\bar{G}_j(c) = \frac{\lambda_j}{\lambda} \{ \bar{r}^c \eta_j(c) + \bar{g}^c \theta_j(c) + \bar{n}^c g_j(c) \} \quad (5.12c)$$

또한, 비용함수들의 시간에 대한 평균값과 부품에 대한 평균값에 대한 관계를 나타내는 일반화된 리틀의 공식 [11]으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{n}_j = \lambda \bar{W}_j \quad (5.13a)$$

$$\bar{n}_j^i = \lambda \bar{H}_j(i) \quad (5.13b)$$

$$\bar{g}_j = \lambda \bar{G}_j \quad (5.13c)$$

따라서 식(5.6), (5.12) 및 (5.13)으로부터, 임의의  $j(j=1, \dots, J)$ 에 대하여 다음 식을 얻는다.

$$\bar{n}_j = \lambda_j \sum_{c=1}^J \{ \bar{r}^c \phi_j(c) + \bar{g}^c \psi_j(c) + \bar{n}^c w_j(c) + \bar{q}^c \omega_j(c) \} \quad (5.14a)$$

$$\bar{n}_j^i = \lambda_j \sum_{c=1}^J \{ \bar{r}^c \phi_j(c,i) + \bar{g}^c \psi_j(c,i) + \bar{n}^c w_j(c,i) + \bar{q}^c \omega_j(c,i) \} \quad (5.14b)$$

$$\bar{g}_j(c) = \lambda_j \sum_{c=1}^J \{ \bar{r}^c \eta_j(c) + \bar{g}^c \theta_j(c) + \bar{n}^c g_j(c) \} \quad (5.14c)$$

또한 PASTA성질[2]로부터  $\bar{r}^c = \bar{r}^c$ ,  $\bar{q}^c = \bar{q}^c$ ,  $\bar{g}^c = \bar{g}^c$ ,  $\bar{n}^c = \bar{n}^c$  이므로, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{n}_j = \lambda_j \sum_{c=1}^J \{ \bar{r}^c \phi_j(c) + \bar{q}^c \omega_j(c) + \bar{g}^c \psi_j(c) + \bar{n}^c w_j(c) \} \quad (5.15a)$$

$$\bar{n}_j^i = \lambda_j \sum_{c=1}^J \{ \bar{r}^c \phi_j(c,i) + \bar{q}^c \omega_j(c,i) + \bar{g}^c \psi_j(c,i) + \bar{n}^c w_j(c,i) \} \quad (5.15b)$$

$$\bar{g}_j^i = \lambda_j \sum_{c=1}^J \{ \bar{r}^c \eta_j(c) + \bar{g}^c \theta_j(c) + \bar{n}^c g_j(c) \} \quad (5.15c)$$

위의 식들을 행렬의 형태로 풀기 위하여 다음과 같은 벡터와 행렬을 정의한다.

$$s_w \equiv \left\{ \sum_{c=1}^J \{ \bar{r}^c \phi_j(c) + \bar{q}^c \omega_j(c) \}, \dots, \sum_{c=1}^J \{ \bar{r}^c \phi_j(c) + \bar{q}^c \omega_j(c) \} \right\}$$

$$s_g \equiv \left\{ \sum_{c=1}^J \bar{r}^c \eta_j(c), \dots, \sum_{c=1}^J \bar{r}^c \eta_j(c) \right\}$$

$$s_w(i) \equiv \left\{ \sum_{c=1}^J \{ \bar{r}^c \phi_j(c,i) + \bar{q}^c \omega_j(c,i) \}, \dots, \sum_{c=1}^J \{ \bar{r}^c \phi_j(c,i) + \bar{q}^c \omega_j(c,i) \} \right\}$$

$$\bar{g} \equiv [\bar{g}_1^1, \dots, \bar{g}_J^J], \quad W(c) \equiv \{w_1(c), \dots, w_J(c)\},$$

$$W(c,i) \equiv \{w_1(c,i), \dots, w_J(c,i)\}, \quad G(c) \equiv \{g_1(c), \dots, g_J(c)\}$$

$$\Theta \equiv \begin{pmatrix} \theta_1(1) & \theta_2(1) & \dots & \theta_{J(1)} \\ \theta_1(2) & \theta_2(2) & \dots & \theta_{J(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1(J) & \theta_2(J) & \dots & \theta_{J(J)} \end{pmatrix},$$

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \psi_2(1) & \dots & \psi_{J(1)} \\ \psi_1(2) & \psi_2(2) & \dots & \psi_{J(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(J) & \psi_2(J) & \dots & \psi_{J(J)} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(i) \equiv \begin{pmatrix} \phi_1(1, i) & \phi_2(1, i) & \dots & \phi_J(1, i) \\ \phi_1(2, i) & \phi_2(2, i) & \dots & \phi_J(2, i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(J, i) & \phi_2(J, i) & \dots & \phi_J(J, i) \end{pmatrix}$$

그러면, 식(5.15)는 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\bar{n} = \{s_w + \bar{g} \Psi + \sum_{c=1}^J \bar{n}^c W(c)\} \Lambda \quad (5.16a)$$

$$\bar{n}^i = \{s_w(i) + \bar{g} \Psi(i) + \sum_{c=1}^J \bar{n}^c W(c, i)\} \Lambda \quad (5.16b)$$

$$\bar{g} = \{s_g + \bar{g} \theta + \sum_{c=1}^J \bar{n}^c G(c)\} \Lambda \quad (5.16c)$$

또한, 표현을 간략하게 하기 위해 다음과 같은 벡터와 행렬을 정의한다.

$$\hat{y} \equiv \{\bar{g}, \bar{n}^1, \dots, \bar{n}^J\}, \quad s \equiv \{s_g, s_w(1), \dots, s_w(J)\}$$

$$S \equiv \begin{bmatrix} \theta & \Psi(1) & \dots & \Psi(J) \\ G(1) & W(1,1) & \dots & W(1,J) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(J) & W(J,1) & \dots & W(J,J) \end{bmatrix},$$

$$S_w \equiv \begin{bmatrix} \Psi \\ W(1) \\ \vdots \\ W(J) \end{bmatrix}, \quad \Lambda_* \equiv \text{diag} \{ \Lambda, \Lambda, \dots, \Lambda \}$$

그러면, 식(5.16)으로부터 시스템 상태의 요소(n, g)의 정상상태 값들을 구하기 위해 다음과 같은 J+J개의 미지수를 가진 J+J개의 방정식들을 얻을 수 있다.

$$\hat{y} = \{s + \hat{y} S\} \Lambda_* \quad (5.17)$$

만약 다음 역행렬이 존재한다면, 식(5.17)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{y} = s \{ \Lambda_*^{-1} - S \}^{-1} \quad (5.18)$$

또한 시스템 내에 있는 대기부품의 수는 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{n} = \{s_w + \hat{y} S_w\} \Lambda \quad (5.19)$$

따라서 정상상태에 있어서 시스템 내에 있는 총 부품의 수는  $\bar{n} + \bar{g}$ 개이고, 평균 대기시간  $\bar{\omega}_s \equiv \{\bar{\omega}_{s1}, \dots, \bar{\omega}_{sJ}\}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{\omega}_s = \{\bar{n} + \bar{g}\} \Lambda^{-1} \quad (5.20)$$

### 6. 수치 예제

본 연구에서 제시한 알고리즘으로 평균 대기시간을 계산하기 위해 임의의 6개의 대기행렬을 가진 순환 생산시스템을 고려한다. 각 종류의 부품은 각 대기행렬에 각각 모수  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = \lambda_4 = 0.05, \lambda_5 = \lambda_6 = 0.125$ 를 갖는 포아송과정에 따라 도착하고 가공시간의 분포는 5단계 일랑분포(Erlang distribution)를 한다고 가정하고, 각 종류의 부품의 평균 가공시간을 초기 값  $E[S_1] = E[S_2] = E[S_3] = 0.1, E[S_4] = E[S_5] = E[S_6] = 0.4$ 에서 증가시켰다.

그림 1은 모든 대기행렬이 게이트 가공방식을 가질 때, 그림 2는 모든 대기행렬이 완전 가공방식을 따를 때, 그리고 그림 3은 대기행렬 1에서 3까지는 완전 가공방식을

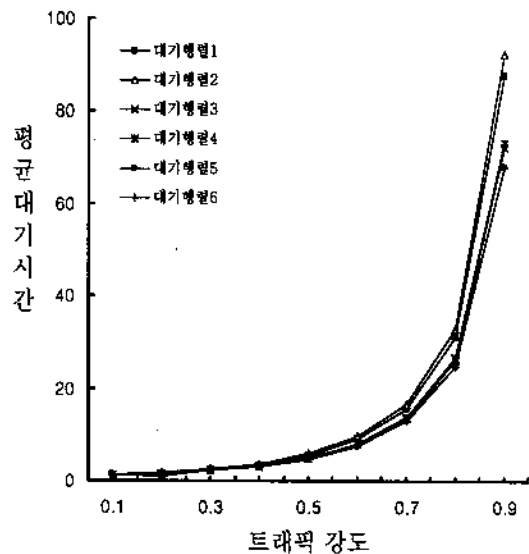


그림 1



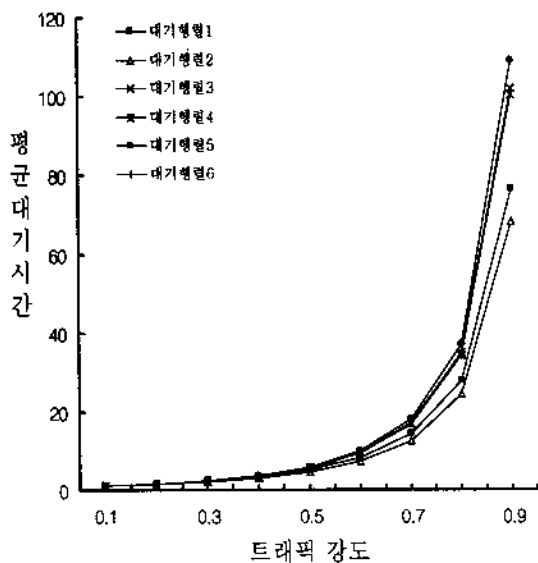


그림 2

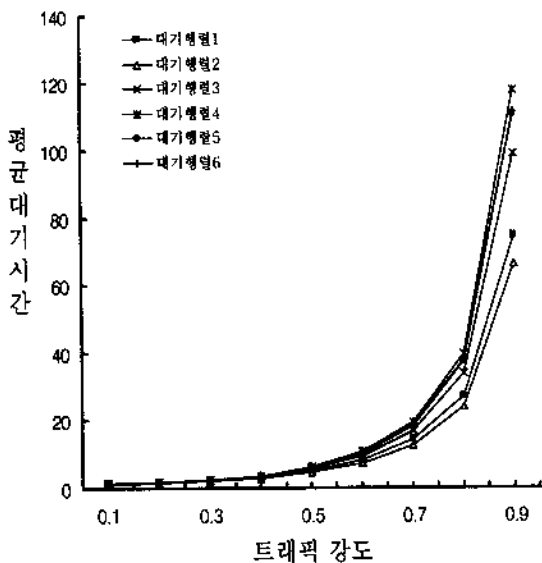


그림 3

대기행렬 4에서 6까지는 게이트 가공방식을 따를 때에 기계 이용률  $\rho$  에 대하여 각각의 평균 대기시간을 나타내고 있다.

### 참고문헌

- [1] 이호우, 대기행렬이론, 기술, 1996.
- [2] Cooper, R.B., "Queues served in cycle order: waiting times," *Bell System Technical Journal*, Vol. 49, pp. 399-413, 1970.
- [3] Ferguson, M.J. and Aminetzah, Y.J., "Exact results for nonsymmetric Token Ring Systems," *IEEE Transactions on Communications*, Vol.33, pp.223-232, 1985.
- [4] Harrison, J.M., "A priority queue with discounted linear costs," *Operations Research*, Vol. 23, pp. 260-269, 1975.
- [5] Ozawa, T., "An analysis for multi-queueing systems with cyclic-service discipline models with exhaustive and gated services(in Japanese)," *IEICE Technical report*, Vol. 87, No. 4, pp.19-24, 1987.
- [6] Ross, S.M., *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, 1976.
- [7] Sarka, D. and Zangwill W.I., "Expected waiting times for nonsymmetric cyclic queueing systems-Exact results and applications," *Management Science*, Vol. 35, pp.1463-1474, 1989.
- [8] Takagi, H., "Analysis of Polling Systems with a Mixture of Exhaustive and Gated Service Discipline," *J. Oper. Res. Soc. Japan*, Vol. 32, pp.450-461, 1989.
- [9] Takagi, H., "Queueing analysis of Polling model: An Update," in: *Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems*, Editor H. Takagi, Elsevier North-Holland, 1990.
- [10] Viswanadham, N. and Narahari, Y., *Performance Modeling of Automated Manufacturing Systems*, Prentice-Hall, Inc., 1992.
- [11] Whitt, W., "A review of  $L=\lambda W$  and extensions," *Queueing Systems*, Vol.9, pp.235-268, 1991.
- [12] Wolff, R.W., "Poisson arrivals see time averages," *Operations Research*, Vol. 30, pp.223-231, 1982.