# 논리-대수 구조에 관한 연구

## - 격자 구조의 논리 철학적 함의에 관하여 -

양은석
(연세대 강사)

**요 약** 이 글의 기본적인 목적은 논리 체계의 근간이 되는 구조의 중요성을 부각시키는데 있다. 이를 위하여 여기서는 그러한 구조 논의가 격자를 통해 마련될 수 있다는 점을 논리, 철학적으로 예증하였다. 구체적으로 첫째로 그간 이질적인 체계로 간주되어 온 명제를 대상으로 한 고전 논리와 직관주의 논리, 다치 논리가 모두 격자 구조를 갖는다는 것을 형식적으로 증명하였다. 둘째로 격자 구조가 갖는 철학적 함의를 멱등법칙을 중심으로 검토하였다.

**주요어** 격자, 멱등법칙, 논리 대수, 논리 구조.

## 1. 들어가는 말

이 글은 다음의 두 가지를 목적으로 한다. 첫째는 형식 논리학의 의미 해석이나 공리 연역의 근간이 되는 논리적 구조의 중요성을 부각시키고자 한다. 둘째는 그러한 구조에 대한 형식적 논의가 격자를 통해 일정 정도 마련될 수 있다는 점을 논리, 철학적으로 예증하고자 한다.

이러한 논의의 필요성은 다음의 두 가지 문제 상황에서 발견할 수 있다. 첫째는 최근 형식 논리학 내에서 논리학이 점차 다양화되고 있다는 점이다. 그에 따라 그 동안 논리학의 영역에서 간과되었던 시제, 미결정성, 불확정성, 애매성 등의 논제들을 체계적으로 검토할 수 있게 되었다. 그러나 이러한 논제들은 논리 대수(algebra of logic)로 알려진 불대수 구조 안에서는 더 이상 처리될 수 없는 문제점을 수반한다. 그리고 형식의 다양화는 그간 형식

화되었거나 앞으로 형식화될 모든 것들을 형식 논리학의 범주에 귀속시킬 수 있는지와 같은 철학적인 문제를 야기한다. 둘째로 첫째 문제와 관련하여 그 동안 일반적으로 수용되어 온 학의 논리학에 대한 분류에는 간과된 주요한 문제가 있다는 것이다. 학은 고전 논리학에서 타당한 논리식들을 보존하는가 아닌가에 따라 고전 논리에 대비되는 논리 체계들을 고전 논리를 연장한 확장 논리와 그것에 대결하는(rivalry) 일탈 논리로 나누고 있다.(Haack(1996), 2~4쪽) 이 때 그 스스로 구조의 중요성을 강조하고 있음에도 불구하고(같은 책, ix) 학은 그러한 논리식들의 타당성 범위가 구조적으로 상호 일치하지 않는다는 점을 깨닫고 있지 못하다.

학이 어려울 것으로 생각했던 것(같은 책, xxvi)과는 달리 논리 체계들의 분류는 형식적으로 수행될 수 있다.[1] 그리고 격자 구조가 그에 맞는 역할을 할 수 있다는 것이 필자의 주장이다. 즉 형식 논리학 내에서 논리 체계들 간의 형식적 분류는 격자 구조를 통해 상당 부분 마련될 수 있다. 이를 예증하기 위해 여기서 보이고자 하는 것은 그간 이질적인 체계로 간주되어 온[2] 명제를 대상으로 하는 고전 논리나 직관주의 논리, 다치 논리 계산(calculus) 모두 격자 구조를 갖는다는 것이다. 이에 대한 형식적 논의가 2절에서 이루어질 것이다. 그리고 3절에서는 그러한 격자 구조가 논리학 내에서 왜 중요한지에 대한 철학적 논의가 수행될 것이다. 마지막으로 4절에서는 이러한 논의가 논리 철학적으로 함축

1) 필자는 첫째 문제와 관련하여 임의의 논리 체계가 특정 구조를 넘어서 적용될 수 없다는 점에서도 학의 분류가 갖는 문제는 결코 간과될 수 없는 문제라고 생각한다. 그러나 이러한 점에 대한 본질적인 문제 제기가 아직 이루어지지 못하였다.

2) 물론 경우에 따라서는 타당한 논리식의 구문론적 범위에 따라 직관주의 명제 논리는 고전 명제 논리의 종속 체계(subsystem)로 간주되기도 한다.

하는 바를 간단히 재고할 것이다.

## 2. 논리 계산과 격자 : 논리 계산의 구조 논의를 중심으로

고전 역학이나 상대성 이론과 같은 역학 체계가 특정 기하에 의존하는 것처럼 논리 체계 또한 논리 대수적 구조에 의존하게 된다. 그러한 점을 가장 잘 보여주는 것은 고전 논리에 대한 불대수 구조의 관계이다. 불대수 공리에 해당하는 여법칙은 고전 논리에 전제된 2치(two-value)의 특성을 잘 반영해 준다.(Kneale(1978), 413쪽 참조)[3] 실제로 고전 명제 논리의 의미 해석에 사용되는 진리표를 통한 논리적 원리들의 타당성 검토나 대수적 방법을 동원하여 이디얼(ideal)이나 필터(filter)를 사용한 논리적 원리들의 타당성 검토는 여법칙의 특성을 이용한 것들이다.[4] 그리고 그러한 논리적 원리들의 '타당성'은 대수적으로 불대수 구조를 넘어선 영역까지 일반적으로 적용될 수는 없다.[5]

이와 관련하여 주목할 것이 격자 구조이다. 그 이유는 다음의 두 가지 사실에 있다. 첫째는 고전 명제 논리뿐만 아니라 직관주의 논리와 다치 논리 체계 모두 격자 구조 안에서 이해될 수 있다는 점이다. 둘째는 격자 구조는 수 연산과 구별되는 논리 연산에 적합한 멱등법칙(idempotency)을 기본 공리로 한다는 점이다.

필자는 이 두 가지 측면에 대한 논의가 격자 구조가 논리-대수적으로 왜 중요한지를 보여줄 수 있다고 생각한다. 즉 첫째 측면에 대한 논의는 격자 구조가 논리학 내에서 갖는 형식적 중요성

---

3) 그런 점에서 아리스토텔레스가 삼단논법의 공리로 언명한 배중률, 모순율의 공리적 성격을 발견할 수 있다. 필자는 이러한 논리식을 프레게, 러셀을 통해 보여진 연역 공리(deductive axioms)와 대비적으로 구조 공리(structural axioms)로 명명하여 4절에서 그 철학적 문제를 검토할 것이다.

4) 후자와 관련하여 Stoll(1963), 6.6~6.9절과 Halmos(1956), 363~87쪽을 참조할 것.

5) 이와 관련하여 졸고(1997b), 121~28쪽을 참조.

을 일깨워 줄 것이다. 그리고 둘째 측면에 대한 논의는 격자 구조와 더불어 멱등법칙이 논리학 내에서 차지하는 철학적인 중요성을 드러내 줄 것이다. 이에 대한 첫째 논제를 검토하는 것이 이 절의 과제이다.

구체적으로 여기서 필자가 보이고자 하는 것은 명제를 대상으로 하는 고전 논리와 직관주의(하이팅) 논리, 루카치비츠의 무한 다치 논리 계산 모두 격자 구조를 갖는다는 것이다. 이를 위하여 2.1절에서는 격자에 관한 기본적인 정의를 제공할 것이다. 그리고 2.2절에서는 언급한 논리 체계들이 어떤 격자를 갖게 되는지를 대수적으로 검토할 것이다.[6]

### 1) 격자 정의

여기서는 다음 절에서의 논의를 위한 격자구조의 기초적인 정의를 제공할 것이다.[7] $\forall$, $\in$와 같은 기본적인 기호법에 대한 이해를 전제로 각각의 격자는 다음으로 정의될 수 있다.

[정의1-1] 부분 순서집합 (partially ordered set(poset))

다음의 세 가지 법칙을 만족하는 공집합이 아닌 집합 P와 P위에서의 이항관계 $\leq$로 이루어진 쌍 (P, $\leq$)을 부분 순서집합이라고 한다: $\forall x, y, z \in P$,

R1. 반사 법칙 : $x \leq x$
R2. 이행 법칙 : $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$
R3. 반대칭(anti-symmetric) 법칙 : $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$

---

6) 각각의 논리 계산이 격자를 형성한다는 점은 이미 기존의 연구서에서 밝혀진 바이기 때문에 여기서는 필자의 논의와 연관된 한도 내에서 형식적 논의를 전개할 것이다.

7) 격자에 대한 보다 자세한 논의를 위해서는 Gierz 외(1980)를 참조할 것.

[정의1-2] (집합에 의한) 격자 (lattice)

부분 순서집합 P의 임의의 두 원소 x, y의 쌍이 극대값(Max)과 극소값(Min)을 가질 경우, 이를 격자라고 한다.

(이하 Max(x,y)를 *(x,y)로 Min(x,y)를 ·(x,y)로 표시한다. 이 때 * 연산을 결합(join)이라고 하고 ·를 교우(meet)라고 한다.)

[정의1-3] 대수 정의

$\alpha$는 공집합이 아닌 전체집합 U에 기초한 집합들의 대수이다:

$(U, \alpha) =_{df} \alpha = \alpha \cup_{x \subset u} x, \; x \neq \phi$, s.t.

(i) $A, B \in \alpha$이면 $A * B, A \cdot B \in \alpha$

(ii) $A \in \alpha$이면 $A' \in \alpha$

[정의1-4] (대수에 의한) 격자 L

다음의 법칙을 만족하는 이항 관계연산을 갖는 대수를 격자 L이라고 한다: $\forall x, y, z \in \alpha$,

L1. 멱등법칙 : $x * x = x \& x \cdot x = x$

L2. 교환법칙 : $x * y = y * x \& x \cdot y = y \cdot x$

L3. 결합법칙 : $(x * y) * z = x * (y * z) \& (x \cdot y) \cdot z) = x \cdot (y \cdot z)$

L4. 흡수법칙 : $(x * y) \cdot x = x \& (x \cdot y) * x = x$[8]

[정의1-5] 배분격자 (distributive lattice $L_D$)

배분법칙을 만족하는 격자를 배분격자 $L_D$라고 한다: $\forall x, y, z \in L$

L5. 배분법칙 : $x \cdot (y * z) = (x \cdot y) * (x \cdot z) \;\&\; x * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (x * z)$

[정의1-6] 여격자 (complemented lattice $L_C$)

여법칙을 만족하는 0, 1을 갖는 격자를 여격자 $L_C$라고 한다; 다음을 만족하는 원소 0, 1을 갖는 격자를 여격자라고 한다:

8) [정의1-2]로부터 [정의1-4]를 끌어낼 수 있고 그 역도 가능하다: 이의 증명은 핀터(C. C. Pinter(1984)), 4.40과 4.42 참조.

L6. $\forall x,\ 0 \leq x \leq 1$
L7. $\forall x \in L,\ \exists x' \in L$ s.t. $x * x' = 1 \& x \cdot x' = 0$

[정의1-7] 여배분격자 $L_{CD}$
P1-P7을 만족하는 격자를 여배분격자 $L_{CD}$라고 한다.

불대수는 여배분격자로 정의된다.

[정의1-8] 쌍대 원리 (duality principle)
격자 체계 내에서 임의의 등식에 대한 쌍대(dual)는 다음의 대치를 통해 얻어진 등식을 의미한다:
(i) $\vee \Rightarrow \wedge \& \wedge \Rightarrow \vee$
* 여배분격자(불대수)의 경우 다음의 조건이 추가된다:
(ii) $1 \Rightarrow 0 \& 0 \Rightarrow 1$

## 2) 논리 대수 구조

격자 구조가 논리적으로 중요한 이유는 논리 상항으로 간주되는 논리합(∨)과 논리곱(∧)이 결합(*)과 교우(·)의 역할을 하고 있기 때문이다.[9] 형식 의미론의 측면에서 보았을 때, 논리합과 논리곱은 집합에 관한 합과 곱처럼 결합, 교우 연산을 만족하는 특수한 해석으로 간주될 수 있다. 그러나 역사적으로 보면 교우, 결합 연산의 사용은 논리합과 논리곱에서 비롯된 것이다.[10] 이와 연관된 철학적 논의는 3절로 미루고 여기서는 근본 대상을 명제

---

9) 그 점을 가장 잘 보여주는 것이 [정의1-2]에 사용한 Min, Max 정의이다. 진리표를 통한 논리 연산 논리합과 논리곱의 의미 해석은 Max, Min 연산을 통해 정의될 수 있다.

10) 격자 개념 특히 배분격자는 쉬뢰더가 논리 대수에 대한 논의에서 논리합과 논리곱 연산(또는 합집합, 교집합 연산)에 기초하여 정립한 것이다. 그리고 '격자'와 '결합', '교우'란 명명은 벌코프에서 비롯된 것이다.

로 하고 그 위에 논리합과 논리곱 연산을 적용할 경우, 고전 논리 체계와 하이팅 논리 체계 그리고 루카치비츠 다치 논리 체계가 기본적으로 어떤 격자를 갖게 되는지를 보이기로 하겠다.

### (1) 고전 명제 논리와 여배분격자

고전 명제 계산 $P_C$가 불대수 구조를 갖는다는 것은 이미 널리 알려진 사실[11]이므로 여기서는 따로 계산 체계를 구성하지 않고 그 점만을 정리로 지적한다. $A \supset B$는 $A \leq B$에 상응하고 $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$는 $A = B$에 상응한다. 이 때 $(A \supset B) \wedge (B \supset A) = (A \equiv B)$란 정의 하에서 다음의 정리가 성립한다.

[정리2-1] 명제 집합 P 위에서 $\vee$, $\wedge$, $\neg$은 여배분격자 $L_{CD}$를 형성한다.

〈증명〉 고전 명제 계산 $P_c$는 불대수 구조를 갖고 불대수는 여배분격자이므로 ■

### (2) 직관주의 명제 논리와 배분격자[12]

여기서는 하이팅이 제시한 직관주의 명제 논리의 공리 연역 계산 방식을 기초로 직관주의 명제 논리 체계를 구성한다. 그리고 대수적으로 그것이 배분격자를 형성한다는 점을 보인다.

〈1〉 직관주의 명제 계산 $P_I$

직관주의 명제 계산 $P_I$를 위한 원초적 기호들은 다음과 같다:

---

11) 고전 명제 계산과 불대수에 관한 보다 자세한 논의를 위해서는 Stoll(1963), 6.6~6.9절과 Tarski(1956), XII, XVII장을 참조할 것.

12) 직관주의 명제 논리와 관련을 맺는 하이팅 대수는 상관 가-여 배분격자 (relatively pseudocomplemented distributive lattice)를 형성한다. 이는 가-불 격자(pseudo-boolean lattice)나 절대 함축 격자(absolute implicative lattice) 등과 같다.(Curry(1963), 164쪽, Gierz 외(1980), 29쪽 참조)

1. 명제 기호 : p, q, r …

2. 논리 상항 : →, ∧, ∨,

3. 그 외 : [, ], (, ), F.

원초적 기호들의 임의의 유한 열을 식이라고 한다. 그리고 $P_I$의 잘 형식화된 식(wff)은 다음 규칙에 의해 귀납적으로 정의된다:

W1. 임의의 명제는 잘 형식화된 식이다.

W2. F는 잘 형식화된 식이다.

W3. A와 B가 잘 형식화된 식일 경우, A→B, A∨B, A∧B 또한 잘 형식화된 식이다.

W4. 규칙 W1, W2, W3에 의해 잘 형식화된 식일 경우에만 임의의 식은 잘 형식화된 식이다.[13)]

여기서 ¬A를 A→F의 생략으로 사용한다. 그리고 ¬를 '부정 기호'로 부른다.

① (증명을 위한) 기호들의 정의

⊢I는 "직관주의 명제 계산 $P_I$에서 증명가능하다"를 의미하고 ⊬I는 "직관주의 명제 계산 $P_I$에서 증명가능하지 않다(모순을 발생시킨다)"를 의미한다고 할 때,

⊢I A∧B iff ⊢I A 그리고 ⊢I B

⊢I A∨B iff ⊢I A 또는 ⊢I B

⊢I ¬A iff ⊬I A

⊢I A→B iff ⊢I A이면, ⊢I B 가 성립한다.[14)] (이하 ⊢I 기호 생략)

---

13) 여기서 대문자 A, B, C 등은 임의의 잘 형식화된 식들을 대표하고 소문자 p, q, r 등은 특수한 명제 문자를 지시한다. (특수한 명제 문자는 $p_1$, $p_2$, $p_3$과 같은 p에 관한 첨자 형식으로 지시될 수도 있음.) 이하 루카치비츠 무한 다치 명제 계산도 마찬가지임.

14) 좀더 정확한 해석을 위해서는 Heyting(1956), 98쪽을 참조.

② 형식 체계

여기서 공리는 도식 형식으로 제시된다.

[공리2-2] $P_I$의 공리는 다음의 형식으로 주어진다.

공리1. $A \rightarrow (A \wedge A)$

공리2. $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$

공리3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C))$

공리4. $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

공리5. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$

공리6. $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

공리7. $A \rightarrow (A \vee B)$

공리8. $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$

공리9. $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$

공리10. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

공리11. $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A$

[추론규칙2-3]

1. 긍정식 : A와 $A \rightarrow B$로부터 B를 추론할 수 있다.
2. 연접 : A, B로부터 $A \wedge B$를 추론할 수 있다.

(이하의 증명을 위한 연역 정리는 고전 명제 논리의 연역 정리와 차이가 없으므로 생략.)

〈2〉 논리 대수 구조

여기서는 ∧와 ∨ 사이의 쌍대 원리([정의1-8])와 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = (A \equiv B)$란 정의를 통해 직관주의 명제 계산 $P_I$가 배분격자를 형성한다는 것을 보인다.

[정리2-4] 명제 집합 P 위에서 ∨, ∧은 배분격자 $L_0$를 형성한다.[15]

---

15) 연역 정리에 의해 각각의 공리는 추론 도식 형태로 이해될 수 있으므로 편의

〈증명〉

(L1)

( i a) $A \to (A \wedge A)$ (공리1).

( i b) $(A \wedge A) \to A$

1. $A \to (A \to A)$(공리5), 2. $(A \to (A \to A)) \to [(A \wedge A) \to ((A \to A) \wedge A)]$(공리3), 3. $(A \wedge A) \to ((A \to A) \wedge A)$(1, 2의 긍정식), 4. $((A \to A) \wedge A) \to (A \wedge (A \to A))$(공리2), 5. $(A \wedge (A \to A)) \to A$(공리6), 6. $(A \wedge A) \to (A \wedge (A \to A))$(3, 4와 공리4)[16], 7. $(A \wedge A) \to A$(6, 5와 공리4).

( ii ) $A \equiv (A \vee A)$((i)과 쌍대 원리에 의해).

(L2)

(i) $A \wedge B \equiv B \wedge A$(공리2), ( ii ) $A \vee B \equiv B \vee A$(쌍대 원리에 의해)

(L3) 이하의 증명을 위한

[보조정리2-5]

1. $(A \wedge B) \to A$
2. $(A \wedge B) \to B$
3. $A \to A$
4. $B \to (A \vee B)$

〈증명〉 Epstein(1995), 281쪽. ■

(L3)

( i a) $(A \wedge (B \wedge C)) \to ((A \wedge B) \wedge C)$

1. $A \wedge (B \wedge C)$(전제), 2. $B \wedge C$(1과 [보조정리2-5]:2), 3. B(2

---

상 연언과 함축관계를 추론에도 적용하여 증명을 시도한다.

16) 6을 엄밀화하면 다음과 같다: 6.1. $[(A \wedge A) \to ((A \to A) \wedge A)] \wedge [((A \to A) \wedge A) \to (A \wedge (A \to A))]$ (3, 4의 연접), 6.2. $[(A \wedge A) \to ((A \to A) \wedge A)] \wedge [((A \to A) \wedge A) \to (A \wedge (A \to A))] \to [(A \wedge A) \to (A \wedge (A \to A))]$ (공리4), 6.3. $[(A \wedge A) \to (A \wedge (A \to A))]$ (6.1, 6.2의 긍정식). 이하 증명에서 유사한 과정은 이와 모두 마찬가지임.

와 [보조정리2-5]:1), 4. A(1과 [보조정리2-5]:1), 5. A∧B(3, 4의 연접), 6. C(2와 [보조정리2-5]:2), 7. (A∧B)∧C(5, 6의 연접). 8. (A∧(B∧C))→((A∧B)∧C)(1, 7과 연역정리[17]).

( i b) ((A∧B)∧C)→(A∧(B∧C))((ia)와 유사한 방법으로).

( ii ) ((A∨B)∨C)≡(A∨(B∨C))((i)과 쌍대 원리에 의해).

(L4)

( i a) ((A∨B)∧A)→A

1. ((A∨B)∧A)(전제), 2. A(1과 [보조정리2-5]:2). 3. ((A∨B)∧A)→A (1, 2).

( i b) A→((A∨B)∧A)

1. A(전제), 2. A∨B(1과 공리7), 3. A(1과 [보조정리2-5]:3), 4. ((A∨B)∧A)(2, 3의 연접). 5. A→((A∨B)∧A)(1, 4).

( ii a) ((A∧B)∨A)→A

1. A∧B(전제), 2. A(1과 [보조정리2-5]:1), 3. A(전제), 4. A(3과 [보조정리2-5]:3), 5. ((A∧B)∨A)→A(1, 2와 3, 4 그리고 공리9).

( ii b) A→((A∧B)∨A)([보조정리2-5]:4).

(L5)

( i a) (A∧B)∨C→(A∨C)∧(B∨C)

1. A∧B(전제), 2. A(1과 [보조정리2-5]:1), 3. A∨C(2와 공리7), 4. B(1과 [보조정리2-5]:2), 5. B∨C(4와 공리7), 6. (A∨C)∧(B∨C)(3, 5의 연접), 7. C(전제), 8. A∨C(7과 [보조정리2-5]:4), 9. B∨C(7과 [보조정리2-5]:4), 10. (A∨C)∧(B∨C)(8, 9의 연접), 11. (A∧B)∨C→(A∨C)∧(B∨C)(1, 6과 7, 10 그리고 공리9)

17) 이하 연역정리 생략.

( i b) $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee C$

1. $A^2$, $B^1$ 2. $A \wedge B$(연접 규칙), 3. $(A \wedge B) \vee C$(2와 공리7), 4. C(전제), 5. $(A \wedge B) \vee C$(4와 [보조정리2-5]:4), 6. $B \vee C \rightarrow (A \wedge B) \vee C$($1^1$, 3과 4, 5 그리고 공리9), 7. $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$(전제), 8. $B \vee C$(7과 [보조정리2-5]:2), 9. $(A \wedge B) \vee C$(8, 6의 긍정식), 10. $A \vee C \rightarrow (A \wedge B) \vee C$($1^2$-5와 공리9), 11. $A \vee C$(7과 [보조정리2-5]:1), 12. $(A \wedge B) \vee C$(11, 10의 긍정식), 13. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee C$(7, 9와 7, 12 그리고 L1)

(ii) $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$((i)과 유사한 방법으로). ■

그러나 널리 알려진 대로 직관주의 명제 계산 $P_I$에서 논리적 원리 배중률은 더 이상 타당하지 않다. 따라서 $P_I$에서 여법칙은 성립하지 않는다. 이를 정리로 나타내면 다음과 같다.

[정리2-6] 명제 집합 P 위에서 ∨, ∧, ¬은 여배분격자 $L_{CD}$를 형성하지 않는다.

### (3) 루카치비츠 무한 다치 논리와 배분격자[18)]

여기서는 명제 논리 계산의 진리표와 유사한 타당성 검토 방식을 통해 루카치비츠의 무한 다치 명제 계산이 배분격자 $L_D$를 형성한다는 점을 보인다. 이를 위하여 공리 연역이 아닌 의미 해석 방식을 채택한다.

〈1〉 $P_{L\chi}$의 형식 의미 해석

루카치비츠 무한 다치 명제 계산 $P_{L\chi}$의 원초적 기호들과 잘 형

18) 여기서 필자가 고려하고 있는 루카치비츠의 무한 다치 명제 논리는 유계합을 근간으로 하는 잘 알려진 다치 대수(MV-algebra)와 구별될 필요가 있다. 정의상 같아질 수는 있으나 유계합을 사용할 경우, 필자 논의의 주 원리인 멱등법칙이 보존되지 않는다.(Belluce(1995), 7쪽 참조) 여기서의 명제 대수는 논리합과 곱을 근간으로 한다.

식화된 식에 관한 규칙은 직관주의 명제 계산의 형식화 방법과 같다. (단 F 대신 ㄱ을 사용한다. 따라서 둘째 규칙은 다음으로 나타내질 수 있다: W2. A가 잘 형식화된 식일 경우, ㄱA 또한 잘 형식화된 식이다.)

① (증명을 위한) 기호들의 정의

$P_{L\chi}$는 진리치를 0, 1의 연속값 [0, 1]로 하여 의미 해석이 이루어진다. 진리치는 다음의 함수이다:

$$v:P \to [0, 1], \ \forall pi \in P \ (i \in \omega)$$

그리고 그것은 다음의 연산표([정의2-7])에 의해 L(ㄱ, ∧, ∨, →, p0, p1, …)의 모든 잘 형식화된 식으로 귀납적으로 확장될 수 있다.

[정의2-7] 연산

루카치비츠 논리의 형식 의미 해석을 위한 논리 상항들의 사용은 다음으로 정의된다.

1. 부정 $v(\neg A)=1-v(A)$
2. 함축 $v(A\to B)=1, \quad v(A)\leq v(B)$
   $[1-v(A)]+v(B), \quad v(A)\geq v(B)$
3. 논리곱 $v(A\wedge B)=\wedge[v(A), v(B)]$
4. 논리합 $v(A\vee B)=\vee[v(A), v(B)]$

이 때 ∨, ∧는 Max, Min 값에 해당하고, $v(A\to B)\wedge v(B\to A)=v(A\equiv B)$ 정의에 해당하는 $v(A\equiv B)$는 다음의 표를 갖는다.

$$v(A\equiv B)=\begin{cases}1, & v(A)=v(B)\\ [1-v(A)]+v(B), & v(A)>v(B)\\ [1-v(B)]+v(A), & v(A)<v(B)\end{cases}$$

동어반복은 고전 명제 논리와 마찬가지로 다음으로 정의된다:

잘 형식화된 식 A는 동어반복이다. iff $\forall v$, $v(A)=1$

〈2〉 논리 대수 구조

여기서는 쌍대 원리와 $v(A\equiv B)$ 정의에서 $v(A\equiv B)=1$, $v(A)=v(B)$인 점을 이용해서 동어반복 형식을 통해 $P_{L\chi}$가 배분격자 $L_D$를 형성한다는 것을 보인다.

[정리2-8] (무한 다치) 명제 집합 P 위에서 $\vee$, $\wedge$는 배분격자 $L_D$를 형성한다; $P_{L\chi}$에서 L1-L5의 잘 형식화된 식들은 동어반복이다.

〈증명〉

여기서는 $v(A\equiv B)=1$, $v(A)=v(B)$를 $A=B$로 하여 $P_{L\chi}$가 배분격자를 형성한다는 점을 보인다.

(L1)

(i) $A\vee A=A$ : $\vee[v(A), v(A)]=v(A)$,

(ii) $A\wedge A=A$ : $\wedge[v(A), v(A)]=v(A)$.

(L2)

(i) $A\vee B=B\vee A$

Case1) $v(A)>v(B)$인 경우, $\vee[v(A), v(B)]=v(A)$ & $\vee[v(B), v(A)]=v(A)$

Case2) $v(A)=v(B)$, $v(A)<v(B)$인 경우는 유사한 방식으로,

(ii) $A\wedge B=B\wedge A$ : (i)과 쌍대 원리에 의해.

(L3)

(i) $(A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C)$

Case1) $v(A)>v(B)>v(C)$인 경우, $\vee[v(A)\vee(B), v(C)]=\vee[v(A), v(C)]=v(A)$ & $\vee[v(A), v(B)\vee v(C)]=\vee[v(A), v(B)]=v(A)$

Case2) 그 외 경우는 유사한 방식으로,

(ii) $(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$ : (i)과 쌍대 원리에 의해.

(L4)

(i) $(A\vee B)\wedge A=A$

Case1) $v(A)>v(B)$인 경우, $\wedge[v(A)\vee(B), v(A)]=\wedge[v(A),$

$v(A)] = v(A)$

Case2) $v(A) < v(B)$인 경우, $\wedge[v(A) \vee (B),\ v(A)] = \wedge[v(B),\ v(A)] = v(A)$

Case3) $v(A) = v(B)$인 경우, 당연히,

(ii) $(A \wedge B) \vee A = A$ : (i)과 유사한 방식으로.

(L5)

(i) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Case1) $v(A) > v(B) > v(C)$인 경우, $\wedge[v(A),\ v(B) \vee v(C)] = \wedge[v(A),\ v(B)] = v(B)$ & $\vee[v(A) \wedge v(B),\ v(A) \wedge v(C)] = \vee[v(B),\ v(C)] = v(B)$

Case2) $v(A) > v(C) > v(B)$인 경우, $\wedge[v(A),\ v(B) \vee v(C)] = \wedge[v(A),\ v(C)] = v(C)$ & $\vee[v(A) \wedge v(B),\ v(A) \wedge v(C)] = \vee[v(B),\ v(C)] = v(C)$

Case3) 그 외 경우는 유사한 방식으로,

(ii) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Case1) $v(A) > v(B) > v(C)$인 경우, $\vee[v(A),\ v(B) \wedge (C)] = \vee[v(A),\ v(C)] = v(A)$ & $\wedge[v(A) \vee v(B),\ v(A) \vee v(C)] = \vee[v(A),\ v(A)] = v(A)$

Case2) 그 외 경우는 유사한 방식으로 ■

[정리2-9] (무한 다치) 명제 집합 P 위에서 ∨, ∧, ¬은 여배분격자 $L_{CD}$를 형성하지 않는다; $P_{L_\chi}$의 잘 형식화된 식들은 L7에서 동어반복이 아니다.

〈증명〉

(L7) $0 < v(A) < 1$의 경우,

(i) $A \vee \neg A = \vee[v(A),\ 1 - v(A)] = v(A),\quad 0.5 \leq v(A) < 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 - v(A),\quad 0 < v(A) \leq 0.5$

따라서 $0.5 \leq A \vee \neg A < 1$이고 $A \vee \neg A \neq 1$

(ii) $A \wedge \neg A = \wedge[v(A),\ 1 - v(A)] = v(A),\quad 0 < v(A) \leq 0.5$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 - v(A),\quad 0.5 \leq v(A) < 1$

따라서 $0 < A \wedge \neg A \leq 0.5$이고 $A \wedge \neg A \neq 0$ ■

## 3. 격자 구조의 논리 철학적 함의 : 배중률, 모순율에서 멱등법칙으로

아리스토텔레스가 동일률과 더불어 배중률, 모순율을 공리로 간주한 이래로 그러한 논리적 원리들은 서양 철학사에서 주요한 형이상학적 원리로 자리매김해 왔다. 실제로 그것은 진, 위의 판이한 가름의 문제와 연관되어 있으며[19] 그것을 형식화해서 보여준 인물이 논리 대수의 창시자로 알려진 불이다.(Boole(1854), 37, 49~51쪽)[20] 2치 대수로 알려진 불대수의 정형화[21]와 관련해서 필자가 주목하고자 하는 것은 배중률, 모순율(여법칙)이 아닌 오늘날 멱등법칙으로 불리는 논리적 원리이다. 왜냐하면 멱등법칙은 산술 연산과 구별되는 논리 연산의 기본적인 특성을 반영하고 있음에도 불구하고 그것이 왜 중요한지에 대한 철학적 논의가 수행되지 못하였기 때문이다. 여기서는 그 점을 부각시켜 보고자 한다. 이를 위하여 3.1절에서는 논리 대수로서의 격자 구조와 멱등법칙의 의미를 되짚어 볼 것이다. 그리고 3.2절에서는 논리 연산과 언어(개념과 명제) 문제를 통해 멱등법칙이 어떤 철학적 함의를 가질 수 있는지를 살펴볼 것이다.

### 1) 논리 대수: 불대수에서 격자로

전통적으로 논리 대수는 (직관주의와 구별되는) 2치를 전제하

---

19) 그러한 점은 진, 위의 구별이 모순율에 기초해 있다고 하는 라이프니츠의 주장에 잘 나타나 있다.(Jørgensen(1962), 73쪽)

20) 그런 점에서 불대수는 2치 대수로도 불려진다.(Kneale(1978), 413쪽)

21) 산술의 대수와 유비적으로 논리 대수를 정형화하는 작업에서(Boole(1854), 6쪽) 불의 논리 연산에 대한 이해가 현대적인 논리합, 논리곱 연산과 정확히 일치하지 않는 문제점이 있긴 하나 그것이 이 글의 중요 논의 사안은 아니다. 그러한 혼돈과 관련해서는 같은 책, 45, 49, 50쪽에서 논리 연산의 사용을 참조할 것.

는 불대수를 가리킨다. 그러한 명칭은 스스로 자신의 대수를 논리 대수로 명명한 불의 의도에 따른 것이다. 그러나 그러한 한정은 논리 상항으로 간주되는 논리 연결사를 연산으로 한 (논리) 대수의 본래적 의미를 충분히 살릴 수 없는 문제가 있다. 그리고 2절의 논의에서 나타나듯이 현대적 의미에서 볼 때 논리 연산은 불대수로 그 범위가 한정되지 않는다. 그런 점에 비추어 필자는 불대수보다는 격자를 논리 대수로 명명하는 것이 더 타당하다고 생각한다. 그 이유는 임의의 형식 논리 체계가 논리 상항으로 논리 연결사를 사용하는 한, 그 체계는 대수적 구조를 가질 수밖에 없고 격자는 그러한 논리 연산의 특성을 반영할 수 있기 때문이다.[22] 그 점을 논리 대수의 역사적 논의를 중심으로 검토하는 것이 여기서의 목적이다.

먼저 지적할 것은 격자 구조 성립의 역사적인 면이다. 격자 구조에 관한 연구는 데디킨트-오르 계열과 쉬뢰더-벌코프 계열로 나눌 수 있다. 전자의 계열이 수론에 그 기반을 두고 있다면[23] 후자의 계열은 논리 대수에 그 기반을 두고 있다.[24]

필자의 논의와 관련하여 주목할 것은 후자 계열이다. 왜냐하면

---

22) 2절의 논의는 명제를 대상으로 전제하고 고전 논리와 직관주의 논리 그리고 다치 논리의 논리 연결사 (부정(¬)을 포함하는) 논리합(∨)과 논리곱(∧)을 연산으로 하여 얻어낸 결과이다.

23) 데디킨트의 격자 개념에 대한 발상은 수론에서 시작된 것이고 오르는 추상 대수의 일반적 기반을 제공하기 위해 격자에 관심을 가졌다.(Corry(1996), 120, 271쪽) 데디킨트의 격자 발상이 쉬뢰더의 영향하에서 이루어지고 오르의 격자 논의가 화이트헤드의 보편 대수를 통해 이루어진 것이라는 점을 감안할 때 두 계열이 전적으로 분리될 수 있는 것은 아니다. 다만 관심 사안에 따라 두 계열을 구분하였다. 데디킨트, 오르의 격자에 대한 관심의 보다 자세한 논의를 위해서는 Corry(1996), 2장 3절과 6장을 참조할 것.

24) 쉬뢰더의 격자 개념에 대한 발상은 그의 논리 대수 연구에서 발생한 것이다.(Corry(1996), 120-21쪽) 수 대수와 논리 대수를 포함하는 화이트헤드의 보편 대수의 관심을 계승한 벌코프는 격자 개념 그 자체에 관심의 초점이 맞춰져 있으나(같은 책, 271쪽) 후에 폰 노이만과 더불어 격자 구조를 통한 양자 논리에 기여한 바(Mittelstadt(1978), 1쪽, 2장 참조)를 감안할 때 그를 논리 대수의 역사 안에 포함시킬 수 있을 것이다.

격자 구조는 논리학사나 논리 철학적으로는 불에서 시작된 논리 대수의 정립 과정에서 발생한 것이기 때문이다. 초기 산술의 대수와 유비적으로 논리를 이해하고자 하는 불의 시도에서 논리 대수라는 명칭이 발생했으며[25] 논리적 원리들을 표현하는 데서 산술 연산과 유비적으로 논리합, 논리곱과 같은 논리 연산의 기호화가 시작되었다.(Boole(1854), 27, 57쪽 참조) 그리고 연산 사용과 관련된 불에 대한 비판과 함께 예본스, 퍼스 등을 통해 오늘날과 같은 논리 연산의 사용법이 정착되었다.(Jørgensen(1962), 116~35쪽, Curry(1963), 160~61쪽 참조) 그러한 논리 연산의 사용을 근간으로 한 논리 대수에 대한 논의에서 격자 개념을 발상한 것이 쉬뢰더이다.(Corry(1996), 120~21쪽, Curry(1963), 159쪽) 쉬뢰더의 영향하에서 화이트헤드는 수 연산과 비-수 연산[26](논리 연산)을 모두 포괄할 수 있는 보편 대수를 구상했으며(Jørgensen(1962), 136~44쪽 참조) '격자'란 표현을 사용한 벌코프의 격자 이론은 그러한 대수에 대한 관심에서 비롯된 것이다.(Corry(1996), 283~84쪽)[27] 화이트헤드의 논리학에 보편 대수의 적용은 후에 수리 논리학에서 모델 이론으로 자리 잡는다. 다음 인용에서 알 수 있듯이 코리는 그러한 역사적 맥락에서 벌코프를 모델 이론 초기 단계의 주요 공헌자로 간주한다.

> 보편 대수에 관한 벌코프의 격자 이론 작업은 모델 이론의 초기 단계에 주요한 공헌을 한 것으로 일상적으로 간주되어 왔

25) 대수의 논리 계산의 발상을 문제삼는다면 그것은 아마도 라이프니츠까지 소급될 수 있을 것이다.(Jørgensen(1962), 71~82쪽 참조) 그러나 논리 대수란 이름 하에서 구체적인 형식화가 이루어진 것은 불에게서 이다.(Jørgensen(1962), 97~116쪽 참조)

26) 비-수(non-numerical) 연산(대수)은 퍼스와 화이트헤드에서 논리 연산으로 간주된다.(Jørgensen(1962), 141~43쪽 참조)

27) 그러한 관점에서 벌코프는 쉬뢰더와 달리 논리합, 논리곱(합, 교)과 같은 표현 대신 결합, 교우란 표현을 사용한다.

> 다. 비록 모델 이론의 초기 전개로부터 보편 대수의 초기 전개를 분리할 수는 없지만 모델 이론은 1950년대 초반이래 독립적인 연구 영역으로 인식되기 시작했다.(Corry(1996), 284쪽)

그리고 모델 이론과는 별도로 벌코프는 폰 노이만과 함께 격자 이론에 기초한 양자 논리를 구상했으며 격자 구조에 기반 한 논리 대수를 수리 논리학의 기초로 삼은 사람이 형식주의자로 알려진 커리이다.(Curry(1963), 4, 5장 참조)[28]

그러나 논리 대수의 역사에서 격자 구조가 어떻게 발생했지는지를 지적하는 것은 단지 간접적으로 그 중요성을 인식시킨 데에 불과하다. 격자 구조가 논리적으로 중요한 것은 그것이 수 연산과 구별되는 논리 연산의 특성을 반영할 수 있기 때문이다. 먼저 수 연산이나 일반적인 추상 대수에 논리 대수가 충분히 적용되지 않는 점을 다음의 진술에서 확인해 보자.

> 표에 의해 유한 집합의 추상 원소들 위에서 정의된 연산 표현은 … 이미 군론에서 알려진 장치였다. 그러나 그것을 쌍군(Dualgruppen)에 적용하려고 할 때 … 데디킨트는 그것이 엄청나게 어렵다는 것을 발견했다. 따라서 데디킨트는 쌍군에 대한 대안적 정의를 찾았다.(Corry(1996), 125쪽)[29]

이러한 면은 데디킨트의 격자에 대한 발상이 당대 대수학자들에겐 관심을 끌지 못했다는 사실(Corry(1996), 128-29쪽)과 격자를 통해 대수의 중요한 모든 정리들을 증명하고자 했던 오르의 계획이 실패로 돌아갔다는 사실(같은 책, 292쪽)에 잘 반영되어 있다. 실제로 격자 정의에 사용되는 결합, 교우 연산은 그 자체로는 일반적 추상 대수 논의의 근간이 되는 군을 형성하지 못한다.[30] 반

---

28) 그러한 영향은 퍼지 이론의 창시자로 알려진 자데에서도 발견된다. 그의 퍼지 집합에 대한 논의는 배분격자를 근간으로 하여 수행된다.(Zadeh(1987/1965), 34쪽)

29) 여기서 쌍군은 격자에 대한 데디킨트의 명칭이다.(Corry(1996), 121쪽)

대로 그것이 논리 연산에 적용되는 면은 퍼스가 수학과는 달리 논리를 이루는 격자가 배분적인 것으로 생각했다는 사실(Curry(1963), 137, 160~61쪽 참조)과 타르스키가 고전 명제 계산과 직관주의 명제 계산이 격자 이론 안에서 해석될 수 있다는 점을 언급한 사실(Tarski(1956), 454쪽)에서 확인될 수 있다.

그러면 격자의 어떤 원리가 논리 연산을 수 연산과 구별되도록 하는지를 마지막으로 검토해 보자. 닐은 논리 대수와 일상적인 대수의 차이점이 불대수 공리들 중 모순율에 있는 것으로 간주한다.(Kneale(1978), 412쪽) 그러나 2절의 논의에서 알 수 있듯이 그것은 배중률과 더불어 고전 논리에 한정된 논리적 원리이다. 그리고 그것은 (0, 1만을 계산의 원소로 하는) 부정 연산의 특수한 용법에서 비롯된 것이다. 논리 대수적 관점에서 형식 논리학의 범위를 특수한 부정 연산 용법에 따르는 고전 명제 논리와 그것을 구문론적으로 확장한 체계로 한정하지 않는 한 그의 주장은 설득력을 갖기 어렵다.[31] 그리고 필자의 논의나 타르스키의 언급(Tarski(1956), 454쪽 주2)에 따라 배분법칙에 한정해 볼 수 있다. 그러나 그러한 원리는 격자 구조를 가지면서 배분법칙을 만족하지 않는 (양자) 논리 대수(Curry(1963), 137쪽)를 논리에서 배제해야 한다. 그리고 중요한 것은 배분법칙이 일반적인 수 연산과 논리 연산의 차이점을 보여줄 수 있는 원리가 아니라 대수와 논리에 공통적으로 적용되는 원리라는 것이다.[32]

---

30) 졸고(1998), 미게재 논문, 10쪽, 주28 참조.

31) 실제로 닐은 대안 논리에 관한 논의에서 배중률, 모순율에 해당하는 여법칙과 직접적인 관련을 맺는 2치를 강력히 옹호하고 있다.(Kneal(1978), 572~75쪽 참조). 그러나 A에 대한 부정 연산(¬A)의 1-A라는 일반적인 용법을 따를 때, 부정 연산 자체에서 진리치의 범위가 0, 1로 한정될 필요는 없다.([정의2-7] 참조)

32) 추상 대수에서 합과 곱에 관한 배분 법칙을 만족하는 것은 환이나 선형 공간으로 정의된다.

2절에서 지적된 격자 정의에서 대수 법칙과 구별될 수 있는 논리적 원리는 격자 모두에 적용되는 기본 공리 멱등법칙이다. 그리고 그것은 부정 연산의 특수한 용법과는 아무런 관련이 없다. 널이 미처 생각하지 못한 그러한 점은 논리 대수 역사에서 밝혀진 바이다. 그리고 그 원리를 최초로 발견한 사람은 논리 대수의 창시자 불이다.[33] 불은 수 연산에서 $x^2=x$의 법칙이 적용될 수 있는 것은 0과 1뿐이라는 점을 들어 멱등법칙을 논리와 연관된 특수한 법칙으로 간주한다.(Boole(1853), 37쪽)[34] 불이 지적한 대로 수 연산 일반에 적용될 수 없는 멱등법칙은 논리 대수적으로 논리합, 논리곱의 특성에 기인한 것이다. 그 점은 화이트헤드가 보편 대수를 수에 관한 대수와 그렇지 않은 대수, 즉 논리 대수로 나누는 데서 잘 나타난다. 화이트헤드는 멱등법칙을 수의 합과 곱에 적용될 수 없고 논리에 적용되는 합과 곱에 대한 특수한 법칙으로 간주한다.(Jørgensen(1962), 141쪽) 그리고 논리 대수로서 격자를 논하는 데서 커리가 그 점을 지적하고 있다.(Curry(1963), 136쪽)

이를 통해 지적할 수 있는 것은 멱등법칙이 수 일반에는 적용될 수 없으나 논리합, 논리곱 연산의 특성을 반영한다는 것이다. 그러면 논리에 어떤 특성이 반영되어 있기에 멱등법칙이 논리 연산과 수 연산을 가르는 준거가 될 수 있는지가 문제이다. 이를 다음 절에서 좀더 고찰해 보자.

---

33) 물론 동어반복의 원리(The Principle of Tautology)로 그것을 구상한 사람은 라이프니츠이다. (라이프니츠는 이를 "a is aa / A=A+A"로 정립하였다, Jørgensen(1962), 78, 80쪽). 그러나 그것의 수 연산과의 차이점을 보여준 것은 불이다.

34) 그러나 불은 아직 멱등법칙과 여법칙을 구분해 내진 못하였다.(Boole(1853), 49~51쪽 참조) 그것은 논리 연산 논리합, 논리곱의 정립을 통해서야 비로소 분명히 구별된 원리로서 자리잡는다.

### 2) 논리 연산과 언어

논리 연산 논리합과 논리곱이 멱등법칙을 성립시킬 수 있는 것은 그것이 기본적인 대상으로 삼는 언어의 특성 때문이다.[35] 그리고 그러한 연산은 비상관non-interactive 연산이란 이름을 통해 수 연산과 분명히 구별될 수 있다. 여기서는 이 점을 좀더 검토하기로 하겠다.

#### (1) 개념, 명제 그리고 멱등법칙

형식화를 수반하는지에 관련 없이 전통적으로 논리는 (개별자에 대한) 술어로 간주되는 개념과 명제(또는 그 형식)를 기본 대상으로 한다. 개념의 특성이 수에도 적용될 수 있다는 것을 잘 보여준 사람은 현대 기호 논리학의 창시자로 알려진 프레게이다. 비록 수가 개념의 외연을 통해 정의될 수 있을지라도, 그러한 개념의 특성이 수 연산에까지 보존되는 것은 아니다.[36] 개념, 명제와 같은 언어를 기본 대상으로 삼는 논리 연산과 수를 그 기본 대상으로 하는 수 연산은 엄격히 구별될 수 있다. 그 점을 잘 반영해 주는 것이 다름 아닌 멱등법칙이다. 그리고 그것은 멱등법칙을 형식화하는 불의 초기 발상에서 이미 나타난다.

불은 인간의 사유 법칙이 언어에 반영되어 있다는 전제에서 논리 대수에 관한 논의를 전개한다.(Boole(1853), 30쪽) 실제로 그의 논리적 원리로서의 사유 법칙에 대한 기호화는 언어 특히 개념의 특성을 통해 마련된다. 다음의 인용에서 보듯 그 점은 불이 사유

---

35) 물론 논리가 형식화된 이후에는 그것의 적용 범위가 훨씬 광범위하게 된다. 그것은 고전 명제 논리 계산이 스위치 시스템에 잘 맞는다는 데서 확인할 수 있다. 그러나 스위치 시스템의 구체적인 내용은 다를지라도 형식적으로 그것이 고전 명제 논리 대수와 동형이라는 데 유의할 필요가 있다. 그러한 시스템은 형식적 특성에 있어서 명제 논리 계산과 구별되는 체계가 아니다.

36) 필자는 이러한 점이 프레게의 수리 논리학에 대한 공리 연역적 발상에서 간과된 면이라고 생각한다.

의 두 번째 법칙((2))으로 멱등법칙($x^2=x$)을 정형화하는 과정에 그대로 반영되어 있다.

> 등식 (2)의 증명에서 가정된 것은 의미의 절대적 동일성이다. 그것이 표현하는 법칙은 언어에서 실제로 예증된다. 임의의 주어와 관련해서 "좋아, 좋아"라고 말하는 것은 … "좋아"라고 말하는 것과 같다. 따라서 "좋은, 좋은" 사람은 "좋은" 사람과 동치이다. 그러한 단어의 반복은 때때로 질을 향상시키거나 확인을 강조하기 위해 사용된다 그러나 이러한 효과는 단지 부차적이고 규약적인 것에 불과하다. 그것은 언어와 사유의 내적 관계에 기초한 것이 아니다.(Boole(1853), 32쪽)

인용에서 볼 수 있듯이 법칙 (2)는 오늘날 멱등법칙처럼 논리곱의 특성만으로 형식화된 것이라고 하긴 어렵다. 예본스가 지적하듯이 합과 곱에 관한 그의 논리 연산 사용에는 수 연산과 혼동을 일으킨 다소의 문제점이 있다.(J$\phi$rgensen(1962), 116쪽 참조) 그럼에도 불구하고 여기서 주목할 것은 같은 개념이 여러 번 반복되더라도 그것은 논리적으로 한 개념 표현과 기본적인 의미에 있어선 마찬가지라는 점이다. 그러한 개념의 특성은 수를 대상으로 하는 수 연산과 논리 연산이 갖는 기본적인 차이점이기도 하다. 그 점을 산술의 곱과 관련하여 불은 다음과 같이 표현하고 있다.

> 우리는 논리 부호들이 $x^2=x$라는 특별한 법칙에 종속된다는 것을 (II. 9)에서 보았다. 지금 수 부호들 중 같은 형식 법칙에 종속되는 것은 0과 1 둘 뿐이다. 대수로 고려할 경우, 등식 $x^2=x$는 0, 1 외에 어떤 다른 기원도 갖지 않는다.(Boole(1853), 37쪽)[37]

위 인용의 경우를 형용사로 표현된 개념을 대상으로 하여 "그

---

37) 이는 수 0, 1을 2치와 관련시키는 결정적 계기가 된다.(같은 곳) 그러나 그러한 면은 이 글의 관심 사안이 아니다.

리고"로 표현되는 논리곱에 적용할 경우, 첫째 예증에 사용된 "좋은"을 다음으로 이해할 수 있다.

〈사례1〉 "좋고 좋은" iff "좋은"[38]

"그리고"에 관한 개념이 갖는 주어진 특성은 "또는"으로 표현되는 논리합에도 그대로 적용될 수 있다.

〈사례2〉 "좋거나 좋은" iff "좋은"

그러나 일반 수 연산에 있어서 개념의 외연으로서의 집합과는 달리 개념의 의미가 사상된 수는 더 이상 그러한 특성을 보존하지 않는다. 그 점은 불이 논리곱 형식으로 나타나는 멱등법칙을 만족하는 수로 간주한 0, 1에 있어서 (논리합의 경우) 1 또한 마찬가지이다. 반면 "그리고"와 "또는"으로 표현된 논리 연산과 개념의 특성을 명제 또한 그대로 보존하고 있다. 이를 논리 대수로 하여 현대적으로 표현한 것이 바로 합과 곱에 관한 멱등법칙이다. 실제로 개념의 내포와 외연의 측면을 고려할 경우, 같은 개념을 곱하거나 더한다고 해서 산술에서처럼 새로운 수 개념(예:1+1=2)이 발생하지는 않는다.[39] 그리고 그것은 명제에도 그대로 적용될 수 있다. 같은 명제를 곱하거나 더한다고 해서 새로운 명제가 발생하지는 않는 것이다.[40]

이는 개념의 반복성을 더 이상 보존하지 않는 수와 구별되는 지금까지 논리학이 대상으로 한 언어의 기본적인 특성을 잘 반영해 준다. 그리고 논리합, 논리곱만으로 설명될 수 있는 그러한 특

---

38) 이는 다음으로 해석될 수 있다: "좋고 좋은"은 "좋은"을 의미한다. 그리고 그 역도 또한 마찬가지이다.

39) 이는 개념의 외연에 해당하는 집합 연산(합, 교)에 잘 반영되어 있다.

40) 이는 집합과 집합 또는 집합과 원소 사이의 관계에 잘 반영되어 있다.

성은 부정 연산과 관련해서 발생하는 진리치의 범위 한정 문제를 넘어선 논리에 사용된 언어 일반이 갖는 특성이기도 하다. 그 점을 합과 곱에 관한 연산의 문제를 통해 다음 절에서 좀더 확인해 보자.

### (2) 불환과 불대수: 상관 연산 대 비상관 연산

명제 논리 계산의 근간이 되는 불대수는 대수적으로 불환과 동형이다.[41] 그러한 점에서 불대수는 전통적인 추상 대수의 일부로 간주될 수 있다. 그 점을 가장 먼저 보여준 인물은 스톤이다. 스톤은 수에 맞는 대수로부터 비-수 대수 또는 논리 대수로 불대수를 구별하는 화이트헤드의 보편 대수 관점(Stone(1938), 809쪽[42])을 더이상 받아들이지 않는다. 그의 입장에 따를 경우 불대수는 추상 대수 안에서 처리될 수 있는 특수한 대수에 불과하다.(Stone(1936), 37쪽[43]) 그러한 발상을 코리는 다음으로 묘사하고 있다.

> 스톤이 불대수를 현대 대수로 의도적으로 흡수한 기반은 불대수가 거기서 모든 원소가 멱등적인 … 특수한 유형의 환에 불과하다는 그의 유명한 통찰에 의해 제공되었다.(Corry(1996), 288쪽)

스톤의 주장이 틀린 것은 아니다. 그러나 그러한 작업에는 손쉽게 간과된 면이 있다. 추상 대수는 수 특히 실수와 복소수에 관한 연구를 기초로 한 것이다.(Corry(1996), 173-83쪽 참조) 그런 점에서 (곱에 관한) 멱등법칙은 0, 1과 같은 특수한 수에나 적용될 수 있는 사소한 법칙에 불과하다. 그리고 스톤에 따를 경우,

---

41) 이와 관련하여 Simmons(1963), 부록3과 Tarski(1956), XVII장을 참조할 것.
42) Corry(1996), 287쪽에서 재인용된 책과 페이지 번호임.
43) Corry(1996), 288쪽에서 재인용된 책과 페이지 번호임.

불대수가 따르는 멱등법칙은 환의 영역에서 논의될 수 있는 특수한 조건에 불과하다. 그러나 지금까지의 논의에서 보듯 멱등법칙은 불대수에 한정된 원리가 아니다. 그것은 비-수 대수 또는 논리 대수를 반영하는 격자 구조에 대한 논의를 위해선 반드시 지켜야 할 일반적 원리에 해당한다. 즉 환에 대한 논의 수행을 위한 군론의 일반적 원리들처럼 (격자로 한정할 경우) 그것은 논리 대수가 성립하기 위한 일반적 원리에 해당하는 것이다.[44] 다음의 정의를 통해 마련된 불환과 불대수 사이의 동형성 주장에는 손쉽게 간과된 면이 있다.

$$x \wedge y = xy \ \& \ x \vee y = x + y + xy \qquad (1)$$
$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \ \& \ xy = x \wedge y \qquad (2)$$

외적으로 추상 대수 성격상 크게 문제될 것은 없다. 그리고 (2)의 경우는 집합 연산에 적합한 합과 곱에 관한 해석이다. 그러나 (1)의 경우는 논리합과 곱(또는 집합 연산 합과 곱)의 역할을 고려할 때 일상적인 수 연산의 계산법이 아니다. 그리고 앞에서도 밝혔듯이 논리 연산은 직접적으로 군 이하의 추상 대수에 적용될 수 있는 연산이 아니다. 이를 통해 확인할 수 있는 것은 멱등법칙의 전제가 보여주듯 결국 논리 대수에 사용되는 합과 곱 연산은 수 연산에 사용되는 합, 곱과는 근본 성격을 달리한다는 점이다.

그러한 차이점은 상관 연산과 비상관 연산의 구분을 통해 지적될 수 있다. 논리합과 곱, 집합 연산 합과 교, 그리고 결합과 교우는 비상관 연산에 속한다. 반면 대수합과 곱, 유계합과 곱 그리고 격렬합과 곱은 상관 연산에 속한다.(Bandemer & Gottwald(1995),

44) 격자 구조에 기초한 논리 대수적 관점에서 볼 때, 군 이하의 일반적 대수 구조(예: 환, 선형 대수 등) 중 어떤 것은 거꾸로 적당한 정의가 마련된다면, 특수한 격자에 불과하다고도 할 수 있을 것이다.

33~34쪽) 그리고 양자를 가르는 준거가 바로 격자 성립의 기본 조건인 멱등법칙이다. 실제로 화이트헤드는 합과 곱의 기본 특성을 바탕으로 논리 대수와 수 대수를 구별하고 있다. 그리고 그러한 특성이 반영되어 있는 것은 화이트헤드가 합과 곱에 관한 특수 법칙이라고 부른 멱등법칙이지 불대수와 직접적으로 관련된 보충 요소(supplementary element)라고 부른 여법칙이 아니다.(Jørgensen(1962), 141~42쪽 참조) 화이트헤드에 대한 스톤의 평가에는 그러한 면이 간과되어 있다.

이런 점에서 보면 수를 기본 대상으로 하는 산술 또는 수 연산과 비-수 연산의 구분은 여전히 유효하다고 하겠다.[45] 그리고 3.21절의 논의와 연관해 볼 때 비-수 연산으로서의 논리 연산에는 수 연산과 구별되는 언어를 근간으로 한 연산의 특성이 반영되어 있다고 하겠다.

## 4. 언어와 논리 구조

지금까지 필자는 그 동안 상호 이질적인 논리 체계로 간주되어 온 명제를 대상으로 한 고전 논리와 직관주의 논리 그리고 다치 논리 모두 공통적으로 (배분) 격자 구조를 갖는다는 점을 보였다. 그리고 소극적인 방식이긴 하나 전통적인 의미의 배중률과 모순율에 해당하는 여법칙을 준거로 그 체계들이 격자 구조 내에서 상호 구별될 수 있다는 것을 보였다. 그러한 차이점은 2절의 형식적 논의에서 간접적으로나마 확인할 수 있다. 즉 비논리 상항으로 고전 논리 체계의 대상이 되는 명제들이 2치의 특성을 반영한다면, 직관주의 논리 체계의 명제들은 증명 가능성 또는 구성

45) 스톤의 입장과는 달리 양자를 공통적으로 묶어 낼 수 있는 것은 경계 조건, 교환법칙, 단조성 조건, 결합법칙을 기본 공리로 하는 T-규범과 S-규범이다.

가능성을 전제한다. 그리고 무한 다치 논리 체계의 명제들은 진리치에 있어서 0, 1 사이에 나타나는 불확정성(미결정성과 애매성)을 배제하지 않는다. 그러한 면은 이 글에서 논제로 삼지 않은 '부정'과 부정을 매개로 정의될 수 있는 '함축' 연산의 차이점을 수반한다.[46] 그럼에도 불구하고 그것들이 논리 대수적으로 같은 구조 안에서 이해될 수 있는 것은 논리합, 논리곱과 같은 연산의 구조적 공통성에 기인한다. 그런 점에서 보면 논리 체계들간의 공통점과 차이점은 논리 대상의 공통적 특성과 그렇지 않은 특성이 논리 연산에 반영되어 있기 때문이라고 할 수 있다.

이러한 논의는 학처럼 대결적 구도에 초점을 맞출 필요 없이 논리 연산에 따른 각각의 체계가 갖는 기본적 구조를 확인할 수 있는 장점을 갖는다. 그리고 그에 따라 논리 구조의 공통점과 차이점도 확인할 수 있다. 필자는 논의 영역을 계산 가능한 형식 체계로 한정한다면, 내적 논의의 일관성을 기할 수 있다는 점에서 필자의 논리 구분 방식이 전통적인 학의 방식보다 올바르고 공정하다고 생각한다. 그간 수용되어 온 학의 논리 분류와 그에 따른 탐구의 가장 큰 문제점은 그가 표준 논리와 비표준 논리를 가르는 데 철학적인 입장을 문제삼고 있다는 점이다.(Haack(1996) 1, 2장 특히 xxvi 참조) 철학적 입론에 따라 논리 체계가 달라질 수 있다면, 전통 2치 논리 특히 고전 논리를 표준 논리로 명명하는 것 자체가 원론적으로 불가능하다. 왜냐하면 형식적으로 같은 고전 논리 체계도 철학적으로는 논리주의와 형식주의로 이미 갈라질 것이기 때문이다. 그리고 앞 절의 논의에서 지적했듯이 논리 대수적으로 볼 때 고전 논리의 논리적 원리들의 타당성은 같은

46) 하이팅 대수를 가불(pseudo-boolean) 격자로 명명하는 것은 그러한 차이점에 기인한 것이다. 그리고 라지오와는 그러한 개념을 퍼지 논리에 도입하고 있다.(Rasiowa(1992), 5~23쪽 참조)

범위에서 처리될 것이 아니다. 즉 고전적인 논리적 원리들은 구조적으로 동등하게 평가될 것들이 아닌 것이다.

임의의 논리 체계는, 비록 그것이 대부분 도식 형태로 제시된다고 해도, 술어 개념과 명제와 같은 비논리 상항과 논리 상항을 통해 구성된다. 논리 대수적으로 보면, 전자는 체계에 전제된 대상으로서 그리고 후자는 그러한 대상들의 결합과 관련된 논리 연산으로서의 역할을 수행한다. 그에 따라 임의의 논리 체계는 논리 대수적 구조를 갖게 된다. 필자가 주장하는 바는 바로 그러한 방법에 따라 논리 체계들을 분류하고 새로운 논리 체계를 구성하는 것이다. 타르스키가 주장하듯이 '참인 문장들은 어떤 구조적 특성을 소유한 문장'이라고 할 수 있다.(Tarski(1956), 163쪽) 그런 점을 잘 보여주는 것이 행렬 방법matrix method을 도입한 진리표 같은 것이다. 이러한 논의는 그간 철학적인 논의 장안에서의 중요성에도 불구하고 공리 연역적 체계에서 그 공리적 성격을 인정받을 수 없었던 배중률, 모순율 같은 논리적 원리들의 공리적 성격을 확인할 수 있도록 해준다.[47] 그런 점에서 격자 구조의 기본 원리들은 논리학에서 구조 공리로서의 역할을 담당할 것이다.

격자를 바탕으로 한 필자의 논리 구조에 대한 논의는 논리 연산이 따르는 기본적인 원리들이 무엇인지를 확인할 수 있게 하는 장점을 갖는다. 동시에 3절에서의 멱등법칙에 대한 논의가 보여주듯 이 글의 기본적인 전제가 어디에 있는지를 보여준다. 그러한 면은 이러한 논의가 갖는 한계이기도 하다. 비록 논리 함축이 행렬 방식에 따라 정의될 수 있다고는 해도, 초기 프레게, 러셀의 공리론적 방법이나 추론 규칙에 의한 방법처럼 다양한 정리를 끌

47) 단 이 때의 '공리'는 모든 대상에 대하여 보편적으로 적용될 수 있다는 고전적 의미의 공리일 순 없다. 여기서 표현한 '공리'는 공준과 유사하게 논리 대수의 범위를 한정하는 구조적 조건으로 간주되어야 한다.

어내는 논리의 연역적 성격을, 추론 규칙이 구조 공리에 포함되지 않는 한, 충분히 반영할 수는 없을 것이다. 그리고 루카치비츠의 무한 다치 명제 논리와 이 글에서 논의되지 않은 퍼지 집합의 경우, 멱등법칙을 만족하지 않는 상관 연산이 함축 정의나 집합 연산 정의에 사용된다. 이것들을 논리, 집합의 기본 연산으로 도입할 경우, 멱등법칙을 근간으로 한 격자 구조는 더 이상 논리 대수 구조로서의 기본적인 역할을 담당할 수 없을 것이다. 필자는 그러한 논의는 이 글에서 전제된 언어의 논리적 특성을 넘어선 대상들에 대해서 적용될 수 있다고 생각한다. 그리고 그러한 것들이 문제된다면, 논리학에서 그것을 논리의 대상으로 삼을 것인지에7대한 새로운 철학적 논의가 필요할 것이다.

# 참고문헌


양은석(1997b), 「논리적 원리들의 타당성에 관하여」, 『論理硏究』 제1집, 117~138쪽.

______(1998), 「퍼지 논리와 의미론적 확장」 (미게재 논문)

Bandemer, H & Gottwald, S.(1995), *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic Fuzzy Method: with Applications,* Chichester: Johns Wiley & Sons.

Belluce, L. P.(1995), "$\alpha$-Complete MV-Algebras", *Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 7~21쪽.

Boole, G.(1854), *An Investigation of The Laws of Thought,* New York: Dover Publications, INC.

Corry, L.(1996), *Modern Algebra and Rise of Mathematical Structures,* Basel: Birkhäuser Verlag.

Curry, H. B.(1963), *Foundations of Mathematical Logic,* New York: McGraw-hill book company, INC.

Epstein, R. L.(1995), *The Semantic Foundations of Logic* vol. 1., Oxford: Oxford Univ. Press.

Gierz, G.(외)(1980), *A Compendium of Continuous Lattices,* Berlin: Spring-Verlag.

Haack, S.(1996), *Deviant Logic, Fuzzy Logic; Beyond the Formalism,* Chicago: The Univ. of Chicago Press.

Halmos, P. R.(1956), "The Basic Concepts of Algebraic Logic", *The American Mathematical Monthly 63,* 363~387쪽.

Heyting, A.(1956), *Intuitionism: An Introduction,* Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Jørgensen, J.(1962), *A Treatise of Formal Logic* vol. 1, New York: Russell & Russell, INC.

Kneale, W. & Kneale, M.(1978), *The Development of Logic,* Oxford: Clarendon Press.

Mittelstaedt, P.(1978), *Quantum Logic,* Dordrecht: D. Reidel Publishing Co..

Pinter, C. C.(1984), *Set Theory,* Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co..

Rasiowa, H.(1992), "Toward fuzzy logic", *Fuzzy Logic for The Management of Uncertainty.* Chichester: Johns Wiley & Sons, 5~25쪽.

Simmons, G. F.(1963), *Introduction to Topology and Modern Analysis,* Auckland: McGraw-Hill Kogakusha Ltd.

Stoll, R. R.(1963), *Set Theory and Logic,* Sanfransisco: W. H. Freeman & Co..

Stone, M. H.(1936), "The Theory of Representations for Boolean Algebras", *Trans. Amer. Math. Soc. 40,* 37~111쪽.(Corry(1996)에서 재인용)

____________.(1938), "The Representation of Boolean Algebras", *Bull. Amer. Math. Soc. 44,* 807-816쪽.(Corry(1996)에서 재인용)

Tarski, A. M.(1956), *Logic, Semantics, Metamathematics,* Oxford: Clarendon Press.

Zadeh, L. A.(1987/1965), "Coping with the Imprecision of the Real World: An Interview with Lofti A. Zadeh", *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L. A. Zadeh.* ed. by Yager. R. R.(외) New York: John Willy & Sons, 9~28쪽.