

머시응고에 대한 속도감쇠 기법이 정상상태 머시영역에 미치는 영향

김우승* · 김덕수**
(1998년 1월 30일 접수)

Effect of the Velocity Suppression Techniques for a Mushy Solidification on Steady-state Mushy Region

Woo-Seung Kim and Deok-Soo Kim

Key Words: Mushy Region(머쉬영역), Columnar Dendrite(주상수지상), Equi-axed Dendrite(등축수지상), Velocity Suppression(속도감쇠), Variable Viscosity (가변점성계수)

Abstract

In the analysis of a mushy solidification system with natural convection using a fixed grid method, the enthalpy method has been used to account for the release of latent heat. The variable viscosity, Darcy source, and hybrid methods have been employed for the velocity suppression in a mushy region. The choice of the values of solid viscosity and permeability constant in conjunction with the Darcy source term plays an important role in forming the location and shape of the phase boundaries. In this work the effects of these major parameters related to steady-state behavior in the system of mushy solidification are investigated through a simple test problem. The effective specific heat based on the spatial gradients of the enthalpy and temperature is adopted for the treatment of the release of latent heat. The effects of the Prandtl and Rayleigh numbers on the shape of mushy region are examined using the hybrid method.

기 호 설 명

c : 비열
 C_p^* : 유효비열
 f_l, f_s : 국소 액상분율, 국소 고상분율
 g : 중력 가속도
 H : 총 엔탈피, 해석영역의 높이
 ΔH : 절점 잠열
 k : 열전도 계수

K_x, K_y : x, y 방향의 투과율
 K_D : 투과율 계수
 L : 용해잠열
 T : 온도
 T_s, T_l : 고상선 온도, 액상선 온도
 p : 압력
 u : x 방향의 속도
 v : y 방향의 속도

그리스문자

β : 열팽창 계수
 ϵ : 수렴기준
 μ : 점성계수
 ρ : 밀도
 α : 열 확산 계수 ($k / \rho c$)

* 회원, 한양대학교 기계공학과

** 회원, 한양대학교 대학원 기계공학과

θ : 무 차원 온도

하첨자

0 : 기준상태

eff : 유효

s, l : 고상, 액상

cri : 임계

1. 서 론

지금까지 상변화 과정의 상변화 속도와 상변화면의 형태에 영향을 미치는 자연대류를 고려한 순수급속과 합금의 용융 또는 응고문제에 대한 많은 수치적 연구가 수행되어 왔다.⁽¹⁻⁷⁾ 이에 사용되어진 수치적 기법들은 고정격자법(fixed grid method)을 이용한 응고해석과 관련하여, 에너지 방정식의 공식화 방법에 따라 잠열효과를 포함한 유효비열(effective specific heat) 또는 유사대류항(convection-like terms)이 사용되었으며, 상변화의 진행에 따른 속도감쇠방법에 의존하여 가변점성계수법(variable viscosity method) 또는 Darcy 생성항법(Darcy source method) 그리고 이 두 가지 방법을 혼용하는 방법(hybrid method)이 사용되었다.⁽⁸⁻¹⁵⁾

가변점성계수법은 응고가 완료된 고상의 점성계수값과 머시영역에서의 점성계수의 분포형태가 미리 규정되어야 하며 Darcy 생성항법은 머시영역에 대해 투과율-다공율 관계식이 정의되어야 한다. 이 때 머시응고와 관련하여 고상의 점성계수와 투과율-다공율 관계식의 투과율 계수는 머시의 형태를 결정하는데 있어서 중요한 역할을 한다는 것이 비정상 머시응고문제를 해석한 문헌들에서 제시되었다.⁽⁹⁻¹¹⁾ 따라서 비정상 머시응고문제에 대한 기존의 연구결과들로부터 연속적인 응고/용융 과정에 대해서도 고상의 점성계수와 투과율 계수가 머시의 형태에 미치는 영향이 클 것이라는 것을 예상할 수 있다.

그러나 Shyy와 Chen⁽¹³⁾이 정상상태 응고문제를 다루었을 뿐 지금까지 발표된 대부분의 연구는 시간에 따른 상변화의 과도적 특성을 고찰하는데 국한되었으며 과도상태로부터 정상상태의 해를 얻기 전에 종결되었다. 따라서 연속적인 응고/용융 과정의 머시영역의 형태에 대한 정상상태 거동과 관련된 문제의 고찰은 미비한 상태이

다. 가변점성계수법의 고상의 점성계수와 Darcy 생성항법의 투과율 선택이 머시영역의 형상 결정에 있어서 주요한 매개변수임이 예상됨에도 불구하고 지금까지의 연구결과들을 살펴보면 고상의 점성계수와 투과율 계수가 정상상태 응고과정에 미치는 영향에 대한 체계적인 연구는 수행되지 않았다. 또한 기존의 연구는 머시영역의 유동을 고려할 때 대부분이 위에서 언급된 방법들 중 어느 하나에 대해서만 언급하고 있다.

본 연구는 정상상태 거동을 나타내는 연속적인 응고문제(예:연속 주조 공정)를 해석하기 위한 전 단계로서 머시영역에서의 속도감쇠를 얻기 위한 방법에서 주요인자들이 정상상태 머시형상의 결정에 미치는 영향을 파악하고, 기존의 연구에서 개별적으로 사용된 머시영역의 속도감쇠 방법에 대해서 체계적으로 살펴봄으로서 주어진 문제의 특성에 적절한 속도감쇠 방법을 선택하는데 있어서 필요한 기초 정보를 얻고자 한다. 이에 따라 가변점성계수법과 Darcy 생성항법에 대한 속도감쇠 방법과 관련하여 도입된 주요 매개변수, 즉 고상의 점성계수와 투과율 계수가 정상상태 응고과정에 대한 머시영역의 형태결정에 미치는 영향을 고찰하고자 한다. 한편, 하이브리드법을 통해서 자연대류의 세기, 그리고 열확산에 대한 점성력의 변화에 따른 정상상태 머시영역형태의 변화를 고찰한다. 한편 자연대류 세기의 증가에 따른 수렴성⁽¹³⁾을 고려하여 Rayleigh 수는 10^4 , 10^5 인 경우로 제한하고 Prandtl 수를 변화시켜가며 수치계산을 수행하였다. 그리고 응고잠열에 대해서는 잠열효과를 생성항으로 취급하는 경우 잠열이 고려된 유사대류항에 비해 이산화 과정이 다소 용이한 엔탈피법에 의존한 유효비열법을 이용하였으며, 모든 상에 대해서 질량보존, 운동량, 에너지 이송을 지배하는 단일화된 정상상태 방정식을 고려한다.

2. 해 석

2.1 지배 방정식

본 연구에서는 운동량 방정식에서 머시영역의 유동을 고려할 때 온도종속 점성계수, Darcy법칙에 의존한 투과율 항, 온도종속 점성계수와 투과율 항을 함께 고려한 세가지 방법을 모두 고려하였다. 또한 에너지 보존 방정식은 Dantzig⁽⁸⁾가 사

용한 온도를 종속변수로 취한 형태를 사용한다. 그러므로 층류영역에서 비압축성 뉴턴 유체로 밀도를 제외한 열물성치는 일정하고 밀도에 대해서는 Boussinesq 근사를 적용하면 유동과 열전달에 대한 정상상태 지배 방정식은 2차원 직교 좌표계에 대해서 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\mu_{eff}}{K_x} u \quad (2)$$

$$\rho_0 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\mu_{eff}}{K_y} v + \rho_0 g \beta (T - T_0) \quad (3)$$

$$\rho_0 \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

머시응고과정에서 머시영역내의 용해도 차이에 의한 농도구배는 이중확산 또는 열농도대류를 통해 과도적인 고상선과 액상선의 모양을 변화시킬 수 있다. 따라서 머시응고과정에서 열 및 물질전달에 기인한 대류영향에 의한 머시모양의 과도적인 변화를 고찰하는 과정에서는 용해도 차이의 영향이 포함되어야 할 것이다. 그러나 본 연구에서는 정상상태 머시응고문제에 대해 속도감쇠방법에 따른 머시영역의 형상변화를 고찰하는 데 그 목적을 두고 있으므로 농도구배효과는 포함시키지 않았다.⁽¹³⁾

2.2 비열-엔탈피 정식화

일반화된 에너지 방정식 (4)는 엔탈피와 온도를 동시에 포함하고 있기 때문에 문제의 완결을 위해서는 H , T 사이에 구체적인 관계가 정의되어야 한다. 문제의 단순화를 위해서 엔탈피를 온도만의 함수로 가정하면 에너지 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\rho_0 \frac{dH}{dT} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (5)$$

식 (5)의 온도에 대한 엔탈피의 미분계수는 공간구배근사에 근거하여 다음 식에 따라서 계산된다.⁽⁸⁾

$$C_p^* = \frac{dH}{dT} = \left(\frac{\nabla H \cdot \nabla H}{\nabla T \cdot \nabla T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

식 (5)와 (6)에 의해 본 연구에서 고려되는 에너지 방정식의 최종식은 다음과 같다.

$$\rho_0 C_p^* \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (7)$$

식 (6)의 엔탈피는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H = cT + \Delta H \quad (8)$$

여기서 잠열과 온도를 연계시키기 위해 머시영역에서 국소액상분율과 온도의 선형 관계식을 가정하면 엔탈피와 온도 관계식은 다음과 같다.

$$H = \begin{cases} cT & , T < T_s \\ cT + f_i L & , T_s \leq T < T_l \\ cT + L & , T \geq T_l \end{cases} \quad (9)$$

본 연구에서는 식 (6)과 (9)를 기초로 하여 잠열이 비열에 포함된 유효비열(또는 유효확산계수 ($k/\rho_0 C_p^*$))을 계산하는 방법에 의해 잠열효과를 고려하였다.

2.3 응고영역의 속도감쇠

일반적으로 액상의 유동이 고려된 상변화 문제의 해석시, 전 영역을 하나의 해석영역으로 고려하는 경우 액상에서 고상으로 상변화가 진행됨에 따라 2상(고상+액상)이 공존하는 머시영역에서의 속도감쇠를 위한 적절한 방법이 요구된다.

가변점성계수법

이 방법은 재료 물성치의 변화를 통한 머시영역의 속도감쇠 방법으로서 고상분율의 함수로 표현된 점성계수가 사용된다. 점성계수 함수는 특정한 형태가 정립되어 있는 것이 아니며, 단지 액상에서 고상으로 상변화가 진행되어 고상분율이 1에 접근할 때 점성계수 값이 매우 큰 값으로 증가되도록 응고와 연계되는 특성을 갖는다.^(8,10)

이것은 고체영역에서 예측된 속도가 무시될 수 있는 정도가 되도록 속도를 억제하는 효과를 갖는다. 본 연구에서는 고상의 점성계수값 변화에 따른 합금의 정상상태 응고거동 고찰에 다음의 두가지 형태의 점성계수-고상분율 관계식을 사용한다.

$$\mu_{eff} = f_s \mu_s + f_l \mu_l \quad (10)$$

$$\mu_{eff} = \mu_l \exp(B \cdot f_s) \quad (11)$$

여기서 B 는 고상의 점성계수값과 관련된 상수이다.

Darcy 생성항법

일반적으로 투과율은 머시영역의 미세구조를 고려할 때 비등방성 특성을 갖고있으나 유효선⁽¹⁹⁾이 언급한 바와 같이 비등방성이 응고특성의 본질적인 변화에 미치는 효과는 무시될 수 있을 정도이므로, 본 연구에서 투과율은 등방성으로 취급하기로 한다.

본 연구에서 고려된 운동량 방정식 (2)와 (3)의 투과율은 머시영역에서 잠열 방출량에 따라 선형적으로 공극율을 감소시키는 방법에 의존하여 다음과 같은 형태의 Carman-Kozeny 방정식⁽¹¹⁾을 사용하였다.

$$K = K_0 \frac{f_l^3 + q}{(1 - f_l)^2} \quad (12)$$

본 연구의 목적은 머시영역에서의 속도감쇠에 대한 새로운 수학적 모델의 개발에 있는 것이 아니므로 문제의 단순성을 위해 K_0 는 일정하다고 가정하였다. q 는 이산화된 운동량 방정식의 풀이 과정과 관련하여 0으로 나누어 지는 것을 방지하기 위해서 도입된 상수이다.

Darcy법칙에 따르면 다공성 매질을 통해 흐르는 유체의 속도는 압력구배에 비례하며 가정된 투과율-공극율 관계식의 특성에 지배된다. 그러나 Voller와 Prakash⁽¹¹⁾의 연구를 제외하고는 머시 상변화 문제와 관련하여 이러한 특성에 대한 체계적인 수치적 연구는 미비한 상태이다. 특히 임의로 도입된 q 값의 선택기준으로 사용 가능한 자료가 불충분하며 선택된 q 값이 머시영역의 유동특성에 미치는 영향에 대한 고찰이 미비한 상

태이다. 따라서 투과율 모델의 적용 과정에서 도입된 K_0 와 q 값과 관련하여 정상상태 응고특성을 체계적으로 고찰하고자 한다.

하이브리드법

일반적으로 실제 합금의 응고과정은 머시영역 내에 등축수지상 구조에서 주상수지상 구조로의 천이가 존재한다. Oldenburg와 Spera⁽¹⁵⁾는 머시영역에서 운동량 방정식의 차원해석(scale analysis)을 수행함으로써 머시영역의 결정구조의 천이과정을 모델링하고자 하였다. 머시영역에서 액상분율에 따른 운동량 방정식의 각 항에 대한 평형관계로부터 임계고상분율($f_s = f_{s, cri}$)을 정의하고 머시영역의 고상분율에 의존한 전환함수를 도입하여 임계고상분율보다 작은 고상분율값을 갖는 머시영역에서는 가변점성계수법을, 임계고상분율보다 큰 고상분율값을 갖는 영역에서는 Darcy 생성항법을 적용하는 하이브리드법을 사용하였다. 이 때 점성계수와 투과율은 다음식에 의해 계산된다.

$$\mu_{eff} = \left(\frac{1}{1 - F f_s / A_\mu} \right)^2, \quad f_s < 0.5 \quad (13)$$

$$K = G K_0 \frac{(1 - f_s)^3}{f_s^2}, \quad f_s > 0.5 \quad (14)$$

여기서 $A_\mu = 0.5$ 이다. 그리고 F 와 G 는 전환함수이며 다음과 같다.

$$F = 0.5 - \frac{1}{\pi} \arctan[100 (f_s - f_{s, cri})] \quad (15)$$

$$G = \left\{ 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan[100 (f_s - f_{s, cri})] \right\}^{-4} \quad (16)$$

여기서 $f_{s, cri} = 0.5$ 이다.

2.4 지배방정식의 무차원화

본 연구에서 고려된 지배방정식을 무차원화하기 위해 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$x^* = \frac{x}{H}, \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad u^* = \frac{H}{\alpha} u, \quad v^* = \frac{H}{\alpha} v \quad (17)$$

$$p^* = \frac{H^2}{\rho \alpha^2} p, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad \mu^* = \frac{\mu_{eff}}{\mu_l}$$

지배방정식 (1),(2),(3),(7)의 무차원화된 형태는

Table 1 Test problem data.

Hot wall temperature(°C)	$T_h = 0.5$
Cold wall temperature(°C)	$T_c = -0.5$
Reference temperature(°C)	$T_0 = 0.5$
Half mushy temperature range(°C)	$\epsilon = 0.1$
Cavity dimensions(m)	$W, H = 1$
Density(kg/m ³)	$\rho_0 = 1$
Permeability coefficient(1/m ²)	$K_0 = 6.25 \times 10^{-4}, 6.25 \times 10^{-1}$
Specific heat(J/kg/°C)	$c = 1$
Liquid viscosity(kg/m/sec)	$\mu_l = 1$
Solid viscosity(kg/m/sec)	$\mu_s = 100, 500, 1000, 2000$
Thermal conductivity(W/m/°C)	$k = 1$
Coefficient of thermal expansion(1/°C)	$\beta = 0.01, 0.1$
Gravitational acceleration(m/sec ²)	$g = 1000$
Latent heat(J/kg)	$L = 5$
Liquidus temperature(°C)	$T_l = 0.1$
Solidus temperature(°C)	$T_s = -0.1$
Rayleigh number	$Ra = \rho_0^2 g \beta c (T_h - T_c) H^3 / \mu_l k$
Prandtl number	$Pr = \mu_l c / k$
Stefan number	$Ste = c (T_h - T_c) / L$

식 (17)의 무차원 변수를 적용하면 다음과 같다. 이 때 지배방정식에 대한 무차원 변수는 상첨자 (*)를 생략하여 표현하기로 한다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{18}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + Pr \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - A Pr u \tag{19}$$

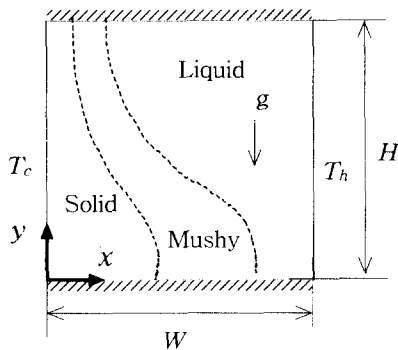


Fig. 1 Schematic diagram of the physical model.

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + Pr \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - A Pr v + Ra Pr (\theta - \theta_{ref}) \tag{20}$$

$$\left(1 + \frac{1}{Ste} \frac{df_l}{d\theta} \right) \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \tag{21}$$

여기서 Ra, Pr, 그리고 Ste는 Table 1에서와 같이 정의되는 무차원 수이며 A는 H^2 / K 로 표현되는 무차원 수이다.

2.5 해석대상 시스템

본연구에서 고려한 해석대상은 많은연구자들^(3,8,15)에 의하여 합금에 대한 응고관련 수치해석 연구에서 적용한 정사각형 형태로서 Fig. 1에 도시되어 있다. 단위 길이의 주형내에 액상 합금이 충전되어 있고 좌측면은 고상선 온도($T_s = -0.1^\circ\text{C}$)보다 낮은 -0.5°C 로 유지되고, 우측면은 액상선 온도($T_l = 0.1^\circ\text{C}$)보다 높은 0.5°C 로 유지되며 윗면과 아랫면은 단열되어 있다. 응고영역은 온도

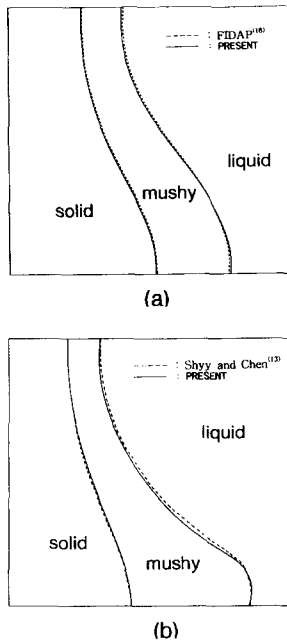


Fig. 2 Comparison of the present results with those of FIDAP, and Shyy and Chen ($Ra=10^4$, $Pr=10^3$, $Ste=0.2$) (a) Variable viscosity method ($\mu_s=1000$) (b) Darcy source method ($K_0=6.25 \times 10^{-4}$, $q=10^3$).

가 -0.1°C 에서 0.1°C 사이에 존재한다. 물성치는 $Ra=10^4$, $Pr=10^3$ 그리고 $Ste=0.2$ 가 되도록 설정하였으며 Table 1에 나타내었다. 주형내의 액체상태 합금은 좌측면으로부터 열이 제거되어 응고가 이루어지며 고상선과 액상선 사이의 온도차가 커서 머시영역이 넓은 범위에 걸쳐서 형성되며 주요 매개변수가 머시영역의 속도감쇠에 미치는 영향을 고찰하기에 용이하다. 용기의 벽면에 대해 속도는 점착조건을 적용하였다.

2.6 수치계산

지배 방정식은 제어체적 근사에 기초한 유한차분법으로 이산화하였다. 해를 구하는 과정은 SIMPLER 알고리즘⁽¹⁷⁾에 의존하여 선순법을 이용한 TDMA방법을 사용하였으며 반복계산의 각 단계마다 5회의 선순법을 실행하였다. 해석대상에 대한 격자 의존성을 검토하기 위해 30×30 , 40×40 , 그리고 50×50 의 균일 격자계에 대해 해석을 수행하였다. 위의 격자계 각각에 대해서 계산된 총 고상분율의 변화(2% 이내)를 비교하여

이를 기초로 본 연구에서는 50×50 균일 격자계를 사용하였다. 해의 수렴 안정성을 위해 속도, 압력, 온도에 대해 각각 0.6, 0.8, 0.8의 이완계수를 사용하였다. 수렴기준은 해의 상대오차로 표현된 다음의 식을 사용하였다.

$$\frac{|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i|}{|\mathbf{u}^{i+1}|} \leq \epsilon \quad (22)$$

여기서 \mathbf{u} 는 벡터 $\mathbf{u} = \{u, v, T\}$ 를 나타내며, 상첨자 $i+1$ 과 i 는 반복계산단계, 그리고 $|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i|$ 는 $i+1$ 과 i 번째 반복계산단계의 u , v , T 값의 차이의 절대값을 나타낸다. ϵ 은 10^{-7} 으로 하였다. 유효비열을 나타내는 식(6)은 중앙차분을 적용하였으며, 가변점성계수법의 경우 속도 제어체적 면에서의 점성계수는 조화평균 보간법을 사용하였다.

3. 계산결과 및 고찰

3.1 수치해의 타당성

가변점성계수법과 Darcy 생성항법에 대해 고상의 점성계수와 투과율계수가 정상상태 응고과정의 속도감쇠에 미치는 영향을 고찰하기 위해서는 본 연구에서 수행된 수치해석에 대한 타당성 확인이 선행되어야 한다. Fig. 2에는 본 연구에서 고려된 물리적 모델에 대해 $Ra=10^4$, $Pr=10^3$, $Ste=0.2$ 로 하고 가변점성계수법과 Darcy 생성항법에 의존하여 계산된 정상상태의 고상선과 액상선의 위치를 나타내었다. 가변점성계수법의 경우는 유한요소 유동해석 범용코드인 FIDAP⁽¹⁸⁾의 수치결과와 비교하였고 Darcy 생성항법의 경우는 유한체적법에 의존하여 잠열을 생성항으로 처리한 Shyy와 Chen⁽¹³⁾의 수치결과와 비교하였다. 이 때 가변점성계수법의 고상의 점성계수는 $\mu_s=1000$ 이고 Darcy 생성항의 투과율 계수는 $K_0=6.25 \times 10^{-4}$ 을 사용하였다. Fig. 2(a)에서 점선은 FIDAP의 결과를 나타내고 Fig. 2(b)에서의 점선은 Shyy와 Chen의 결과를 나타내며 실선은 본 연구에서 수행된 예측결과를 나타낸다. Fig. 2로부터 본 연구에서 예측된 상변화 면의 위치를 다른 수치해와 비교한 결과 잘 일치함을 확인하였다. 따라서 정상상태 자연대류 머시응고의 해

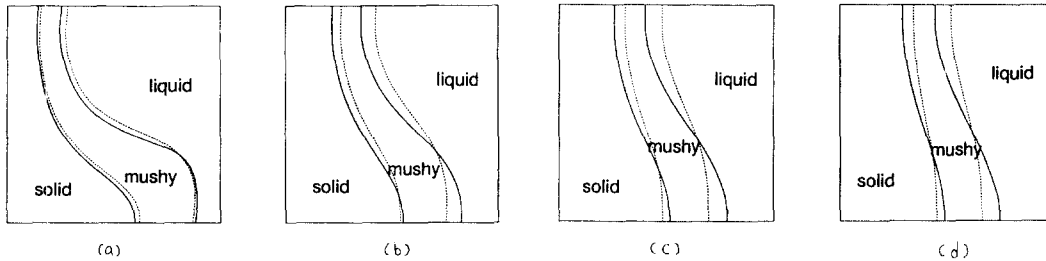


Fig. 3 Shapes of mushy region for variable viscosity method ($Ra=10^4$, $Pr=10^3$, $Ste=0.2$) (----- : linear function, ————— : exponential function) (a) $\mu_s=100$ (b) $\mu_s=500$ (c) $\mu_s=1000$ (d) $\mu_s=2000$.

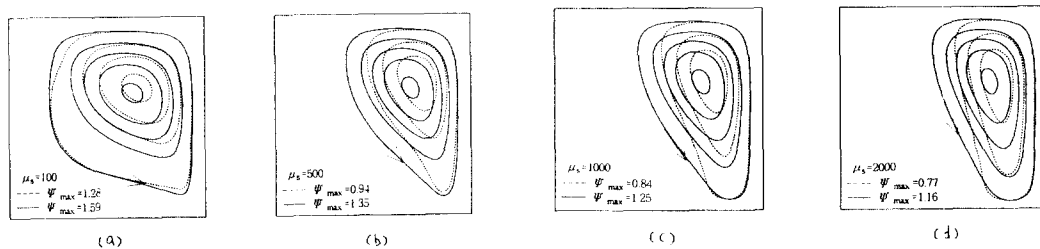


Fig. 4 Flow patterns for variable viscosity method($Ra=10^4$, $Pr=10^3$, $Ste=0.2$) (----- : linear viscosity function, ————— : exponential viscosity function).

석에 대해서 공간구배근사에 의한 유효비열법을 사용하고 가변점성계수법과 Darcy 생성항법의 속도감쇠 방법에 의존하여 수행된 본 연구에서의 예측결과가 타당함을 알 수 있다.

3.2 가변점성계수법

본 절에서는 머시영역에 대한 점성계수 함수의 형태와 고상의 점성계수값에 따른 정상상태 유동 특성을 고찰하고자 한다. 머시영역의 고상분율에 대해 점성계수가 선형적으로 변하는 경우와 지수함수적으로 변하는 경우의 각각에 대해서 Table 1에 나타낸 고상의 점성계수에 대해서 계산을 수행하였다.

Fig. 3은 $Ra=10^4$, $Pr=10^3$, 그리고 $Ste=0.2$ 인 경우 위에서 언급된 고상의 점성계수 각각에 대해 계산된 정상상태의 고상선과 액상선의 위치 및 형태의 변화를 비교한 것이다. 점선은 머시영역에서 점성계수의 선형분포가정에 의한 결과이며, 실선은 지수분포에 의존한 수치결과이다. Fig. 3에서 알 수 있듯이 고상의 점성계수가 작은 경우 ($\mu_s=100$)에는 점성계수의 선형분포와 지수함수 분포는 아주 유사한 머시의 형태를 나타내며 유

동효과에 의한 머시의 변형형태가 분명한 것을 볼 수 있다. 이러한 현상은 고상의 점성계수가 작은 경우가 큰 경우에 비해서 두드러지게 나타난다. 또한 고상의 점성계수가 증가할수록 점성계수의 선형분포는 지수분포에 비해 유동에 의한 영향이 보다 약하게 나타나는 하지만 이 두 가지 형태의 점성계수 분포가 유동 감쇠효과에 미치는 영향의 정도 차이는 그다지 크지 않다. 고상의 점성계수가 $\mu_s=2000$ 에서는 자연대류의 영향이 두드러지게 나타나지 않으며 머시영역의 형상은 전도만에 의한 응고과정에서의 경우와 유사한 형태를 나타낼 수 있다. 이러한 현상은 점성계수가 선형분포일 때 더욱 두드러진다. 따라서 고상의 점성계수로서 너무 큰 값을 사용하면 자연대류의 영향이 물리적으로 올바르게 머시영역에 반영되지 않은 결과를 얻게된다.

Fig. 4는 Fig. 3에서의 가변점성계수에 대해 계산된 정상상태 유동함수를 비교한 것이다. Fig. 3에 나타낸 머시영역의 형태로부터 예상할 수 있듯이 Fig. 4를 살펴보면 고상의 점성계수가 작은 경우 ($\mu_s=100$)에는 고상선 온도 근방에서도 비교적 상당한 유동이 형성됨을 확인할 수 있으며,

Table 2 Fraction of the solid and mush for Darcy source method.

$K_S=6.25 \times 10^{-7}$	Solid fraction	Mushy fraction	$K_S=6.25 \times 10^{-10}$	Solid fraction	Mushy fraction
$K_0=6.25 \times 10^{-9}, q=10^{-1}$	0.489	0.201	$K_0=6.25 \times 10^{-8}, q=10^{-2}$	0.495	0.199
$K_0=6.25 \times 10^{-9}, q=10^{-2}$	0.467	0.209	$K_0=6.25 \times 10^{-8}, q=10^{-3}$	0.494	0.198
$K_0=6.25 \times 10^{-4}, q=10^{-3}$	0.389	0.230	$K_0=6.25 \times 10^{-8}, q=10^{-4}$	0.489	0.200
$K_0=6.25 \times 10^{-3}, q=10^{-4}$	0.328	0.244	$K_0=6.25 \times 10^{-9}, q=10^{-9}$	0.468	0.209

Table 3 Fraction of the solid and mush for Darcy source method with different values of q for $Ra=10^4, Pr=10^3$ and $Ste=0.2$.

q	Solid fraction		Mushy fraction		Max. streamfunction	
	$K_0=6.25 \times 10^{-4}$	$K_0=6.25 \times 10^{-7}$	$K_0=6.25 \times 10^{-4}$	$K_0=6.25 \times 10^{-7}$	$K_0=6.25 \times 10^{-4}$	$K_0=6.25 \times 10^{-7}$
10^{-2}	0.3899	0.4940	0.2304	0.1984	2.053	0.878
10^{-3}	0.3890	0.4940	0.2300	0.1984	2.070	0.877
10^{-4}	0.3889	0.4940	0.2296	0.1984	2.071	0.877
10^{-9}	0.3888	0.4940	0.2296	0.1984	2.071	0.877

고상의 점성계수가 증가함에 따라 유동이 형성되는 영역의 크기가 급격히 작아지며 $\mu_s=2000$ 인 경우에는 거의 액상영역에 제한되어 유동이 형성됨을 볼 수 있다. $\mu_s=2000$ 이상이 되면 유동의 세기 변화는 미미해진다. 이는 머시영역 형태의 변화에 미치는 유동의 영향이 작아짐을 의미한다.

본 연구결과에 나타내지는 않았으나 고상의 점성계수의 변화에 따른 총 고상분율과 머시분율의 변화를 살펴보았을 때 고상의 점성계수가 증가함에 따라 총 고상분율은 증가하는 반면 머시분율은 감소하며, $\mu_s=2000$ 이상에서는 이러한 변화를 극미해짐을 확인할 수 있었다.

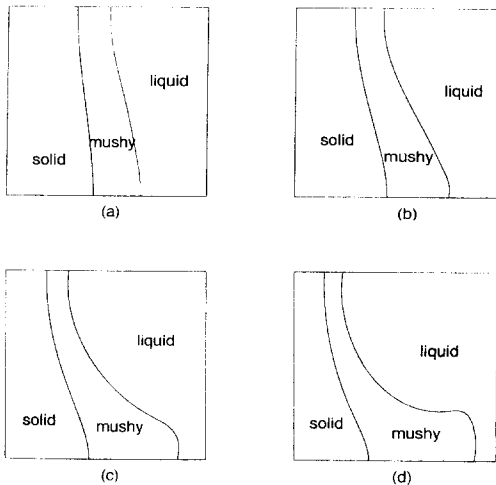


Fig. 5 Shapes of mushy region for Darcy source method ($Ra=10^4, Pr=10^3, Ste=0.2$)
 (a) $K_0=6.25 \times 10^6, q=10^1$ (b) $K_0=6.25 \times 10^5, q=10^2$
 (c) $K_0=6.25 \times 10^4, q=10^3$ (d) $K_0=6.25 \times 10^3, q=10^4$

3.3 Darcy 생성항법

Darcy 생성항법은 식(12)의 K_0 와 q 값에 의해서 머시영역에 영향을 미치게 되며 Voller와 Prakash⁽¹¹⁾에 의해서 이러한 영향에 대한 고찰의 필요성이 제시된 바 있다. 따라서 본 절에서는 K_0 와 q 값이 정상상태의 머시영역에 미치는 영향을 고찰하고자 한다.

Fig. 5는 투과율 계수 K_0 값이 각각 $K_0=6.25 \times 10^3, 6.25 \times 10^4, 6.25 \times 10^5, 6.25 \times 10^6$ 인 경우에 대해 계산된 정상상태에서의 고상선과 액상선의 위치를 비교한 것이다. Fig. 5(a)와 (b)에서 보듯이 $K_0=6.25 \times 10^5$ 정도까지는 유동효과가 머시의 형태에 미치는 영향이 약하게 나타나며 고상선과 액상선의 형태는 실질적으로 확산에 의해 영향을 받는 형태를 갖는다. 그리고 $K_0=6.25 \times 10^4$ 인 Fig. 5(c)와 $K_0=6.25 \times 10^3$ 인 Fig. 5(d)를 살펴보면 액상선의 형태 및 위치변화로 인해 머시영역이 상부에 비해서 하부가 상당히 부풀어 있으며 넓은

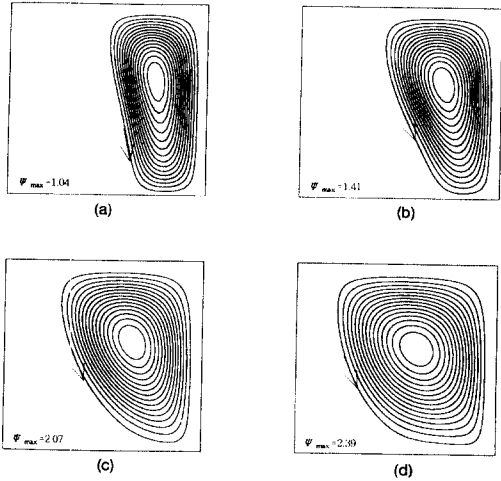


Fig. 6 Flow patterns for Darcy source method
 ($Ra=10^4$, $Pr=10^3$, $Ste=0.2$)
 (a) $K_0=6.25 \times 10^{-6}, q=10^1$ (b) $K_0=6.25 \times 10^{-5}, q=10^2$
 (c) $K_0=6.25 \times 10^{-4}, q=10^3$ (d) $K_0=6.25 \times 10^{-3}, q=10^4$

범위에 걸쳐서 분포하는 반면 고상선의 위치 및 형태의 변화는 크지 않다. 이것은 K_0 의 증가는 머시영역으로의 유동침투를 증가시키게 되어 머시의 형태에 미치는 영향이 증대되기 때문이다. 그러나 고상선 근방에서는 K_0 의 변화에 무관하게 투과율 K 가 거의 일정값을 유지하므로 고상선에 미치는 유동의 영향이 거의 일정하기 때문이다. 투과율 계수의 변화가 유동세기에 미치는 영향은 Fig. 6에 나타낸 투과율 계수 K_0 의 변화에 따른

유동함수를 나타낸 것으로부터도 확인할 수 있다. K_0 가 작은 경우에는 유동셀이 거의 순수액상 영역에 국한되며 K_0 가 증가할수록 유동의 세기는 증가하며 유동셀은 넓은 범위에 걸쳐서 형성됨을 볼 수 있다.

Table 2에서는 $K_S=6.25 \times 10^7$ 인 경우 K_0 의 변화에 따른 총 고상분율과 머시분율을 비교하였으며, 고상의 투과율(K_S) 변화가 머시영역에 미치는 영향을 고찰하고자 $K_S=6.25 \times 10^{10}$ 으로 하고 K_0 에 대해 6.25×10^8 에서 6.25×10^{15} 까지의 4가지의 서로 다른 값들에 대해서 계산된 총 고상분율과 머시분율을 비교하였다. K_0 가 증가함에 따라 총 고상분율은 감소하고 머시영역의 범위는 넓게 나타난다. 또한 고상의 투과율을 달리하여 계산된 결과를 살펴보면 투과율 계수(K_0)가 동일한 경우 고상분율과 머시분율은 거의 동일하며 q 값의 차이에 대한 영향이 작음을 확인할 수 있다. 한편 투과율 계수 $K_0=6.25 \times 10^4$ 과 $K_0=6.25 \times 10^7$ 각각에 대해 상수 q 를 변화시킨 경우에 대한 고상분율과 머시분율, 그리고 최대 유동함수 값을 Table 3에 나타내었다. $q=10^2$ 에서부터 $q=10^5$ 의 값에 대해서는 고상분율과 머시분율 그리고 유동함수값들의 변화가 작음을 알 수 있다.

3.4 하이브리드법에서의 Pr의 영향

임계고상분율을 기준으로 하여 머시영역을 모델링하는 경우, 가변점성계수가 적용되는 구간에

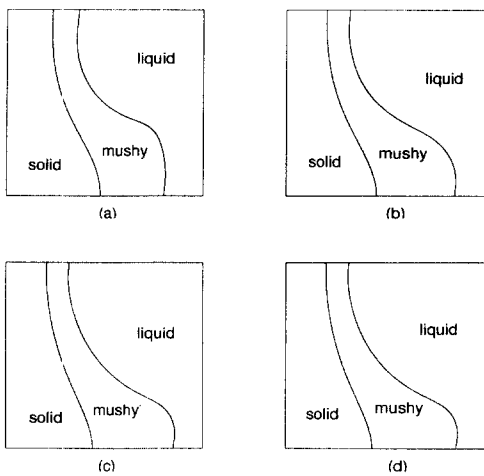


Fig. 7 Shapes of mushy region for hybrid method ($Ra=10^4, Ste=0.2$)
 (a) $Pr=1.49 \times 10^{-2}$ (b) $Pr=1.0 \times 10^{-1}$
 (c) $Pr=1.0$ (d) $Pr=1.0 \times 10^3$

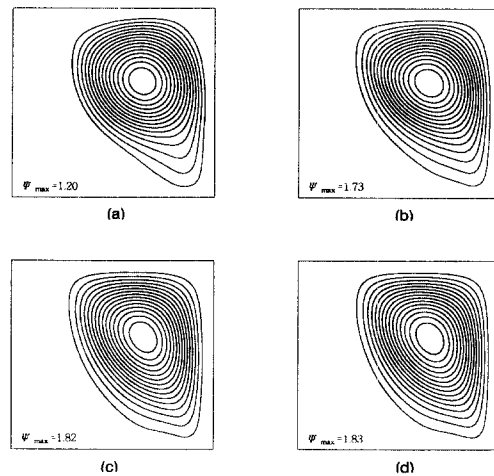


Fig. 8 Flow patterns for hybrid method ($Ra=10^4, Ste=0.2$)
 (a) $Pr=1.49 \times 10^{-2}$ (b) $Pr=1.0 \times 10^{-1}$
 (c) $Pr=1.0$ (d) $Pr=1.0 \times 10^3$

서는 에너지 방정식의 유효비열과 관련하여 유효 Pr가 변하게 되며 결과적으로는 머시영역의 형상에 영향을 미칠 것으로 예상된다. 본 절에서는 Oldenburg와 Spera⁽¹⁵⁾가 제시한 임계고상분율값을 이용하여 $f_{s,cr}=0.5$ 로 하고, $Ra=10^4$, $Ra=10^5$ 각각에 대해 Pr값을 1.49×10^2 에서 1.0×10^3 까지 변화시킨 경우에 대한 정상상태 해를 고찰하였다.

Fig. 7은 $Ra=10^4$ 에 대해 Pr값을 변화시켰을 때의 고상선과 액상선의 형태를 비교한 것이다. Pr값의 변화는 고상선보다는 액상선의 형태에 영향을 미치지만 그 영향은 그리 크지 않음을 볼 수 있다. Fig. 8은 $Ra=10^4$ 에 대해 Pr값의 변화에 따른 유동함수를 비교한 것이다. Pr값이 작은 경우에 유동셀은 다소 작게 나타나고, Pr값이 증가함에 따라 유동셀의 크기와 최대유동의 세기는 증가한다. 그러나 $Pr=1$ 이상에서는 유동함수의 최대값의 변화는 거의 없다. 본 연구결과에 나타내지는 않았으나 동일한 Ra값과 Pr값에 대해 Darcy생성항법을 적용한 Shyy와 Chen⁽¹⁴⁾의 결과와 비교해 본 결과 유동의 세기가 다소 작게 나타남을 확인할 수 있었다. 그리고 Pr값이 작은 경우는 큰 경우에 비해서 액상선의 형태에 있어서 큰 차이를 나타내었다. 이러한 차이는 임계고상분율보다 작은 고상분율을 갖는 머시영역에서

는 하이브리드법에서의 점성계수 변화에 의한 속도감쇠효과가 Darcy생성항에 의한 것보다 크기 때문이다.

Fig. 9와 Fig. 10은 $Ra=10^5$ 에 대해 Pr값을 변화시켰을 때의 머시영역의 형태와 유동함수를 비교한 것이다. Ra값의 증가로 인한 대류효과의 증가는 Fig. 8과 Fig. 10을 비교해 보면 모든 Pr값에 대해 유동셀의 크기를 증가시킨다. 그러나 $Ra=10^5$ 의 경우에 대한 결과인 Fig. 10을 살펴보면 Pr값을 변화시키는 경우에도 유동셀의 형태변화는 작으며 서로 유사한 형태를 갖는다. $Ra=10^5$ 에 대해서도 Shyy와 Chen⁽¹⁴⁾의 결과와 비교해 본 결과 최대유동함수 값은 다소 작게 나타났으나 머시의 형태는 차이가 작음을 확인할 수 있었다. 이것은 Ra값이 증가함에 따라 머시의 형태에 영향을 미치는 것은 머시영역의 점성계수의 변화에 대한 영향보다는 자연대류의 영향이 지배적임을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 자연대류를 수반한 머시용고의 해석 시, 잠열방출 효과에 대해서는 유효비열을 사용하고, 머시영역의 속도감쇠를 얻기 위한 방법(가변점성계수법, Darcy 생성항법, 하이브리드

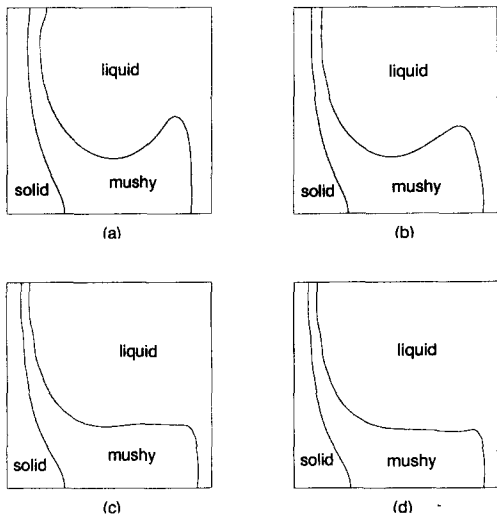


Fig. 9 Shapes of mushy region for hybrid method ($Ra=10^5$, $Ste=0.2$) (a) $Pr=1.49 \times 10^2$ (b) $Pr=1.0 \times 10^1$ (c) $Pr=1.0$ (d) $Pr=1.0 \times 10^3$

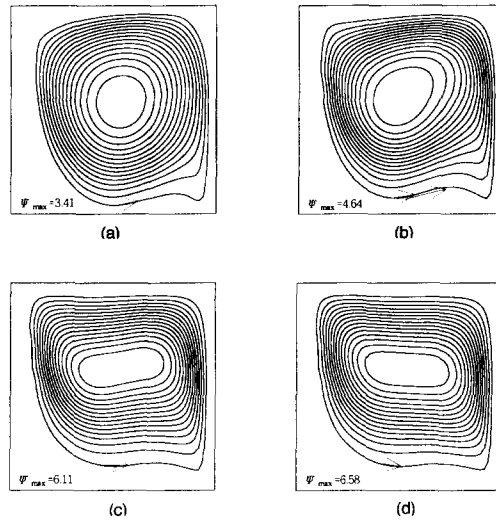


Fig. 10 Flow patterns for hybrid method ($Ra=10^5$, $Ste=0.2$) (a) $Pr=1.49 \times 10^2$ (b) $Pr=1.0 \times 10^1$ (c) $Pr=1.0$ (d) $Pr=1.0 \times 10^3$

법)에서 주요인자들이 정상상태 머시형상의 결정에 미치는 영향을 파악하였으며, 기존의 연구에서 개별적으로 사용된 머시영역의 속도감쇠방법에 대해서 종합적으로 고려하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 점성계수의 선형분포는 지수분포에 비해 유동에 의한 영향이 보다 약하게 나타나기는 하지만 이 두 가지 형태의 점성계수 분포가 유동감쇠효과에 미치는 영향의 정도 차이는 그다지 크지 않다. 고상의 점성계수가 작은 경우 ($\mu_s = 100$)에는 유동효과에 의한 머시의 변형형태가 분명하게 나타나고 $\mu_s = 2000$ 에서는 자연대류의 영향이 두드러지게 나타나지 않고 거의 액상영역에 제한되어 유동이 형성되며 머시영역의 형상은 전도만에 의한 응고과정에서의 경우와 유사한 형태를 나타낸다.

(2) Darcy 생성항에서 고상의 투과율(K_s)을 변화시켰을 때 머시영역에서의 투과율 계수(K_0)가 동일하면 유체유동이 머시의 형태에 미치는 영향이 동일함을 확인할 수 있었다. 그리고 본 연구에서 고려된 투과율 계수에 대해 $q = 10^{-2} \sim 10^{-5}$ 의 값에 대해서는 정상상태의 고상분율과 머시분율의 변화는 매우 작다.

(3) 하이브리드모델의 경우, Pr값의 변화는 주로 액상선의 형태변화에 영향을 준다. 또한 Ra값이 증가함에 따라 머시의 형태에 영향을 미치는 것은 머시영역의 가변점성효과 보다는 자연대류의 영향이 지배적임을 알 수 있다.

후 기

본 연구는 교육부의 1997년도 기계공학 학술연구 조성비 지원(과제번호: ME97-A-18)에 의해 수행되었으며 이에 대해 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Salcudean, M and Abdullar, Z., 1988, "On the Numerical Modeling of Heat Transfer during Solidification Processes," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 25, pp. 445~473.
- (2) Voller, V. R., Swaminathan, C. R. and Thomas, B. G., 1990, "Fixed Grid Techniques for Phase Change Problems : A Review," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 30, pp. 875~898.
- (3) Usmani, A. S. and Lewis, R. W., Jan. 1990, "Solidification in a Square Cavity in the Presence of Natural Convection," *In Proceeding of the 3rd International Conference on Numerical Methods in Engineering : Theory & Application*, Swansea, U.K., Elsevier Applied Science, pp. 374~380.
- (4) Oldenburg, C. M. and Spera, F. J., 1991, "Numerical Modeling of Solidification and Convection in a Viscous Pure Binary Eutectic System," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, No. 8, pp. 2107~2121.
- (5) Swaminathan, C. R. and Voller, V. R., 1992, "A General Enthalpy Method for Modeling Solidification Processes," *Metallurgical Transactions B*, Vol. 23B, pp. 651~664.
- (6) 이진호, 모정하, 황기영, 1995, "접촉열저항이 있는 수직벽에서의 응고과정 해석," 대한기계학회논문집, 제19권, 제1호, pp. 193~201.
- (7) Viskanta, R., 1988, "Heat Transfer during Melting and Solidification of Metals," *J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 1205~1219.
- (8) Dantzig, J. A., 1989, "Modeling Liquid-Solid Phase Changes with Melt Convection," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, pp. 1769~1785.
- (9) Voller, V. R., 1991, "An Overview of the Modeling of Heat and Fluid Flow in Solidification Systems," *Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes V* Edited by M. Rappaz, M.R. Ozgu and K. Mahin, pp. 661~673.
- (10) Voller, V. R., Cross, M. and Markatos, N. C., 1987, "An Enthalpy Method for Convection/Diffusion Phase Change," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 24, pp. 271~284.
- (11) Voller, V. R. and Prakash, C., 1987, "A Fixed Grid Numerical Modeling Methodology for Convection-Diffusion Mushy Region Phase-Change Problems," *Int. J. Heat Mass*

- Transfer*, Vol. 30, No. 8, pp. 1709~1719.
- (12) Bennon, W. D. and Incropera, F. P., 1987, "A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change Systems -II. Application to Solidification in a Rectangular Cavity," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 30, No. 10, pp. 2171~2187.
- (13) Shyy, W. and Chen, M.-H., 1990, "Steady-State Natural Convection with Phase Change," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 2545~2563.
- (14) Shyy, W. and Chen, M.-H., 1990, "Effect of Prandtl Number on Buoyancy-Induced Transport Processes with and without Solidification," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 2565~2577.
- (15) Oldenburg, C. M. and Spera, F. J., 1992, "Hybrid Model for Solidification and Convection," *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vol. 21, pp. 217~229.
- (16) Beckermann, C. and Viskanta, R., 1988, "Double-Diffusive Convection during Dendritic Solidification of a Binary Mixture," *PCH*, Vol. 10, pp. 195~213.
- (17) Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Hemisphere Publishing Corp.
- (18) Engelman, M. S., 1993, *FIDAP Theoretical Manual*. Fluid Dynamics International, Evanston, IL
- (19) 유호선, 1994, "수직환상주형내 Al-Cu합금의 응고과정 및 냉각속도의 조대편석에 대한 영향," *대한기계학회논문집*, 제18권, 제7호, pp. 1818~1832.