

적층형태 및 보강방향에 따른 복합적층판의 종방향 모멘트 무시효과

The Effect of Neglecting the Longitudinal Moment Terms in a Composite Laminated Plate with Stacking Sequence and Fiber Orientation

이 봉 학* 이 정 호** 홍 창 우** 김 경 진***
Lee, Bong-hak, Kim, Kyung-Jin, Lee, Jung-ho, Hong, Chang-Woo

ABSTRACT

The most of the design engineers for construction has academic background of bachelors degree. Theories for advanced composite structures are too difficult for such engineers and some simple but accurate enough methods are necessary. The senior author has reported that some laminate orientations have decreasing values of D_{16} , B_{16} , D_{26} and B_{26} stiffnesses as the ply number increases. Such plates behave as special orthotropic plates and simple formulas developed by the author can be used.

Most of the bridge and building slabs on girders have large aspect ratios. For such cases further simplification is possible by neglecting the effect of the longitudinal moment terms(M_x) on the relevant partial differential equations of equilibrium. In this paper, the result of the study on the subject problem is presented.

Key words: *Simple method, Influence of neglecting M_x , Large aspect ratio, Finite difference method, Special orthotropic plate*

1. 서 론

최근 산업의 발전으로 인해 구조물이 대형화되어 감에 따라 건설비용의 증가 및 지진시 더 큰 관성력을 받는 등 여러 문제점을 발생시키고 있다.

이에 따라 구조물 경량화와 보다 효과적인 보수·보강재료로서 첨단 복합재료의 사용이 절실히 요구되고 있으며, 전 세계적으로 첨단 복합재료를 건설분야

에 응용하고자 하는 노력들이 활발히 진행되고 있다.[1,2] 복합재료는 가볍고 부식되지 않으며, 임의의 방향으로 보강이 가능하고 스티프너등과 같은 기하

학적 보강 없이 구조부재를 보강 할 수 있다. 이러한 특성은 건설재료로 활용하기 위한 매우 적합한 조건이라 할 수 있다. 복합재료이론은 고전이론에 비해 너무 어렵기 때문에 일반 기술자들이 토목·건설분야에 복합재료를 응용하기에는 많은 단점을 갖는다. 그러나 이러한 단점은 토목구조물처럼 단면이 커져서 복합적층판의 적층수가 증가하면 비교적 쉬운 특별직교 이방성 적층판 이론의 사용이 가능한

* 강원대학교 토목공학과 교수

** 강원대학교 토목공학과 박사과정

*** 충주대학교 토목공학과 교수

몇몇 적층형태가 밝혀짐에 따라 어느 정도 극복이 되었다.^[2]

이 논문에서는 복합재료를 일반 구조물에 적용할 때 쉽고도 간편한 해석을 위한 자료를 제공하기 위하여 교량이나 빌딩 슬래브에서 많이 볼 수 있는 사변탄성지진인 경계조건을 고려하여 수치해석을 수행하였다. 또한 형상비가 증가할 때 적층판의 적층형태와 보강재 보강방향에 따라 평형방정식에서 종방향 모멘트 M_x 항의 영향이 무시 될 수 있는 범위를 처짐과 모멘트 그리고 고유진동수에 대해 고찰함으로서 비교적 간편한 해석방법을 제시하고자 하였다.

2. 사용된 진동이론

이 논문에서 사용된 진동 이론은 임의의 단면과 임의의 경계 조건을 갖는 구조 요소에 대한 진동 해석 방법으로 1974년 김에 의해 고안, 제시된 것이다. 이 방법은 최근 복합재료를 포함하는 2차원문제도 확장 적용되어졌다^[14].

교량의 상판, 건축물의 바닥, 벽체 등 대부분의 구조물은 2차원의 구조 부재로 이루어져 있다. 이러한 구조물은 대부분 탄성지지되었거나 변단면으로 되어 있어 해석상 어려움이 뒤따르게 된다^[16,17]. 균등 단면을 갖고 탄성보로 지지된 경우라 할지라도, 해석적으로 진동 문제를 해결하기란 그리 쉬운 일이 아니다.

따라서 이 논문에서 사용한 방법은 이러한 문제를 쉽게 해결할 수 있고 매우 간편하게 "정확한"답을 얻을 수 있다는 큰 장점이 있다.

구조물의 고유 진동수는 공명 상태 하에서 확산하기 시작하는 처짐 모드 형태 하에서의 주파수이다. 자유 진동으로 인한 처짐으로부터 이러한 처짐을 유발하는데 필요한 힘을 알 수 있다. 일련의 이러한 과정에 의해 결정된 모드 형태가 충분히 정확하다면, 수렴된 것과 바로 이전 값 사이에서의 상대적 최대 처짐은 이러한 판성력 하에서 불변하다. 구조물의 진동은 조화 운동이고 진폭 형상은 삼각 함수에 의해 표시될 수 있는 부분이 있다. 처음에 제 1모드만 고려하면, 구조 부재의 처짐 형태는 다음 식(1)와 같이 쓸 수 있다.

$$w(x, y, t) = W(x, y) \sin \omega t \quad (1)$$

여기서

W : 최대 진폭

ω : 고유 진동 주파수

t : 시간

이다.

Newton의 법칙에 의해 진동하는 질량 m 의 동적 힘은 다음 식(2)과 같다.

$$F = m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2)$$

식(1)을 식(2)에 대입하면 식(3)으로 된다.

$$F = -m\omega^2 W(x, y) \sin \omega t \quad (3)$$

여기서 ω 와 W 는 미지수이다. 고유진동수 ω 를 구하기 위하여 다음의 과정이 취해진다. 어떤 몇 개의 점에서 최대 처짐의 진폭은 식(4)과 같이 임의로 주어진다.

$$w(i, j)(1) = W(i, j)(1) \quad (4)$$

여기서 (i, j) 는 고려한 점을 나타낸다. 이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한 최대 진폭에 대응하는 동적 힘은 식(5)으로 표현될 수 있다.

$$F(i, j)(1) = m(i, j) [\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \quad (5)$$

이 힘에 의해 일어나는 새로운 변위는 F 의 함수이고 다음 식(6)과 같이 쓸 수 있다

$$\begin{aligned} w(i, j)(2) &= f \{ m(i, j) [\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \} \\ &= \sum \Delta(i, j, k, 1) \{ m(i, j) [\omega(i, j)(1)]^2 \\ &\quad w(i, j)(1) \} \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 $\Delta(i, j, k, 1)$ 처짐에 대한 영향 계수이다.

공명 상태하에서 구조 부재의 모든 점에서 고려한 $w(i, j)(1)$ 과 $w(i, j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음 식(7)의 조건을 만족해야 한다.

$$w(i, j)(1) / w(i, j)(2) = 1 \quad (7)$$

식(2.25)의 방정식으로 부터 (i, j) 의 각 점에서의 $w(i, j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유 진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $\omega(i, j)$ 의 충분한 같은 값이 모든 (i, j) 점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫번째 cycle의 계산에 의해

얻어진 $w(i,j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인 곳에서 $w(i,j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다. 두 번째 cycle에서의 처짐은 다음 식(8)과 같이 구해질 수 있다.

$$w(i,j)(3) = f \{ m(i,j)[w(i,j)(2)]^2 w(i,j)(2) \} \quad (8)$$

식(8)에서 $w(i,j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다. 복합재료 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 이상적이 아닌 지지 조건을 가진 판의 경우 이 판을 몇 개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 이 방법은 구조물의 고유 진동 해석을 위해 매우 정확하고 간편한데 이 방법의 정확성은 처짐영향계수의 정확성에 비례한다. 이 논문에서의 처짐영향계수는 유한 차분법^[4,5,7]을 사용하여 구하였다.

3. 수치 해석

3.1 수치해석을 위한 flow chart

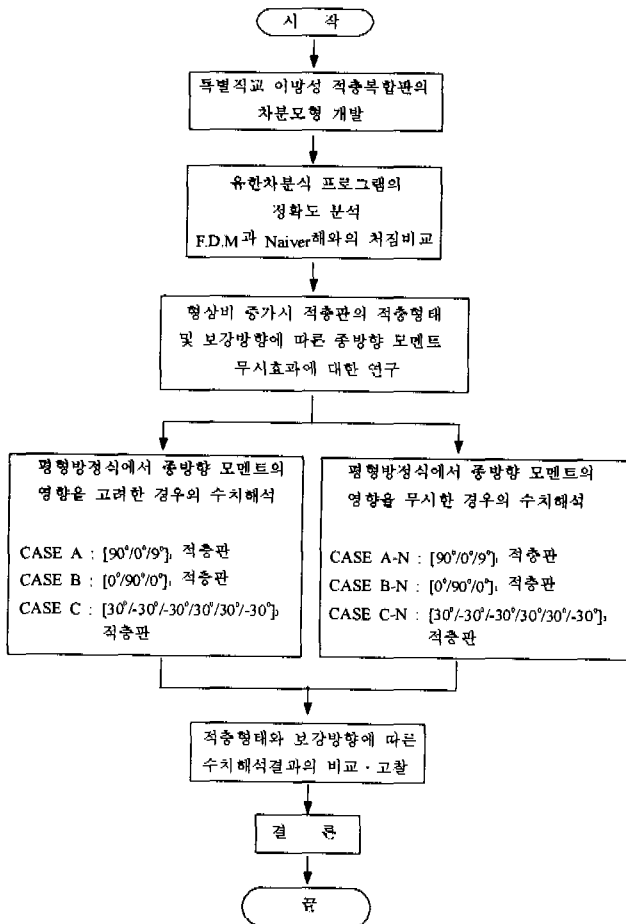


Figure 1. Flow chart for numerical analysis

이 논문에서 수치해석은 Figure 1의 Flow chart에서와 같은 방법으로 수행하였다. 즉, 특별직교 이방성 적층복합판 이론에 의해 차분식을 만들고 프로그램의 정확성을 Navier해와 비교하여 검증하였다. 또한 형상비가 증가함에 따라 평형방정식에서 종방향 모멘트의 영향은 감소하는데, 적층형태와 보강방향에 따라 어느정도 범위에서 종방향 모멘트의 영향을 무시할 수 있는지에 대해 수치해석을 통해 비교·고찰하고자 적층형태와 보강방향을 3가지 CASE로 하여 수치해석을 수행하였다.

3.2 유한 차분식의 정확도 분석

임의의 경계조건을 갖는 직교이방성판에 대한 해석해가 없기 때문에 네 변이 모두 단순지지되었을 경우의 비교적 정확해로 알려진 Navier 해와 F.D.M에 의한 처짐값을 비교하였다.^[7] 이때 Mesh의 크기를 5×5로 하여 등분포 하중 100 N/m²이 작용하는 특별 직교 이방성 적층판의 최대 처짐을 계산하여, Navier해와 유한 차분식으로 계산된 계산치와 비교하여 정확성을 규명하였다. 대상구조물의 물성은 다음과 같으며 복합 적층판의 형상을 Figure 2에 나타내었다. Figure 3은 분할 요소를 나타낸다.

$$E_1 = 67.36 \text{ Gpa}, \quad E_2 = 8.12 \text{ Gpa},$$

$$G_{12} = 3.0217 \text{ Gpa}, \quad \nu_{12} = 0.272,$$

$$\nu_{21} = 0.0328 \quad \text{Uniform Load} = 100 \text{ N/m}^2$$

$$r = 1.$$

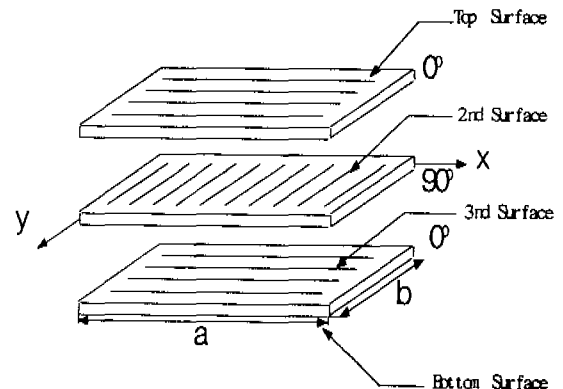


Figure 2. [0°, 90°, 0°], Special Orthotropic Laminated Plate

Table 1. Deflection Ratio of F.D.M/Navier

		Navier/F.D.M				
x(m)\y(m)	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	
0.5	1.005	1.004	1.004	1.004	1.005	
1.5	1.001	0.999	0.999	0.999	1.001	
2.5	1.000	0.998	0.998	0.998	1.000	
3.5	1.001	0.999	0.999	0.999	1.001	
4.5	1.005	1.004	1.004	1.004	1.005	

Table 1은 Mesh 크기가 5×5일 경우의 유한 차분 법에 의한 처짐과 Navier의 해법에 의해 구해진 처짐비를 나타낸 것으로써 중앙점의 처짐을 비교하여 본 결과 0.0014정도의 아주 미소한 오차를 나타내었다. 사용된 F.D.M의 오차범위는 Δ^2 인데 $\Delta^2 = (0.5)^2 = 0.25 > 0.0014$ 로서 사용되어진 F.D.M. 프로그램이 정확하다는 것을 확인 할 수 있었다. Mesh 크기를 더욱 작게 한다면 오차의 범위는 더욱 줄일 수 있다.

3.3 탄성보로 지지된 특별직교 이방성 적층복합 판의 해석

형상비 증가에 따른 종방향 모멘트 M_x 의 영향을 무시한 결과와 종방향 모멘트의 영향을 고려한 결과에 대하여 각각 처짐과 판의 설계시에 중요시 고려되는 종방향 모멘트 M_x , 횡방향 모멘트 M_y 그리고 진동수에 대하여 각각 수치해석을 수행하였다.

보강재의 배향각에 따른 결과가 판의 강성에 어떠한 영향을 주는지에 대하여도 결과고찰을 수행하였다.

복합 적층판의 적층형태 및 보강재의 보강 방향은 $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_1$, $[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ/30^\circ/-30^\circ]_3$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_1$ 세가지 형태의 적층복합판을 고려하였으며 Figure 2, Figure 3 그리고 Figure 4에 나타내었다. 이때의 경계조건은 Figure 5와 같이 사변이 탄성지지원 판에 등분포하중을 적용하여 수치해석을 수행하였다. 적층복합판의 형상은 $a=5m$, $b=5m$ 를 기준으로 하여 형상비를 $c=a/b=1\sim 5$ 까지 변화시켜 수치해석을 수행하고 고찰하였다. 고려된 적층복합판의 물성값은 유한 차분식의 정확성 검증에서 고려한 물성값을 사용하였다.

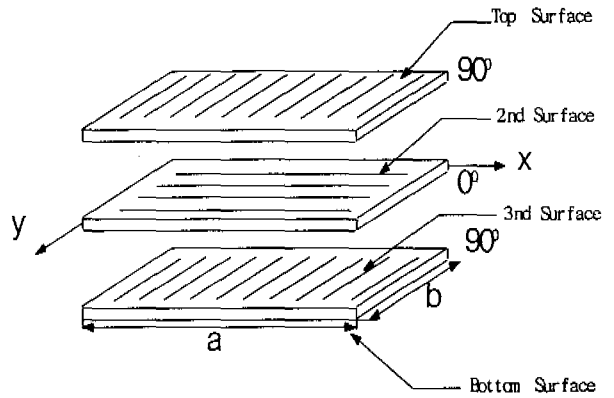


Figure 3. $[90^\circ, 0^\circ, 90^\circ]$, Type Special Orthotropic Laminated Plate

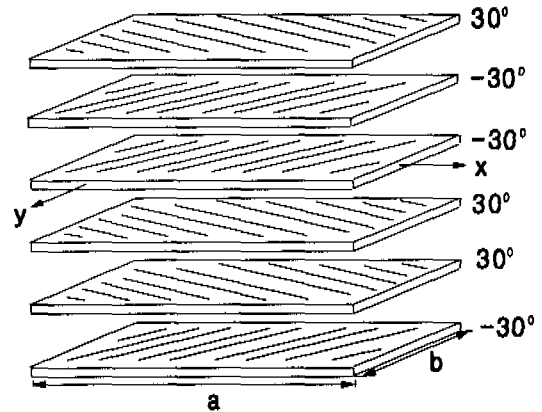


Figure 4. $[30^\circ, -30^\circ, -30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, -30^\circ]_1$, Type Special Orthotropic Laminated Plate

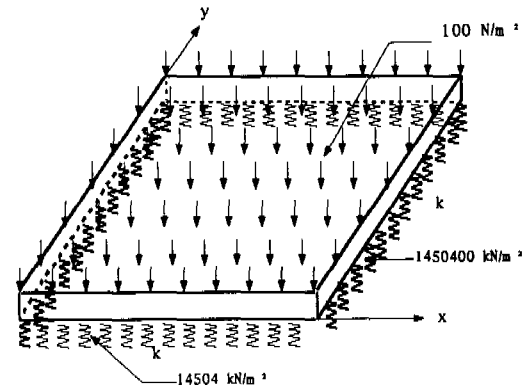


Figure 5. Plate under consideration

실제의 구조물에서의 경계조건을 다양하게 적용시키기 위해 사변탄성지지의 경계조건에서 길이의 변화가 없는 Y방향의 양단은 반력값을 크게 주어 슬래브의 단면으로 가정하였고 길이의 변화가 있는 타단은 거더로 가정하기 위해 반력값을 양단보다 적게 주었다. 형상비 증가에 따른 판의 거동을 고찰하기

위하여 형상비 c 를 1~5까지 증가할 때 이에 대한 구조거동에 대하여 고찰하였고 또한 섬유 배향각에 따른 판의 거동을 고찰하기 위해 적층형태를 각각 $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_1$, $[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ/30^\circ/-30^\circ]_3$ 그리고 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_1$ 세 가지 형태에 대하여 등분포하중 100 N/m^2 을 가하여 판의 거동을 각 적층형태에 따라 비교 고찰하였다. 탄성지지력값 “ k ” 값을 단변의 경우 14504 kN/m^2 그리고 장변의 k 값을 1450400 kN/m^2 으로 하였고, 하중값은 등분포하중 100 N/m^2 을 주었다.^[20]

종방향 모멘트인 M_x 항을 평형방정식에서 무시했을 때, 구조거동에 미치는 영향을 연구하기 위해 편의상 적층복합판에 대해 다음과 같은 기호로 정의하여 수치해석을 수행하였다.

Case A : $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_1$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 고려한 경우.

Case A-N : $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_1$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 무시한 경우.

Case B : $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_1$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 고려한 경우.

Case B-N : $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_1$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 무시한 경우.

Case C : $[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ/30^\circ/-30^\circ]_3$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 고려한 경우.

Case C-N : $[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ/30^\circ/-30^\circ]_3$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 무시한 경우.

Table 2. Flexural stiffness of the plate (N · m)

Case Stiffness	$[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_1$	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_1$	$[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ/30^\circ/-30^\circ]_3$
D_{11}	2926.95	18492.90	726608.80
D_{22}	18492.90	2926.95	2542119.91
D_{12}	626.77	626.77	814523.34
D_{66}	849.85	849.85	862643.41
D_{16}	-0.9×10^{-9}	-0346×10^{-9}	9.6207×10^{-10}
D_{26}	0.7×10^{-3}	-0.27×10^{-4}	-1.1511×10^{-10}

각각의 Case에 대한 적층복합판의 휨강성 D_{ij} 를 계산한 결과를 Table 2에 나타내었다. D_{16} 와 D_{26} 의

값은 0에 가까운 값을 나타내므로 무시하여 특별적으로 이방성판으로 해석하였다.

4. 해석결과 및 고찰

4.1 처짐에 관한 고찰

Figure 6~Figure 8에서 보는바와 같이 형상비가 증가함에 따라 M_x 의 영향을 무시했을 경우와 고려했을 경우가 급격히 수렴함을 알았다. Table 3은 세가지 CASE에 대한 판 중앙점에서의 처짐을 나타낸 것이다.

적층형태가 $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_1$ 일 때 판 중앙에서의 수렴 정도가 형상비가 1일 때 0.940이었으나 형상비가 2일 때 c 가 1.034로 3.4%, 형상비가 3일 때 1.004로 차이가 겨우 0.4%로서 종방향 모멘트 M_x 의 영향을 무시했을 경우에도 공학적으로 충분히 정확하다.

적층형태가 $[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ/30^\circ/-30^\circ]_3$ 일 경우에 대하여 비슷한 경향을 나타내었으며, 형상비가 3이상 일 경우 1.017로 수렴함을 알 수 있었다.

$[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_1$ 과 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_1$ 의 두 경우의 값을 비교해 보면 구조물 설계시 형상비가 증가할 경우 주 보강재의 보강 방향을 횡방향으로 할 때 처짐이 가장 적으며 종방향 모멘트항인 M_x 의 영향을 무시했을 때와 고려했을 때의 수렴정도가 더 확실하게 나타났다. 이에 따라 대상 구조물과 같은 경우는 주 보강재의 보강 방향을 횡방향인 단변부로 보강하는 것이 더욱 효과적이다. 처짐의 경우 형상비가 증가함에 따라 섬유의 배향각에 따라 약간의 차이는 있으나 M_x 의 영향을 고려하였을 경우와 고려하지 않았을 경우 대체로 형상비가 3 이상일 때 급격히 수렴함 하여 종방향 모멘트 M_x 항의 영향을 무시하고도 정확한 해석이 가능함을 알 수 있다.

4.2 모멘트에 관한 고찰

Figure 9~Figure 11에서 알수 있듯이 종방향 모멘트 M_x 와 횡방향 모멘트 M_y 의 경우에도 평형방정식에서 종방향 모멘트 M_x 항의 영향을 무시한 경우와 고려한 경우의 결과 값이 형상비가 3이상

일 때 공학적으로 충분히 정확한 것을 알 수 있다. 따라서 대상구조물의 경우 적층판의 휨에 대한 평형방정식에서 종방향 모멘트 M_x 항의 영향을 무시하고 보다 더 간편하게 수치해석을 수행하여도 형상비가 3 이상일 때는 비교적 정확한 모멘트 값을 얻을 수 있다. Table 4와 Table 5는 종방향 모멘트 M_x 와 횡방향 모멘트 M_y 의 결과값을 형상비 증가에 따라 나타낸 것이다.

Table 3. Deflection at the center of the plate for each cases (unit : m)

Case	Aspect ratio (a/b)				
	1	2	3	4	5
A	0.3866E-01	0.4579E-01	0.4458E-01	0.4441E-01	0.4442E-01
A-N	0.4112E-01	0.4430E-01	0.4442E-01	0.4443E-01	0.4443E-01
A / A-N	0.940	1.034	1.004	1.000	1.000
B	0.3860E-01	0.1945E+00	0.2714E+00	0.2900E+00	0.2893E+00
B-N	0.1412E+00	0.2411E+00	0.2698E+00	0.2775E+00	0.2795E+00
B / B-N	0.238	0.807	1.006	1.045	1.035
C	0.8224E-04	0.3002E-03	0.3807E-03	0.3966E-03	0.3959E-03
C-N	0.2138E-03	0.3340E-03	0.3742E-03	0.3864E-03	0.3901E-03
C / C-N	0.385	0.899	1.017	1.026	1.015

Table 4. M_x at the center of the plate for each cases (unit : N · m)

Case	Aspect ratio (a/b)				
	1	2	3	4	5
A	0.4540E+02	0.1229E+02	0.1006E+02	0.1054E+02	0.1060E+02
A-N	0.2718E+02	0.1121E+02	0.1062E+02	0.1060E+02	0.1060E+02
A / A-N	1.670	1.096	0.947	0.994	1.000
B	0.2785E+03	0.3644E+03	0.2187E+03	0.1209E+03	0.7727E+02
B-N	0.7627E+03	0.2635E+03	0.1192E+03	0.8074E+02	0.7059E+02
B / B-N	0.365	1.383	1.835	1.497	1.094
C	0.2369E+03	0.2521E+03	0.1631E+03	0.1174E+03	0.1022E+03
C-N	0.7366E+02	0.9153E+02	0.9753E+02	0.9935E+02	0.9991E+02
C / C-N	3.216	2.754	1.675	1.182	1.023

Table 5. M_y at the center of the plate for each cases (unit : N · m)

Case	Aspect ratio (a/b)				
	1	2	3	4	5
A	0.2784E+03	0.3226E+03	0.3135E+03	0.3124E+03	0.3125E+03
A-N	0.2923E+03	0.3117E+03	0.3125E+03	0.3125E+03	0.3125E+03
A / A-N	0.962	1.035	1.003	0.999	1.000
B	0.4530E+02	0.2248E+03	0.3076E+03	0.3253E+03	0.3231E+03
B-N	0.1783E+03	0.2746E+03	0.3024E+03	0.3098E+03	0.3118E+03
B / B-N	0.2541	0.8186	1.0172	1.050	1.0362
C	0.6734E+02	0.2408E+03	0.3048E+03	0.3169E+03	0.3160E+03
C-N	0.1698E+03	0.2661E+03	0.2985E+03	0.3083E+03	0.3113E+03
C / C-N	0.397	0.905	1.021	1.028	1.015

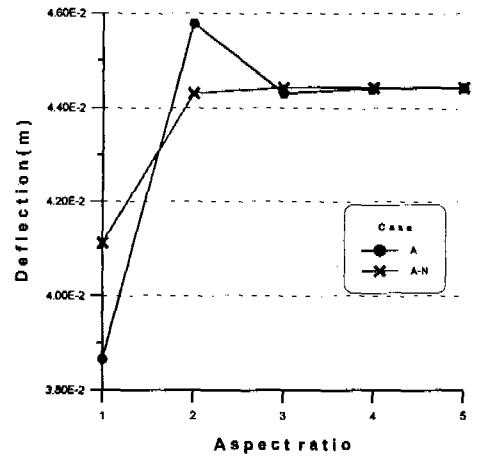


Figure 6. Deflection at the center of $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_1$ type laminate plate

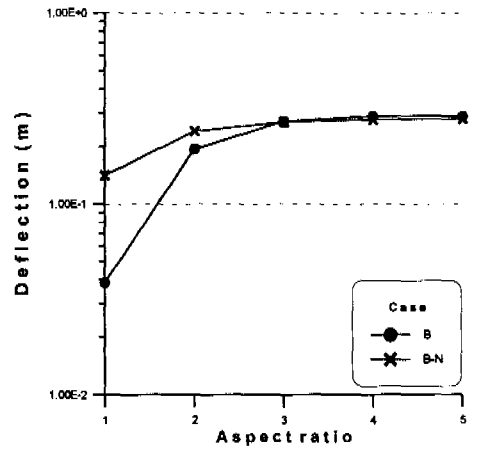


Figure 7. Deflection at the center of $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_1$ type laminate plate

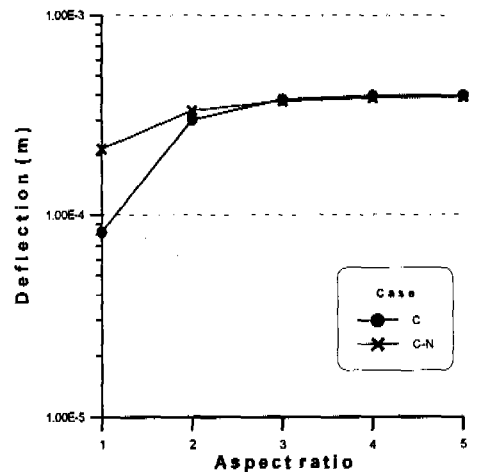


Figure 8. Deflection at the center of $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_1$ type laminate plate

[30°/-30°/-30°/30°/30°/-30°]₃ type laminate plate

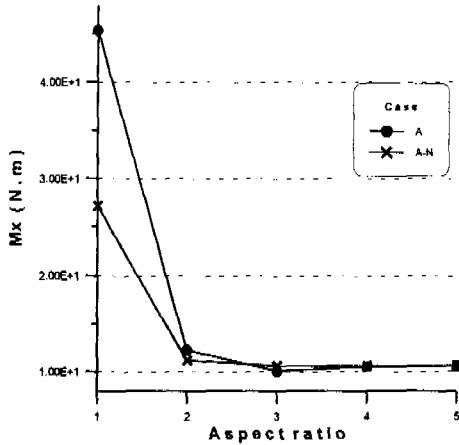


Figure 9. Moment Mx at the center of [90°/0°/90°]₁ type laminate plate

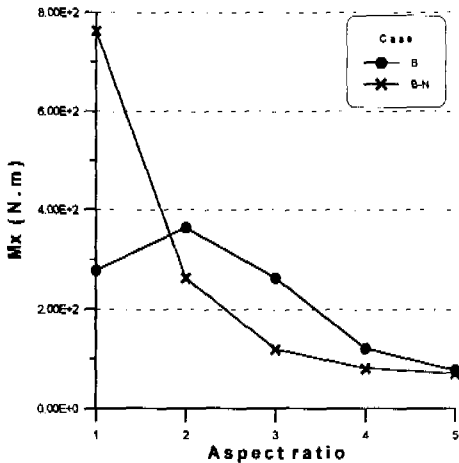


Figure 10. Moment Mx at the center of [0°/90°/0°]₁ type laminate plate

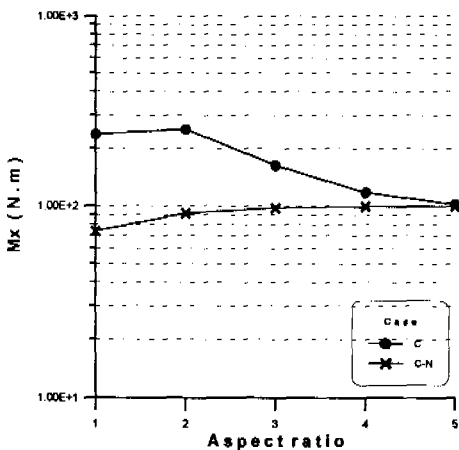


Figure 11. Moment Mx at the center of [30°/-30°/-30°/30°/30°/-30°]₃ type laminate plate

4.3 진동수에 관한 고찰

Figure 12~Figure 14에서 보듯이 형상비가 증가함에 따라 종방향 모멘트 Mx를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 고유진동수 값이 급속히 수렴되었다. Table 6~Table 8은 적층형태와 보강방향에 따른 고유진동수 값을 나타낸것이다. 종방향 모멘트를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 진동수 비는 형상비가 2일 때 각각의 Case에 대하여 0.034, 0.087 그리고 0.859이나 형상비가 3일 때 각각의 Case에 대하여 1.004, 1.006 그리고 0.932로 차이가 아주 미소함을 나타냈고 섬유류의 주 배향각이 [90, 0, 90]r형태에서 가장 높은 진동수 값을 나타내었다. 이것은 형상비가 증가함에 따라 주 모멘트의 영향이 My에 배분되어 보강재를 My방향으로 더 보강된 보강형태일 때 휨에 대한 평형방정식에서 종방향 모멘트 Mx의 영향이 보다 더 효과적으로 무시 될 수 있음을 의미한다.

Table 6. Natural frequency of [90°/0°/90°]₁ type laminate plate

Aspect ratio (a : b)	Natural frequency (rad/sec)		A / A-N
	A	A-N	
1 : 1	0.3158680	0.2942354	1.70
1 : 2	0.2755990	0.2752115	0.996
1 : 3	0.2700084	0.2724341	1.001
1 : 4	0.2682006	0.2719809	0.982
1 : 5	0.2674001	0.2719254	0.983

Table 7. Natural frequency of [0°/90°/0°]₁ type laminate plate

Aspect ratio (a : b)	Natural frequency (rad/sec)		B / B-N
	B	B-N	
1 : 1	0.3160987	0.1633178	0.1935
1 : 2	0.1420860	0.1229926	1.155
1 : 3	0.1187562	0.1143306	1.039
1 : 4	0.1123595	0.1110985	1.011
1 : 5	0.1097795	0.1096971	1.000

Table 8. Natural frequency of [30°/-30°/-30°/30°/30°/-30°]₃ type laminate plate

Aspect ratio (a : b)	Natural frequency (rad/sec)		C / C-N
	C	C-N	
1 : 1	0.6735762	0.3998069	1.68
1 : 2	0.3577977	0.3234809	1.11
1 : 3	0.3121582	0.3020700	1.03
1 : 4	0.2981793	0.2936838	1.02
1 : 5	0.2921322	0.2895626	1.01

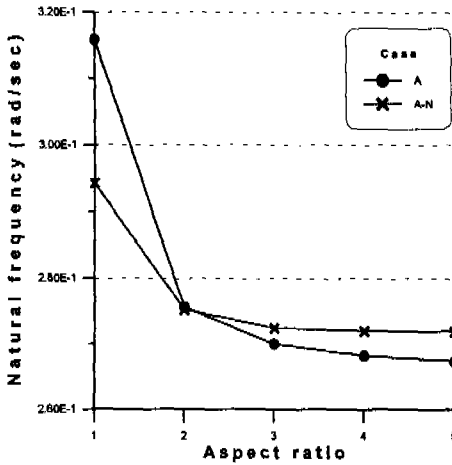


Figure 12. Natural frequency $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_1$ type laminate plate

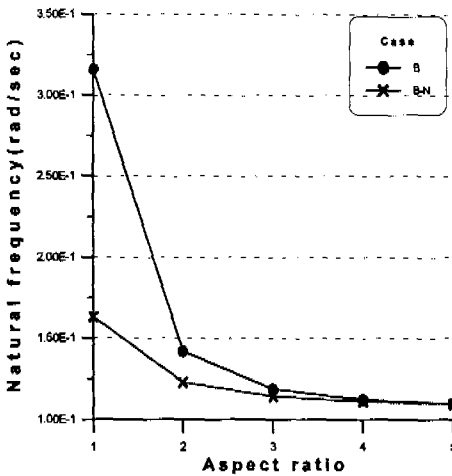


Figure 13. Natural frequency $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_1$ type laminate plate

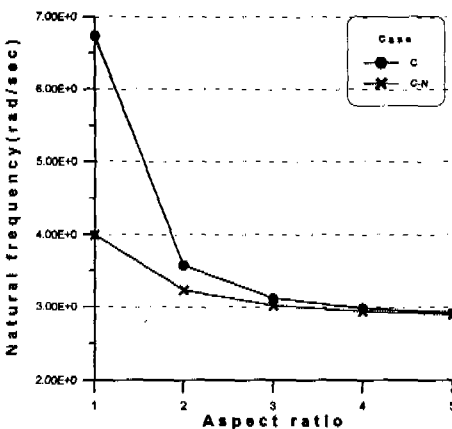


Figure 14. Natural frequency $[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ/30^\circ/-30^\circ]_3$ type laminate plate

5. 결론

이 논문에서는 교량이나 빌딩슬래브의 한 형 형태 인 사변이 탄성지지되어 있고 양단의 지지력 값이 타단보다 큰경우에 대하여 형상비 증가에 따른 복합 적층판에서의 적층형태 및 보강재의 보강방향에 따라 평형방정식에서 종방향 모멘트항인 M_x 의 영향을 무시한 효과에 대해 연구한 결과로서 형상비 증가시험에 대한 저항이 종방향보다는 횡방향에서 이루어 지므로 종방향 모멘트(M_x)값은 점차 적어지고 형상 비가 3 이상일 경우 구조거동에 미치는 영향이 무시 될 수 있는 정도로 작게 나타났다. 또한, 주 보강재 의 보강 방향을 길이의 변화가 없는 단변 방향으로 보강할때 평형방정식에서 종방향 모멘트항인 M_x 의 무시 효과가 극대화됨을 알았다. 형상비 증가에 따 른 평형방정식에서의 종방향 모멘트 M_x 의 영향이 3 이상일 경우 무시 될 수 있으므로 구조해석 및 설계 시 보다 간편하게 해석이 가능하다. 또한 평형방정 식에서 종방향 모멘트 M_x 가 무시 될 수 있는 범 위를 보임으로서 실무자들을 위한 기초자료로 제공 될 수 있을 것으로 사료된다.

참고 문헌

1. Kim, D. H. (1995), *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, Published by E&FN SPON, Chapman & Hall, London.
2. 김덕현, "건물과 사회 간접 시설의 보수와 재건을 위한 복합재료", 대한토목학회지, 제 45권 제 4호 1997. 4., pp 49-66.
3. 김덕현, "새로운 1000년의 건설재료(건설을 위한 복합재료)", 새로운 건설재료에 대한 강연회, 대한 토목학회 강원지회, 강원대학교, 1997. 6. 20.
4. Amir Wadi Al-Khafaji & John R. Tooley *"Numerical Methods in Engineering Practice"* Elsevier Science Publishers B.V.
5. 김덕현, 이정호, 박정호, "탄성지지된 복합재료 판의 고유진동수", 한국전산구조공학회 가을 학회 발표회 논문집, 제10권 제2집(통권 제19호), 충주대학교, 1997. 10. 11, pp215-222.
6. Goldberg, John E., and Kim, D.H., "The Effect of Neglecting the Radial Moment Terms in Analyzing a Sectorial Plate by Means of Finite Element Method", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, No. 1, pp 10-15, 1987.

- Differences", Proc. of the Seventh International Symposium on Space Technology and Sciences Tokyo, Japan, 1967.
7. Stephen P. Timoshenko, and S. Woinowsky-Kreger, Theory of Plate and Shells, Second Edition, McGraw Hill Book Co., 1989.
 8. 김덕현, "전자계산기에 의한 초대형 매트릭스의 해법", 대한토목학회지, 제 15권 제 1호, 1967.
 9. Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., Behavior of Structures Compositd of Composite Materials, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987.
 10. Kim, D. H., "Analysis of Triangularly Folded Plate Roofs of Umbrella Type," 16th Congress of Applied Mechanics, Tokyo, Japan, 1966. 10. 19.
 11. Kim, D.H., Park. J.S., Kim, K.J. and Shim, D.S., "Possibility of Using the Classical Mechanics for the Preliminary Design of Laminate composite Structures for Civil Construction", Proc. of Korean Soc. Civ. Engrs, Oct., PP 22~7, 1991.
 12. Kim, D.H., Park, J.S. and Kim K.J., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Laminated Thick Composite Plates II", Second Japan International SAMPE Symposium and Exhibition, Dec., PP 1310~7, 1991.
 13. Ashton, J.E., and Whitney, J.M., Theory of Laminated Plates, Technomics, 1970.
 14. Kim, D.H., et al., "A Simple Method of Vibration Analysis of Irregularly shaped Composite Structural Elements", JISSE-1, (First Japan International Sampe Symposium and Exhibition, Tokyo, 28, November 1, pp 386-8, 1989.
 15. Timoshenko s. and Goodier, J. N., Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, N.Y., 1951.
 16. 김덕현, 심도식, 김성환. "고층건물 경량화를 위한 첨단 복합재료 상판", 한국 전산구조공학회 학술발표회 논문집, 1997.
 17. 김덕현, 이정호, 박정호 "탄성지지된 복합재료 상판의 고유진동수", 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 1997.
 18. Kim. D.H., "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Members", Proceedings, International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites, Seoul, Korea, October, 1974.
 19. 홍창우, 심도식, 이봉학, 김덕현, "축하중을 받고 첨가된 질량이있는 적층복합판의 간편한 진동해석", 대한토목학회 학술 발표회 논문집(I), pp347~354, 10, 21, 1995.
 20. 도로설계 실무편람 구조물 공헌, 한국도로공사, 1996.
 21. Euler, L., "De motu Vibratorir Tympanorum," Novi Commentari Acad. Petropolit., 10(1766), 243-260
 22. Bernoulli, J., "Essai Theoreque sur les Vibrations de Plaques Elastiques Rectangulares et Libres," Nova Acta Acad. Petropolit., 5(1789), 192-219.
 23. A Guide-Book of Mathematics, The Macmillan company, New York, 1964.
 24. Menedea, H. and White J. L., A WideAngle X-Ray diffraction Method of Determining Chopped Fiber Orientation in composite With Application to Extrusion Through Dies., 24, 1984.
 25. "The Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plates With Clamped or Supported Edges" R. F. S. Hearmon., Journal of Applied Mechanics, December 1959.
 26. "Free Vibration and Buckling of Symmetric Cross-Ply Laminated Plates by an Exact Method" A. A. Khdeir Journal of Sound and Vibration 1998.