論文98-35S-6-6

불확실성을 갖는 비선형 시스템의 퍼지 H^∞ 제어기 설계

(Fuzzy H^∞ Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems)

李 甲 來 *, 丁 銀 泰 **, 朴 烘 培 ***

(Kap Rai Lee, Eun Tae Jeung, and Hong Bae Park)

요 약

본 논문은 파라미터 불확실성을 갖는 비선형 시스템을 안정화하며, 폐루프 시스템의 외란감쇠에 대한 L_2 이득 제한조건을 만족시키는 견실 퍼지 H^∞ 제어기 설계기법을 제시한다. 불확실성을 갖는 비선형 시스템을 불확실성을 갖는 Takagi-Sugeno(T-S) 모델로 표현하고 병렬 분산 보상(PDC: parallel distributed compensation)의 개념을 이용하여 제어기를 설계한다. 파라미터 불확실성을 갖는 T-S 퍼지모델에 대한 감쇠율을 만족하는 폐루프 시스템의 안정성 조건과 Lyapunov 함수를 이용하여 외란감쇠 조건을 유도하고, 선형행렬 부등식(LMI: linear matrix inequality)을 이용하여 견실 퍼지 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건을 구한다. 마지막으로 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 퍼지 H^∞ 제어기 설계 예를 보인다.

Abstract

This paper presents a method for designing robust fuzzy H^∞ controllers which stabilize nonlinear systems with parameter uncertainty and guarantee an induced L_2 norm bound constraint on disturbance attenuation for all admissible uncertainties. Takagi and Sugeno's fuzzy models with uncertainty are used as the model for the uncertain nonlinear systems. Fuzzy control systems utilize the concept of so-called parallel distributed compensation(PDC). Using a single quadratic Lyapunov function, the stability condition satisfying decay rate and disturbance attenuation condition for Takagi and Sugeno's fuzzy model with parameter uncertainty are discussed. A sufficient condition for the existence of robust fuzzy H^∞ controllers is then presented in terms of linear matrix inequalities(LMIs). Finally, design examples of robust fuzzy H^∞ controllers for uncertain nonlinear systems are presented.

I. 서 론

제어 시스템의 해석과 설계에서 안정성 문제는 매우 중요하며, 최근 퍼지 제어 시스템의 안정성에 대한 연구결과[1,2]가 발표되었다. Wang 등[2]은 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지모델로 표현된 비선형 시스템을 안정화하는 방법을 제시하고, 병렬분산보상(PDC: parallel distributed compensation) 개념을 이용하여 퍼지 제어기를 설계하였다. 또한, Tanaka 등[3]은

* 正會員, 斗源工科大學 컴퓨터應用制御科
(Department of Computer Applied Control, Doowon Technical College)
** 正會員, 昌原大學校 制御計測工學科
(Department of Control and Instrumentation Eng., Changwon National Univ.)
*** 正會員, 慶北大學校 電子電氣工學部
(School of Electronic and Electrical Engineering, Kyungpook National Univ.)
接受日字: 1998年1月20日, 수정완료일: 1998年6月3日

T-S 퍼지모델에 대하여 선형 행렬 부등식을 이용하여 감쇠율(decay rate)을 만족하는 안정성 조건을 구하였다.

비선형성 이외에도 시스템에 존재하는 불확실성으로 인하여 전체 시스템이 불안정해질 수 있으므로 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 퍼지 제어 연구[4,5]가 이루어졌다. 최근, Tanaka 등[4]은 전건부에 파라미터 불확실성을 갖는 퍼지 시스템에 대한 견실 안정성 조건을 유도하였다. 또한 Tanaka 등[5]은 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 안정성을 해석하여 시스템의 안정성을 피하였다. 그러나 그들의 설계기법은 폐루프 시스템의 안정성을 판명하기 전에 미리 상태궤환 이득을 결정하여야 한다는 단점을 가지고 있다.

외란에 대한 오차신호의 L_2 이득 제한조건과 안정성을 만족시키는 H^∞ 제어기법은 선형시스템에 있어 매우 체계적으로 개발되어 왔으며 많은 분야에서 적용되고 있다. 그러나 퍼지 제어 시스템에 대한 H^∞ 제어 설계기법을 제시한 논문은 그다지 많지 않다. 최근 Chen 등[6]은 불확실성을 갖는 단일 입출력 비선형 시스템에 대하여 H^∞ 추종 성능을 갖는 적응 퍼지 제어기 설계기법을 제시하였다.

본 논문에서는 퍼지 제어기를 이용하여 불확실성 갖는 비선형 시스템에 대한 견실 H^∞ 제어 문제를 고려한다. 감쇠율을 만족하는 안정성과 외란감쇠 문제를 고려한 퍼지 H^∞ 제어기를 설계하기 위하여, 불확실성 비선형 시스템은 불확실성을 갖는 T-S 퍼지모델로 나타내며 병렬분산보상의 개념을 이용하여 제어기를 설계한다. 또한 폐루프 시스템이 점근적으로 안정하며 외란에 대한 오차신호의 L_2 이득 제한조건을 만족할 충분조건을 유도한다. 이러한 충분조건 식으로부터 불확실성을 갖는 T-S 퍼지모델에 대한 퍼지 제어기가 존재할 충분조건을 선형 행렬 부등식으로 나타내며, 견실 퍼지 제어기의 제어 이득값은 선형 행렬 부등식의 해로부터 직접 구한다. 마지막으로 제안한 이론의 타당성을 예제를 통하여 보인다.

Ⅱ. 문제설정과 예비지식

T-S 퍼지모델은 비선형 시스템을 모델링하는데 효과적인 방법으로 알려져 있다. 불확실성을 갖는 T-S 퍼지모델

Plant Rule i:

IF $x_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $x_n(t)$ is M_{in}

THEN $\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_{1i} + \Delta B_{1i}(t))w(t) + (B_{2i} + \Delta B_{2i}(t))u(t)$

$$z(t) = C_i x(t) + D_{1i} w(t) + D_{2i} u(t), \quad i = 1,2,\cdots,r \tag{1}$$

를 고려한다. 여기서 M_{ij}는 퍼지집합이고, $x(t) \in \mathbf{R}^n$는 상태, $u(t) \in \mathbf{R}^m$는 입력, $w(t) \in \boldsymbol{R}^p$ 는 제한된 에너지를 갖는 외부 외란, r은 IF-THEN 규칙의 수, A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_i, D_{1i}와 D_{2i}는 공칭시스템을 나타내는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이다. 그리고 불확실성 행렬은

$$[\Delta A_i(t)\ \Delta B_{1i}(t)\ \Delta B_{2i}] = HF(t)[E_{1i}\ E_{2i}\ E_{3i}], \quad i = 1,2,\cdots,r \tag{2}$$

와 같이 표현할 수 있다고 가정하고, H, E_{1i}, E_{2i}, E_{3i}, $i = 1,2,\cdots,r$은 적절한 차원을 갖는 기지의 상수행렬이고, $F(t)$ 는

$$F(t) \in \Omega := \{F(t) | F^T(t)F(t) \le I,\ F(t)\text{의 요소들은 Lebesgue 측정가능}\} \tag{3}$$

와 같이 크기가 제한된 미지의 행렬함수이다. 여기서 I는 단위행렬을 나타낸다. 주어진 $(x(t), u(t))$에 대해서, T-S 퍼지모델의 최종 출력은 추론된 w_i을 이용하여 각 동작점에서의 선형화된 r개의 선형모델의 조합인

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(x(t))\{(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_{1i} + \Delta B_{1i}(t))w(t) + (B_{2i} + \Delta B_{2i}(t))u(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(x(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t))\{(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_{1i} + \Delta B_{1i}(t))w(t) + (B_{2i} + \Delta B_{2i}(t))u(t)\} \\ z(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t))\{C_i x(t) + D_{1i} w(t) + D_{2i} u(t)\} \end{aligned} \tag{4}$$

와 같이 추론된다. 여기서

$$\begin{aligned} w_i(x(t)) &= \prod_{j=1}^{n} M_{ij}(x_j(t)) \\ h_i(x(t)) &= \frac{w_i(x(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(x(t))} \\ x(t) &= [x_1(t)\ x_2(t)\ \cdots\ x_n(t)]^T \end{aligned}$$

이고 $M_{ij}(x_j(t))$는 멤버쉽 함수 M_{ij}에서 $x_j(t)$의 멤버쉽 등급이다. 그리고 모든 t에 대하여

$$\begin{aligned} &w_i(x(t)) \ge 0, \quad i = 1,2,\cdots,r \\ &\sum_{i=1}^{r} w_i(x(t)) > 0 \end{aligned} \tag{5}$$

을 가정하면,

$$h_i(x(t)) \ge 0, \quad i = 1,2,\cdots,r$$

$$\sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) = 1 \tag{6}$$

이다. 그리고 모든 $i=1,2,\cdots,r$에 대해서 (A_i, B_{2i})는 제어가능(controllable)이라 가정한다. 퍼지 시스템 (1)을 안정화하는 견실 퍼지 제어기로

$$\text{Control Rule } i\text{: IF } x_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } x_n(t) \text{ is } M_{in} \text{ THEN } u(t)=K_i x(t), \quad i=1,2,\cdots,r \tag{7}$$

와 같이 표현된 상태궤환 제어기를 고려한다. 이러한 퍼지 제어기의 최종 출력은

$$u(t)=\sum_{i=1}^{r} h_i(x(t))K_i x(t) \tag{8}$$

이다. 퍼지 시스템 (4)에 퍼지 제어기 (8)을 적용하였을 때, 폐루프 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [\overline{A}+B_p F(t) C_q]x(t)+[B_w+B_p F(t) D_{qw}]w(t) \\ z(t) &= C_z x(t)+D_{zw}w(t) \end{aligned} \tag{9}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t))h_j(x(t))\{A_i+B_{2i}K_j\}, \\ C_z &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t))h_j(x(t))\{C_i+D_{2i}K_j\}, \\ C_q &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t))h_j(x(t))\{E_{1i}+E_{3i}K_j\}, \\ B_w &= \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t))B_{1i}, \quad D_{qw}=\sum_{i=1}^{r} h_i(x(t))E_{2i}, \\ D_{zw} &= \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t))D_{1i}, \quad B_p=\sum_{i=1}^{r} h_i(x(t))H \end{aligned} \tag{10}$$

이다. Lyapunov 함수 $V(x,t)=x^T(t)Px(t)$, $P>0$를 고려할 경우, Lyapunov 미분함수가 시스템 (9)의 $w(t)=0$인 모든 궤적에 대해 조건

$$\dot{V}(x,t) \le -2\alpha V(x) \tag{11}$$

을 만족하는 $\alpha>0$가 존재하면 불확실성 시스템 (9)는 자승적 α-안정화로 정의한다. 조건 (11)이 만족되면 폐루프 시스템 (9)의 평형점(equilibrium point)은 점근적으로 안정하고 감쇠율은 적어도 α를 만족한다. 시스템 (9)의 초기값 $x(0)=0$으로 생각하여 외란 w에서 제어 출력 z로의 L_2 이득 성능을

$$\int_0^{T_1} \|z(t)\|^2 dt \le \gamma^2 \int_0^{T_1} \|w(t)\|^2 dt \tag{12}$$

로 정의하여 외란에 대한 오차신호의 확장된 L_2 이득을 γ 보다 작게 하는 L_2 이득 성능문제를 생각한다. 여기서 $w(t)\in L_2(0, T_1)$이며 $\|\cdot\|$은 Euclidean 노음을 나타낸다.

본 논문에서는 불확실성을 갖는 퍼지 시스템 (4)에서 폐루프 시스템 (9)를 자승적 α-안정화할 뿐만 아니라 L_2 이득 성능을 만족시키는 상태궤환 제어기 K_i를 설계하고자 한다.

Ⅲ. 불확실성을 갖는 T-S 퍼지모델에 대한 퍼지 H^∞ 제어기 설계

이 절에서는 파라미터 불확실성을 갖는 T-S 퍼지 시스템 (1)에서 자승적 α-안정화와 L_2 이득 성능을 만족시키는 견실 퍼지 제어기 (8)이 존재할 충분조건과, 제어기 설계방법을 제시한다.

정리 1 파라미터 불확실성을 갖는 T-S 퍼지 시스템 (1)을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} \overline{A}^T P+P\overline{A}+C_z^T C_z+\lambda C_q^T C_q+2\alpha P & PB_p & PB_w+C_z^T D_{zw}+\lambda C_q^T D_{qw} \\ B_p^T P & -\lambda I & 0 \\ B_w^T P+D_{zw}^T C_z+\lambda D_{qw}^T C_q & 0 & D_{zw}^T D_{zw}+\lambda D_{qw}^T D_{qw}-\gamma^2 I \end{bmatrix} \le 0 \tag{13}$$

을 만족하는 양한정 행렬 Q, 양수 λ, γ가 존재하면, 불확실성을 갖는 폐루프 시스템 (9)는 자승적 α-안정하고 L_2 이득 성능 (12)를 만족한다.

증명 폐루프 시스템 (9)의 상태공간 표현식을

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \overline{A}x(t)+B_p p(t)+B_w w(t), \\ q(t) &= C_q x(t)+D_{qw}w(t), \\ z(t) &= C_z x(t)+D_{zw}w(t), \\ p(t) &= F(t)q(t), \quad \|F(t)\| \le 1. \end{aligned} \tag{14}$$

로 다시 나타낸다. 여기서, $\overline{A}, B_p, B_w, C_z, C_q, D_{qw}, D_{zw}$는 (10)과 같다. Lyapunov 함수 $V(x,t)=x^T(t)Px(t)$를 고려하여 $w(t)=0$을 갖는 시스템 (14)의 궤적을 따라 (11)을 전개하면 자승적 α-안정화 조건은

$$p^T(t)p(t) \le x^T(t)C_q^T C_q x(t) \tag{15}$$

를 만족하는 영이 아닌 모든 $x(t)$와 $p(t)$에 대해

$$x^T(t)(\overline{A}^T P+P\overline{A}+2\alpha P)x(t)+p^T(t)B_p^T Px(t)+x^T(t)PB_p p(t) \le 0 \tag{16}$$

을 만족하는 것과 등가다. S-과정(S-procedure)[9]을 이용하여 전개하면 자승적 α-안정화에 대한 필요충분조건은

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} + \lambda C_q^T C_q + 2\alpha P & PB_p \\ B_p^T P & -\lambda I \end{bmatrix} \le 0 \tag{17}$$

을 만족하는 $P>0$와 $\lambda \ge 0$가 존재하는 것이다.

(14)를 만족하는 모든 $x(t)$와 $w(t)$에 대해

$$\frac{d}{dt} V(x) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) \le 0 \tag{18}$$

을 만족하는 Lyapunov 함수 $V(x,t) = x^T(t) P x(t)$, $P>0$가 존재하면 L_2 이득 성능 $\|z\|_2 \le \gamma \|w\|_2$을 만족한다. 즉, $x(0)=0$으로 두고 (18)을 적분하면

$$V(x(T)) + \int_0^{T_1} (z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t)) dt \le 0 \tag{19}$$

이고, $V(x(T_1)) \ge 0$이므로 $\|z\|_2 \le \gamma \|w\|_2$ 이다. (18) 조건식은

$$\dot{p}^T(T) p(t) \le (x^T(t) C_q^T + w^T(t) D_{qw}^T)(C_q x(t) + D_{qw} w(t)) \tag{20}$$

를 만족하는 영이 아닌 모든 $x(t)$와 $p(t)$에 대해

$$x^T(t)(\bar{A}^T P + P\bar{A} + C_z^T C_z) x(t) + x^T(t) P B_p p(t) + x^T(t)(P B_w + C_z^T D_{zw}) w(t) + p^T(t) B_p^T P x(t) + w^T(t)(B_w^T P + D_{zw}^T C_z) x(t) + w^T D_{zw}^T D_{zw} w(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) \le 0 \tag{21}$$

을 만족하는 것과 등가다. S-과정을 이용하여 전개하면 (20)과 (21)을 만족하기 위한 조건은

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} + C_z^T C_z + \lambda C_q^T C_q & PB_p & PB_w + C_z^T D_{zw} + \lambda C_q^T D_{qw} \\ B_p^T P & -\lambda I & 0 \\ B_w^T P + D_{zw}^T C_z + \lambda D_{qw}^T C_q & 0 & D_{zw}^T D_{zw} + \lambda D_{qw}^T D_{qw} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \le 0 \tag{22}$$

을 만족하는 $P>0$와 $\lambda \ge 0$가 존재하는 것과 등가다. (13)은 (22)의 (1,1)블럭에 양한정 행렬 $2\alpha P$을 더한 식이므로 (13)을 만족하면 L_2 이득 성능에 대한 조건 (22)는 만족됨을 알 수 있다. 또한 (13)을 만족하면

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} + C_z^T C_z + \lambda C_q^T C_q + 2\alpha P & PB_p \\ B_p^T P & -\lambda I \end{bmatrix} \le 0 \tag{23}$$

을 만족한다. (23)은 (17)의 (1,1)블럭에 양한정 행렬 $C_z^T C_z$을 더한 식이므로 (23)을 만족하면 (17)은 만족한다. 따라서 (13)을 만족하면 자승적 α-안정화에 대한 조건 (17)을 만족함을 알 수 있다.

따름정리 1은 정리 1의 결과로부터 퍼지 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건과 제어기 설계방법을 제시한다.

따름정리 1 파라미터 불확실성을 갖는 T-S 퍼지 시스템 (1)과 설정된 $\gamma>0$을 고려한다. $i,j=1,2,\cdots,r$에 대해서

$$\Phi_{ii} < 0, \tag{24}$$

$$\Phi_{ij} + \Phi_{ji} < 0, \quad i<j \tag{25}$$

을 만족하는 양한정 행렬 Q, 행렬 Y_i ($i=1,2,\cdots,r$), 양수 λ가 존재하면, 불확실성을 갖는 페루프 시스템 (9)가 자승적 α-안정하고 L_2 이득 성능 (12)가 만족되는 퍼지 H^∞ 제어기 (8)이 존재한다. 여기서,

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & H & B_{1i} & T_{ij}^T & W_{ij}^T \\ H^T & -\lambda I & 0 & 0 & 0 \\ B_{1i}^T & 0 & -\gamma^2 I & E_{2i}^T & D_{1i}^T \\ T_{ij} & 0 & E_{2i} & -\lambda^{-1} I & 0 \\ W_{ij} & 0 & D_{1i} & 0 & -I \end{bmatrix}$$

$$G_{ij} = A_i Q + Q A_i^T + B_{2i} Y_j + Y_j^T B_{2i}^T + 2\alpha Q,$$

$$T_{ij} = E_{1i} Q + E_{3i} Y_j,$$

$$W_{ij} = C_i Q + D_{2i} Y_j \quad i=1,2,\ldots,r \tag{26}$$

이다. 더욱이 상태궤환 이득들은

$$K_i = Y_i Q^{-1}, \ i=1,2,\ldots,r \tag{27}$$

이다.

증명

$Q=P^{-1}$로 두고 (13)의 앞과 뒤에 Diag[Q I I]을 각각 곱하면 조건 (13)은

$$\begin{bmatrix} \bar{A}Q + Q\bar{A}^T + QC_z^T C_z Q + \lambda Q C_q^T C_q Q + 2\alpha Q & B_p & B_w + QC_z^T D_{zw} + \lambda Q C_q^T D_{qw} \\ B_p^T & -\lambda I & 0 \\ B_w^T + D_{zw}^T C_z Q + \lambda D_{qw}^T C_q Q & 0 & D_{zw}^T D_{zw} + \lambda D_{qw}^T D_{qw} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \le 0 \tag{28}$$

이다. (28)은

$$\begin{bmatrix} \bar{A}Q + Q\bar{A}^T + 2\alpha Q & B_p & B_w \\ B_p^T & -\lambda I & 0 \\ B_w^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} QC_q^T & QC_z^T \\ 0 & 0 \\ D_{qw}^T & D_{zw}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_q Q & 0 & D_{qw} \\ C_z Q & 0 & D_{zw} \end{bmatrix} \le 0 \tag{29}$$

이며 Schur-보수(Schur-complement)[9]을 이용하면 (29)은

$$\begin{bmatrix} \overline{A}Q+Q\overline{A}^T+2\alpha Q & B_p & B_w & QC_q^T & QC_z^T \\ B_p^T & -\lambda I & 0 & 0 & 0 \\ B_w^T & 0 & -\gamma^2 I & D_{qw}^T & D_{zw}^T \\ C_qQ & 0 & D_{qw} & -\lambda^{-1}I & 0 \\ C_zQ & 0 & D_{zw} & 0 & -I \end{bmatrix} \le 0 \quad (30)$$

와 등가다. (10)을 (30)에 대입하고

$$Y_i = K_iQ, \quad i=1,2,\cdots,r \quad (31)$$

로 두면 (30)은

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t))h_j(x(t))\Phi_{ij} \le 0 \quad (32)$$

이다. 여기서 Φ_{ij}, G_{ij}, T_{ij}, W_{ij}는 (26)과 같다. (32)는

$$\sum_{i=1}^{r} h_i(x(t))h_i(x(t))\Phi_{ii} + \sum_{i<j}^{r} h_i(x(t))h_j(x(t))\Phi_{ij} \le 0 \quad (33)$$

와 등가이므로, (24)와 (25)가 만족되면 (33)이 만족됨을 쉽게 알 수 있다.

참고 1 참고문헌 [5]의 정리 4.2를 이용하여 직접 제어이득 K_i를 구하려 할 경우 이 부등식에는 제어기를 포함하는 G와 Lyapunov 행렬 P의 곱의형태로 나타나 있기 때문에 LMI가 아니며, 이 부등식에서 나타나는 M,N 도 플랜트 G 및 제어기 K_i로부터 구해지는 값이기 때문에 제어이득 K_i를 구하기 전에는 자승적 안정화를 판별할 수 없다. 따름정리 1의 부등식은 변수 $Y_i(K_iQ)$ 및 Q에 대한 선형행렬 부등식 이므로 이 선형행렬 부등식의 해로부터 직접 제어이득 K_i를 구할 수 있다.

참고 2 파라미터 불확실성을 가지지 않는 경우를 고려한다. 즉, $\Delta A_i(t)=0$, $\Delta B_{1i}(t)=0$, $\Delta B_{2i}(t)=0$, $i=1,2,\cdots,r$일 때 모든 $i,j=1,2,\cdots,r$에 대해서

$$\begin{bmatrix} G_{ii} & B_{1i} & W_{ii}^T \\ B_{1i}^T & -\gamma^2 I & D_{1i}^T \\ W_{ii} & D_{1i} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} G_{ij}+G_{ji} & B_{1i}+B_{1j} & W_{ij}^T+W_{ji}^T \\ B_{1i}^T+B_{1j}^T & -2\gamma^2 I & D_{1i}^T+D_{1j}^T \\ W_{ij}+W_{ji} & D_{1i}+D_{1j} & -2I \end{bmatrix} < 0, \quad i<j \quad (35)$$

을 만족하는 양한정 행렬 Q, 행렬 $Y_i(i=1,2,\cdots,r)$가 존재하면, 폐루프 시스템이 자승적 α-안정하고 L_2 이득 성능 (12)가 만족되는 퍼지 H^∞ 제어기 (8)이 존재한다. 여기서, G_{ij}와 W_{ij}는 (26)과 같으며 상태궤환 이득들은 (27)로 부터 구한다.

참고 3 본 논문에서의 설계기법은 과도 응답특성과는 직접 관련 지울 수 없다. 하지만 정리 2의 제어기는 L_2이득 성능을 보장하므로 외란 $w(t)$에 대한 제어출력 $z(t)$의 에너지를 γ범위로 제한시킨다. 따라서 γ을 변화시키면서 제어출력의 응답을 조절할 수 있다.

Ⅳ. 예 제

제안된 H^∞ 퍼지 제어기의 타당성을 검증하기 위해 Tanaka 등[5]의 논문에서 다룬 비선형 질량-스프링-감쇠기(mass-spring-damper) 시스템에 대한 퍼지 H^∞ 제어기를 설계한다. 동적 방정식은

$$m\ddot{y}+g(y,\dot{y})+f(y) = \phi(\dot{y})u+w \quad (36)$$

이고, m은 질량, w는 외부 외란이고 u는 제어입력으로 가해지는 힘이다. $g(y,\dot{y})$, $f(y)$, $\phi(\dot{y})$은 각각 감쇠기, 스프링, 입력에 해당하는 비선형 항들이다. 그리고

$$y\in[-1.5,\ 1.5], \quad \dot{y}\in[-1.5,\ 1.5] \quad (37)$$

을 가정한다. 제어목적은 폐루프 시스템의 안정성 뿐만 아니라 위치 y와 제어입력 u에 대한 외란 w의 영향을 최소화하는 것이다.

예제 1 비선형 항들이

$$g(y,\dot{y}) = c_1y+c_2\dot{y}, \quad f(y)=c(t)y, \quad \phi(\dot{y})=1+c_3\dot{y}^3 \quad (38)$$

이고, 각 파라미터들이

$$m=1.0, \quad c_1=0, \quad c_2=1, \quad c(t)\in[0.5,\ 1.81], \quad c_3=0.13 \quad (39)$$

인 경우를 고려한다. 이때 비선형 시스템은

$$\ddot{y}+\dot{y}+c(t)y=(1+0.13\dot{y}^3)u+w \quad (40)$$

이고, 불확실성을 갖는 비선형 시스템은

Plant Rule 1 : IF $\dot{y}$ is M_1 THEN

$$\dot{x} = (A_1 + \Delta A_1(t))x + B_{11}w + B_{21}u,$$
$$z = C_1 x + D_{21}u,$$

Plant Rule 2 : IF $\dot{y}$ is M_2 THEN

$$\dot{x} = (A_2 + \Delta A_2(t))x + B_{12}w + B_{22}u,$$
$$z = C_2 x + D_{22}u \tag{41}$$

와 같은 퍼지 시스템으로 표현할 수 있다. 여기서

$$x = [\dot{y} \;\; y]^T,$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.155 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 1.4387 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.155 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0.5613 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$B_{11} = B_{12} = [1 \;\; 0]^T, \quad C_1 = C_2 = [0 \;\; 1],$$
$$D_{11} = D_{22} = 1,$$
$$\Delta A_1 = HF(t)E_1, \quad \Delta A_2 = HF(t)E_2, \tag{42}$$
$$H = [1 \;\; 0]^T, \quad E_1 = [0 \;\; 0.655],$$
$$E_2 = [0 \;\; 0.655], \quad F(t) \in \Omega$$

이며 (A_i, B_{2i})는 제어가능 행렬이다. 퍼지집합은

$$M_1(\dot{y}) = 0.5 + \frac{\dot{y}^3}{6.75}, \quad M_2(\dot{y}) = 0.5 - \frac{\dot{y}^3}{6.75} \tag{43}$$

으로 정의하고 $\dot{y} \in [-1.5 \;\; 1.5]$이다. 이때 (24)와 (25)를 만족하는 해들은

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2955 & -0.1559 \\ -0.1559 & 0.0953 \end{bmatrix},$$
$$Y_1 = [1.1777 \;\; -0.0948], \tag{44}$$
$$Y_2 = [0.7277 \;\; -0.0629]$$

이고 퍼지 제어기의 상태궤환 이득 K_1과 K_2는

$$K_1 = [25.2169 \;\; 40.2455],$$
$$K_2 = [15.4088 \;\; 24.5401] \tag{45}$$

이다. A_1과 A_2에 대한 폐루프 시스템의 고유값들은 각각 -35.6216, -1.6570 와 -7.7134, -1.9355 이다. 그림 1은 비선형 시뮬레이션을 한 결과를 나타낸다. 시뮬레이션에 사용된 불확실성 $c(t)$와 외란 $w(t)$는

$$c(t) = 1.155 + 0.655\cos(3y^{10\sin y}),$$
$$w(t) = 0.2\cos(2\pi t) \tag{46}$$

이다. 설계된 퍼지 H^∞ 제어기는 불확실성을 갖는 비선형 시스템을 안정화할 뿐 아니라 외란감쇠에 대한 성능을 만족한다.

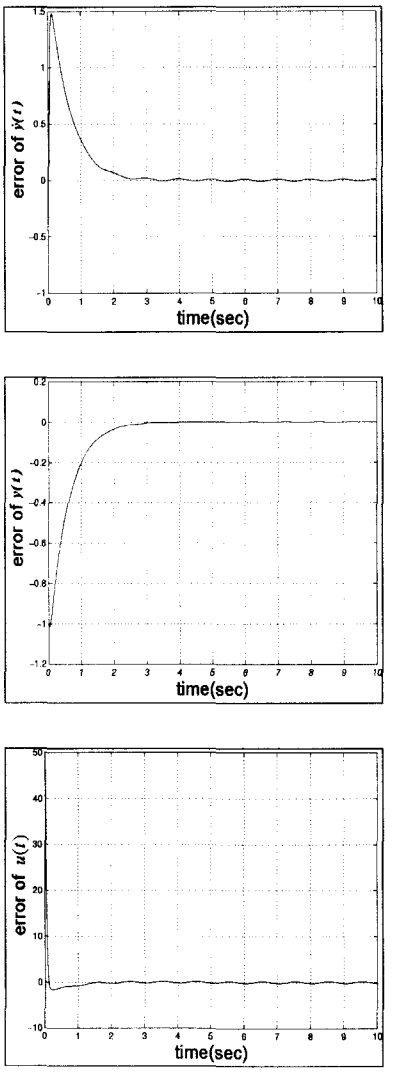


그림 1. 예제 1의 제어 결과
Fig. 1. Control results for example 1.

예제 2 비선형 항들이

$$g(y, \dot{y}) = (d_0 + \delta_d)(c_1 y + c_2 \dot{y}^3), \quad f(y) = c_3 y, \quad \phi(\dot{y}) = 1 \tag{47}$$

이고, 각 파라미터들이

$$m = 1.0, \quad c_1 = 0.01, \quad c_2 = 0.1, \quad c_3 = 0.01, \quad d_0 = 1, \quad \delta_d(t) \in [-1 \ \ 1] \tag{48}$$

인 경우를 생각한다. 이때 비선형 시스템은

$$\ddot{y} + (0.02 + 0.01\delta_d)y + (1 + \delta_d)0.1\,\dot{y}^3 = u + w \tag{49}$$

이다. $\dot{y} \in [-1.5, \ 1.5]$이므로 비선형 항 $0.1\,\dot{y}^3$은

$$\begin{aligned} 0\,\dot{y} \le 0.1\,\dot{y}^3 \le 0.225\,\dot{y}, \quad \dot{y} \ge 0 \\ 0.225\,\dot{y} \le 0.1\,\dot{y}^3 \le 0\,\dot{y}, \quad \dot{y} < 0 \end{aligned} \tag{50}$$

을 만족한다. 비선형 항을 상한치와 하한치로 나타내면

$$0.1\,\dot{y}^3 = M_1 \cdot 0\,\dot{y} + (1 - M_1) \cdot 0.225\,\dot{y} \tag{51}$$

이므로 퍼지집합은

$$M_1(\dot{y}) = 1 - \frac{\dot{y}^2}{2.25}, \quad M_2(\dot{y}) = \frac{\dot{y}^2}{2.25} \tag{52}$$

다. 여기서 $M_1 \in [0 \ 1]$, $M_2 \in [0 \ 1]$ 이다. 퍼지집합을 이용하여 불확실성을 갖는 비선형 시스템은

Plant Rule 1 : IF $\dot{y}$ is M_1 THEN

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_1 + \Delta A_1(t))x + B_{11}w + B_{21}u, \\ z &= C_1 x + D_{21}u, \end{aligned}$$

Plant Rule 2 : IF $\dot{y}$ is M_2 THEN

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_2 + \Delta A_2(t))x + B_{12}w + B_{22}u, \\ z &= C_2 x + D_{22}u \end{aligned} \tag{53}$$

와 같은 퍼지 시스템으로 표현할 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned} x &= [\dot{y} \ \ y]^T, \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.02 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -0.225 & -0.02 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ B_{11} &= B_{12} = [1 \ \ 0]^T, \qquad C_1 = C_2 = [0 \ \ 1], \\ D_{11} &= D_{22} = 1, \\ \Delta A_1 &= HF(t)E_1, \qquad \Delta A_2 = HF(t)E_2, \\ H &= [1 \ \ 0]^T, \qquad E_1 = [0 \ \ -0.01], \\ E_2 &= [-0.225 \ \ -0.01], \quad F(t) \in \Omega \end{aligned} \tag{54}$$

이며 (A_i, B_{2i})는 제어가능 행렬이다. (24)와 (25)를 만족하는 해들은

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 0.3543 & -0.1567 \\ -0.1567 & 0.3503 \end{bmatrix}, \\ Y_1 &= [0.8607 \ \ 0.3495], \\ Y_2 &= [0.8666 \ \ 0.3440] \end{aligned} \tag{55}$$

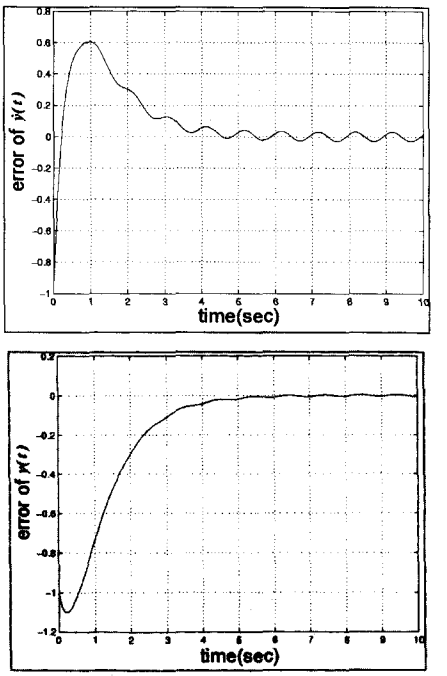
이고 퍼지 제어기의 상태궤환 이득 K_1과 K_2는

$$\begin{aligned} K_1 &= [3.5785 \quad 2.5984], \\ K_2 &= [3.5909 \quad 2.5884] \end{aligned} \tag{56}$$

이다. 이때 사용한 $\gamma = 2.9$ 이며 $\lambda = 25$이다. A_1과 A_2에 대한 폐루프 시스템의 고유값들은 각각 -2.5528, -1.0257 와 -2.9237, -0.8921 이다. 그림 2는 비선형 시뮬레이션을 한 결과를 나타낸다. 시뮬레이션에 사용된 불확실성 항 δ_d는 구간 (0 0.5) 사이에 균등 분포된 랜덤수(random number)이며, 외란 $w(t)$는

$$w(t) = 0.2\cos(2\pi t) \tag{57}$$

이다. 설계된 퍼지 H^∞ 제어기는 불확실성을 갖는 비선형 시스템을 안정화할 뿐 아니라 외란감쇠에 대한 성능을 만족한다.



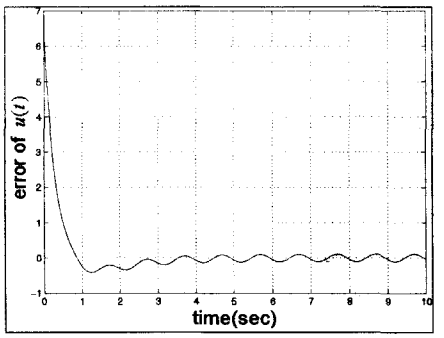


그림 2. 예제 2의 제어 결과
Fig. 2. Control results for example 2.

V. 결 론

본 논문에서는 T-S 퍼지모델로 묘사된 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 견실 퍼지 H^∞ 제어기를 설계하였다. 선형 행렬 부등식을 이용하여 자승적 α-안정화와 L_2 이득 성능에 대한 견실 퍼지 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건을 구하였고, 그 선형 행렬 부등식의 해로부터 퍼지 H^∞ 제어기의 상태궤환 이득들을 직접 구하였다. 즉, 제안한 퍼지 제어기 설계기법을 이용하면 불확실성을 갖는 비선형 시스템의 감쇠율을 만족하는 안정성 뿐만 아니라 폐루프 시스템의 외란감쇠에 대한 L_2 이득 제한조건을 만족시키는 제어기를 직접 구할 수 있다. 마지막으로 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 퍼지 H^∞ 제어기 설계 예를 통하여 제안한 이론의 타당성을 보였다.

참 고 문 헌

[1] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Syst.*, vol. 45, no. 2, pp. 135-156, 1992.

[2] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 14-23, Feb. 1996.

[3] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Fuzzy control system design via LMIs," in *Proc. American Contr. Conf.*, vol. 5, pp. 2873-2877, 1997.

[4] K. Tanaka and M. Sano, "A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 2, no. 2, pp. 119-134, May 1994.

[5] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H^∞ control theory, and linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 1-13, Feb. 1996.

[6] B. S. Chen, C. H. Lee, and Y.-C. Chang, "H^∞ tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: Adaptive fuzzy approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 32-43, Feb. 1996.

[7] C. L. Chen, P. C. Chen, and C.-K. Chen, "Analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Syst.*, vol. 57, pp. 125-140, 1993.

[8] I. R. Petersen, "A Stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems," *Systems Control Lett.*, vol. 8, pp. 351-357, 1987.

[9] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[10] G. Shi, Y. Zou, and C. Yang, "An algebraic approach to robust H^∞ control via state feedback," *Systems Control Lett.*, vol. 18, pp. 365-370, 1992.

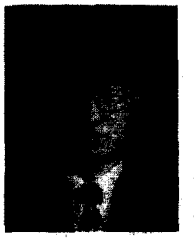
[11] L. Xie and G. E. de Souza, "Robust H^∞ control for linear systems with norm bounded time varying uncertainty," *IEEE Trans. Autmat. Contr.*, vol. 37, no. 8, pp. 1188-1191, 1992.

저 자 소 개

李 甲 來(正會員)

1964년 11월 22일생. 1987년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1990년 동 대학원 전자공학과(공학석사). 1997년 2월 동 대학원 전자공학과 박사과정 수료. 1990년 3월 ~ 1995년 3월 국방과학 연구소 근무. 1997년 ~ 현재 두원공과대학 컴퓨터응용제어과 전임강사. 주관심 분야는 견실제어, 혼합 H^2/H^∞제어, 퍼지제어, 파라미터 시변 및 시간지연 시스템 등

朴 烘 培(正會員) 第 33卷 B編 第 5號 參照
현재 경북대학교 전자전기공학부 부교수



丁 銀 泰(正會員)

1966년 1월 12일생. 1991년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1993년 동 대학원 전자공학과(공학석사). 1996년 2월 동 대학원 전자공학과 졸업(공학박사). 1997년 ~ 현재 창원대학교 공과대학 제어계측공학과 전임강사. 연구분야는 견실제어, H^∞제어, 시간지연, 퍼지제어 등