韓國經營科學會誌
第23卷 第2號
1998年 6月

3차원 적재문제의 최적 해법

김상열* · 박순달**

An Algorithm on Three-Dimensional Loading Problem

SangYoul Kim* · SoonDal Park**

Abstract

The purpose of this paper is to formulate the three-dimensional loading problem and to develop an exact algorithm.

The three-dimensional loading problem is not only to load as many boxes as possible, but also to ensure load stability. In this paper, we propose formulation by zero-one integer programming.

Further we propose as an algorithm the branch-and-bound enforced by efficient bounding criteria. As an upper bound, we use the solution of the Lagrangean relaxation problem which relaxes constraints of zero-one IP, and as a lower bound, we use a heuristic solution induced by the solution of the Lagrangean relaxation problem.

Last, we show computational experiments on convergency of upper and lower bounds.

1. 서 론

3차원 적재문제란 다양한 크기의 상자를 3차원의 직육면체 공간(컨테이너)에 쌓되 이 공간을 최대한 활용하여 상자를 적재함으로서 적재되는 상자의 가치(부피)합을 최대화하는 것을 목적으로 하는 문제를 말한다. 적재문제는 사용하는 공간의 차원에 따라 분류될 수 있는데 2차원 문제를 파레트 적재문제(pallet loading problem)라 하며, 3차원 적재를 컨테이너 적재문제(container loading problem)라 한다. 또한

* LG-EDS 컨설팅 부문
** 서울대학교 산업공학과

파레트 적재문제에서 상자의 적재면들을 절단되는 사각형이라 보고 적재 파레트를 원자재로 본다면 이 문제는 비길로틴 자재절단 문제(non-guillotine cutting stock problem)와 같다. 컨테이너와 같은 큰 상자나 트럭, 기차의 화차칸과 같이 상자를 3차원 공간에 적재하는 컨테이너 적재문제는 물류분야에서부터 반도체 공정에까지 넓은 사용 분야를 가지고 있다.

적재문제는 1차원 적재문제도 NP-hard한 문제이기 때문에[4] 2차원, 3차원으로 확대될 수록 그 복잡성은 더욱 증가하게 된다. 본 연구에서는 3차원 적재문제를 정수계획 모형으로 정형화 한후 이를 최적해 방법에 의해 해결하여 최적 적재패턴을 찾는 방법을 제안하고자 한다.

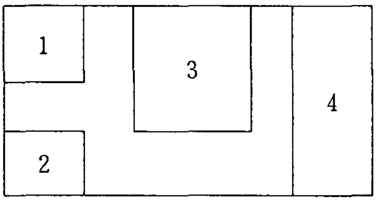
3차원 적재문제는 2차원 적재문제 즉, 2차원 비길로틴 자재절단문제에서 차원이 확장된 문제이다. 2차원 비길로틴 자재절단문제에 대한 최적해 방법은 Beasley[2]가 처음으로 문제를 0-1 정수계획 모형으로 표현하고 이를 분지한계법을 이용해 최적해를 찾도록 하였다. 이후 Hadjiconstantinous & Christofides[7]는 Beasley의 정수계획모델이 실제로 모델화하기 힘든 단점을 해결하기 위해 실제적으로 사용이 가능한 새로운 정수계획모델을 제시하고 이 모델을 Beasley의 해법 구조를 사용하여 최적해를 구하도록 하였다. 김상열과 박순달[1]은 3차원 비길로틴 절단방법에 대한 최적해 방법을 제시하였다. 3차원 비길로틴 절단방법은 3차원 적재와 그 방법은 같으나 상자적재의 안정성에 대한 고려가 없기 때문에 3차원 적재문제에 대한 해를 제공해 주지는 못한다. 3차원 적재문제는 현재까지 최적해 방법은 발표된 것이 없고 발견적 방법에 대하여만 연구가 진행되어 왔다. 3차원 적재 문제를 논문을 통해 최초로 발표한 George & Robinson[6]은 벽쌓기(Wall building)접근법을 사용하여 적재를 하였다. 벽쌓기 방법이란 컨테이너의 안쪽으로부터 벽을 쌓듯이 상자를 차례차례 너비방향으로 계속적으로 쌓아 나오는 방법을 말한다. Bishoff & Marriott[3] 또한 벽쌓기 방법을 이용했다. 이때 각 층은 반드시 한 종류의 상자에 의해 만들어져야 한다는 제약하에 적재하였는데, 이는 층안의 상자에 대한 배열을 2차원 적재 방법을 적용할 수 있도록 한 방법으로 이 방법은 수직적재시 적재의 안정성이 보장되지 못하였다. Gehring, Menschner & Meyer[5] 또한 벽쌓기 방법을 사용하여 적재하는데 층에서 첫번째 적재되는 상자가 중요함을 지적하고 이를 층결정상자(layer determining box;LDB)라고 하며 이를 따로 관리하는 방법을 사용하였다. Ivancic, Mathur & Mohanty[10]는 컨테이너의 좌측하단을 적재지점으로 정하고 여기에서부터 적재가능 공간을 정의하여 매 상자의 적재마다 적재지점을 수정해 가며 적재하는 방법을 사용하였다. 이들은 또한 불용공간(trapped space)을 정의하여 기존의 상자위에 적재된 상자가 만들어 내는 비어 있으나 다른 상자가 직접 적재되지 못하는 공간을 조직적인 방법으로 고려해 주도록 하였다. Mohanty, Mathur & Ivancic[11]은 컨테이너에 적재되는 상자의 가치를 최대화하도록 하는 방안을 고려하였다. 이때 컨테이너들과 상자의 크기가 모두 다르다는 가정하에서 이를 정수계획법모형으로 정식화하였다. 그러나 이 문제는 적재패턴을 사전에 다 나열할 수 없기 때문에 최적해 방법으로 풀기가 곤란하였다.

본 연구는 다양한 크기의 균일한 육각형 상자를 이보다 큰 육각형의 컨테이너에 적재할때 상자는 컨테이너의 밑면과 수직면에 평행하게

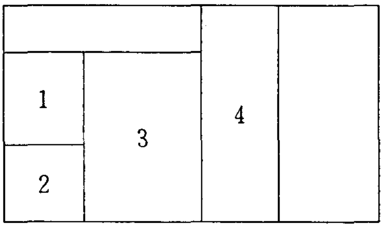
쌓도록 하며 상자의 가로, 세로, 높이는 컨테이너의 가로, 세로, 높이에 평행하게 적재해야 한다. 즉, 상자를 돌려놓을 수 없다는 가정하에 문제를 해결하도록 한다. 또한 상자 적재의 안정성을 위해 적재되는 상자의 무게중심 아래에는 항상 다른 상자가 받치고 있어야 한다는 가정을 둔다.

3차원 적재문제의 특성은 3차원 비길로틴 자재절단과 달리 컨테이너에 상자가 적재될 때 다른 상자 위에 적재되는 상자는 무게중심의 위치에 따라 상자가 평형을 유지할 수도 있고 불안정하여 쓰러질 수도 있기 때문에 적재의 평형이 유지되어야 한다는데 있다. 적재의 안정성을 유지하기 위해 고려되어야 하는 상황을 이산화 방법, 무게중심 방법에 의해 살펴보자.

이산화 방법은 상자가 적재될 수 있는 위치는 다른 상자에 의해 제한 받는다는 점을 이용해 문제의 최적성을 유지하며 적재되는 지점을 찾는 Searching Space를 사전에 줄일 수 있도록 해 준다. 이 방법은 또한 상자들이 서로 이웃해 적재가 되도록 해 준다.



(a) 이웃하지 않은 상자



(b) 이웃한 상자

[그림. 1] 이산화 적재 형태

컨테이너의 가로, 세로, 높이를 L, W, H라 하고 상자 i의 가로, 세로, 높이를 l_i, w_i, h_i, 적재가능 개수를 Q_i라 하자. 적재상자의 좌측 하단위치 좌표가 (x,y,z)라 한다면, 컨테이너의 가로, 세로, 높이에 대한 상자 i의 이산화된 지점 L_i, W_i, H_i 은 다음과 같이 정의 될수 있다.

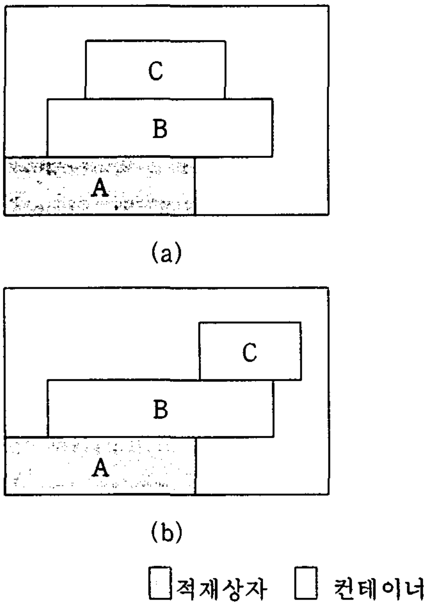
$$L_i = [\, x \mid x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k l_k,\ 0 \le x \le L - l_i,\ 0 \le \alpha_k \le Q_k,\ \alpha_k \text{는 정수},\ k = 1, \ldots, m \,]$$

$$W_i = [\, y \mid y = \sum_{k=1}^{m} \beta_k w_k,\ 0 \le y \le W - l_i,\ 0 \le \beta_k \le Q_k,\ \beta_k \text{는 정수},\ k = 1, \ldots, m \,]$$

$$H_i = [\, z \mid z = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k h_k,\ 0 \le z \le H - h_i,\ 0 \le \gamma_k \le Q_k,\ \gamma_k \text{는 정수},\ k = 1, \ldots, m \,]$$

이와같은 이산화 방법에 의해 상자는 항상 다른 상자에 밀착되어 적재되게 됨으로서 상자의 적재상태는 상자 서로간의 지지력으로 상자의 무게중심이 다른 상자에 의해 받쳐 진다면 안정적재가 될 가능성이 높아진다.

다음 무게중심 방법에 의해 상자 적재의 안정성을 고려해 보자. 윗상자의 무게중심이 아랫상자의 위에 있게 되면 윗상자는 쓰러지지 않게 적재될 수 있다.



[그림. 2] 컨테이너 옆에서 본 상자의 적재형태

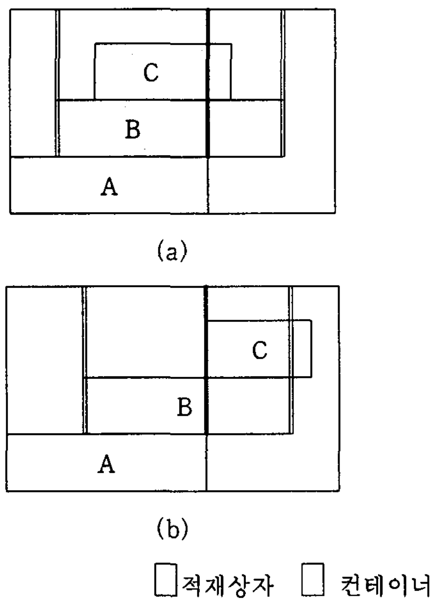
그러나 [그림 2]의 (a)는 안정적재의 형태를 가지나 그림 (b)는 각 상자들의 무게중심이 바로 밑에 있는 상자 위에 있지만 불안정한 적재를 이룬다. 따라서 (b)와 같은 적재형태는 제외되어야 하는데 그 방법은 상자 B 위에 적재된 모든 상자들의 무게중심이 B 상자의 바로 밑에 있는 A 상자위에 놓이도록 제한하도록 하는 방법이다. 중력을 g, 상자 B위에 있는 상자들의 무게합을 m_B라 할 때 상자 B에 내려지는 힘 F_B는 $F_B = m_B g$가 된다. 이때 중력 g는 모든 곳에 일률적으로 작용하고, 모든 상자는 균일하다는 가정하에 상자의 무게는 상자의 부피에만 비례하게 된다. 따라서 상자에 가해지는 힘은 상자위에 있는 적재된 상자의 부피에 의해서만 영향을 받게 된다.

따라서 안정되게 적재한다는 것은 적재된 상자의 밑면이 바로 밑의 상자에 의해 지지되어서 쓰러지지 않고 또한 적재된 상자에 의해 바로 밑의 상자도 적재의 평형이 깨지지 않도록 적재하는 것을 말한다. 적재부피를 지지부피와 미지지부피로 구분해 보자. 지지부피를 컨테이너 내에서 임의의 상자를 포함한 윗 공간중 그 상자의 아랫상자와 밀착된 면적 위의 부피라 하고 미지지부피를 컨테이너 내에서 일정 상자를 포함한 윗 공간중 지지부피를 제외한 부피라 한다면 이 적재부피에 따라 안정적재를 다음과 같이 정의할 수 있다.

정의 1. 안정적재

안정적재란 모든 상자에 대하여 지지부피가 미지지 부피보다 큰 적재를 의미한다. ∎

아래 그림에서 (a)는 안정적재를 (b)는 불안정 적재를 나타낸다.



[그림 3] 적재상자의 안정성 판단

위에서 정의한 안정적재를 기준으로 할 때 3차원 적재의 수리계획모형은 다음과 같은 사항을 만족하도록 해야 한다.

- 적재되는 상자의 가치합을 최대화시키도록 해야 한다.
- 상자들은 서로 겹쳐서 절단되지 않아야 한다.(컨테이너의 가로, 세로, 높이에 대한 각 절단면의 넓이는 절단면에 의해 잘려진 상자들의 단면적과 빈 공간의 합과 같아야 한다.)
- 상자의 육각형 크기가 유지되어 적재되어야 한다.
- 임의의 상자가 적재되는 위치는 유일하게 정의되어야 한다.
- 상자의 무게중심은 다른 상자에 의해 지지되어 있어야 한다.
- 모든 상자는 안정적재가 되어야 한다.

위와 같은 3차원 적재문제를 0-1 정수계획모형으로 표현하면 다음과 같다.

3차원 적재 수리모형 [TDLIP]

$$Max \quad Z = \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{a\in L_i} x_{ija} \tag{1.1}$$

$$s.t. \quad \sum_{r=a}^{a+l_i-1} \sum_{s=b}^{b+w_i-1} \sum_{t=c}^{c+h_i-1} g_{rst} \le (3-x_{ija}-y_{ijb}-z_{ijc})l_i w_i h_i \tag{1.2}$$

$$i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,Q_i,\ a\in L_i,\ b\in W_i,\ c\in H_i$$

$$g_{rst|r=a+l_i/2,s=b+w_i/2,t=c-1} + \lfloor (x_{ija}+y_{ijb}+z_{ijc})/3 \rfloor \le 1 \tag{1.3}$$

$$i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,Q_i,\ a\in L_i,\ b\in W_i,\ c\in H_i$$

$$-\sum_{r=a}^{a+l_i-1} \sum_{s=b}^{b+w_i-1} \sum_{t=c+h_i}^{H-1} (1-g_{rst}) - 2 \sum_{r=a}^{a+l_i-1} \sum_{s=b}^{b+w_i-1} \sum_{t=c+h_i}^{H-1} p_{rst} \le (3-x_{ija}-y_{ijb}-z_{ijc})LWH$$

$$i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,Q_i,\ a\in L_i,\ b\in W_i,\ c\in H_i \tag{1.4}$$

$$p_{rst} \le g_{rst|t=c-1} \tag{1.5}$$

$$r=a,\dots,(a+l_i-1), s=b,\dots,(b+w_i-1), t=(c+h_i),\dots,\mathrm{H}-1$$

$$a\in L_i,\ b\in W_i,\ c\in H_i$$

$$i=1,\dots,m, j=1,\dots,Q_i$$

$$p_{rst} \le (1-g_{rst}) \tag{1.6}$$

$$r=a,\dots,(a+l_i-1),\ s=b,\dots,(b+w_i-1), t=(c+h_i),\dots,H-1$$

$$a\in L_i,\ b\in W_i,\ c\in H_i$$

$$i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,Q_i$$

$$g_{rst|t=c-1} - g_{rst} - p_{rst} \le 0 \tag{1.7}$$

$$r=a,\dots,(a+l_i-1),\ s=b,\dots,(b+w_i-1), t=(c+h_i),\dots,H-1$$

$$a\in L_i,\ b\in W_i,\ c\in H_i$$

$$i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,Q_i$$

$$\sum_{a\in L_i} x_{ija} \le 1,$$

$$i=1,\dots,m, j=1,\dots,Q_i \tag{1.8}$$

$$\sum_{a\in L_i} x_{ija} = \sum_{b\in W_i} y_{ijb},$$

$$i=1,\dots,m, j=1,\dots,Q_i \tag{1.9}$$

$$\sum_{b\in W_i} y_{ijb} = \sum_{c\in H_i} z_{ijc},$$

$$i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,Q_i \qquad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i h_i \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{a=r-l_i+1,\, a\in L_i}^{r} x_{ija} + \sum_{s=0}^{W-1}\sum_{t=0}^{H-1} g_{rst} = W\cdot H$$

$$r=0,\ldots,L-1 \qquad (1.11)$$

$$\sum_{i=1}^{m} l_i h_i \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{b=s-w_i+1,\, b\in W_i}^{s} y_{ijb} + \sum_{r=0}^{L-1}\sum_{t=0}^{H-1} g_{rst} = L\cdot H$$

$$s=0,\ldots,W-1 \qquad (1.12)$$

$$\sum_{i=1}^{m} l_i w_i \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{c=t-h_i+t,\, a\in L_i}^{r} z_{ijc} + \sum_{r=0}^{L-1}\sum_{s=0}^{W-1} g_{rst} = L\cdot W$$

$$t=0,\ldots,H-1 \qquad (1.13)$$

$$x_{ija}, y_{ijb}, z_{ijc} \in\{0,1\} \qquad i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,Q_i,\ a\in L_i,\ b\in W_i,\ c\in H_i$$

$$g_{rst},\ p_{rst} \in\{0,1\} \qquad r=0,\ldots,L-1,\ s=0,\ldots,W-1,\ t=0,\ldots,H-1$$

단,

m ; 상자 종류의 개수,

v_i = 상자 i 의 가치 (부피), $i=1,\ldots,m$

x_{ija} = 1, j번째 i상자의 좌측하단의 x좌표 위치가 a일 경우, $i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,Q_i$, $a=0,\ldots,L-1$

= 0, 그렇지 않으면

y_{ijb} = 1, j번째 i상자의 좌측하단의 y좌표 위치가 b일 경우, $i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,Q_i$, $b=0,\ldots,W-1$

= 0, 그렇지 않으면

z_{ijc} = 1, j번째 i상자의 좌측하단의 z좌표 위치가 c일 경우, $i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,Q_i$, $c=0,\ldots,H-1$

= 0, 그렇지 않으면

g_{rst} = 1, 어느 상자에 의해서도 적재되어지지 않은 공간일 경우 ,

= 0, 그렇지 않으면, $r=0,\ldots,L-1, s=0,\ldots,W-1, t=0,\ldots,H-1$

목적함수 (1.1)은 컨테이너에 적재되는 상자의 가치를 최대화하도록 하는 것이다. 제약식 (1.2)는 j번째 i상자의 적재 위치가 (a,b,c)라면 상자의 좌하단지점 (a,b,c)로부터 상자의 부피만큼의 위치에 대한 g_{rst}변수는 0 이 되어야 하고 그 외는 1이 되도록 제약하는 식이다. 제약식 (1.3)은 적재상자의 무게중심 바로 밑 위치 $(a+l_i/2, b+w_i/2, c-1)$ 가 다른상자에 의해 떠받쳐져 있도록 제한한 식이다. 단, 여기서 $\lfloor a \rfloor$는 a보다는 작은 가장 큰 정수를 말한다. 제약식 (1.4), (1.5), (1.6), (1.7)은 상자의 지지부피가 미지지부피 보다 크도록 제약하는 식이다. 제약식 (1.8), (1.9), (1.10)은 j번째 i상자는 단 한번 적재되어야 하며 만일 적재되었다면 그에 따른 x_{ija}, y_{ijb}, z_{ijc} 값은 동시에 1을 갖도록 제약하는 식이다. 제약식 (1.11), (1.12), (1.13)은 컨테이너 안에 상자가 서로 겹쳐서 적재되지 못하도록 제약하는 식으로서 각각 길이, 너비, 높이에 대하여 고려한 것이다.

이 모형은 이산화 방법을 사용함으로서 문제의 크기를 축소하며 동시에 상자가 컨테이너 밖으로 튀어나오게 적재되는 것도 사전에 방지된다.

2. 이론적 배경

본 연구에서는 3차원 적재문제인 0-1정수계획법 수리모형(TDLIP)을 분지한계법에 의해 최적해를 찾고자 한다. 분지한계법은 한계전략, 분지전략, 탐색전략 등에 의해 효율성이 좌우된다. 특히, 한계전략과 분지전략은 변수나 제약식을 완화하는 방법에 의해 달라진다. 본 연구에서는 분지한계법을 적용할 때 상한값의 계산을 위해 어려운 제약식을 완화하는 라그랑지안 완화방법을 사용하도록 한다. 라그랑지안 방법에 의해 해를 찾는 방법은 Held & Karp[9]이 순회판매원문제(TSP)에 적용하여 좋은 결과를 얻어낸 후 복잡한 정수계획문제에 많이 적용되어온 해법이다. 분지한계법의 초기마디에서 라그랑지안 완화에 의한 방법으로 일정한 연산회수안에 최적해를 구하지 못하면 분지를 시작 라그랑지안 값을 상한으로 사용해 최적해를 찾도록 한다.

상한의 결정

원문제(TDLIP)에 대하여 비어 있는 공간을 정의하도록 하는 제약식(1.2)와 상자들이 서로 겹치지 말아야 한다는 제약식(1.11),(1.12),(1.13)에 대하여 각각 변수를 u_{ijabc}, d_r, e_s, f_t로 하고 상자의 안정성에 대한 제약 (1.4),(1.5),(1.6),(1.7)에 대하여 각각 변수를 $\alpha_{ijabc}, \beta_{ijabcrst}, \gamma_{ijabcrst}, \delta_{ijabcrst}$로 하는 라그랑지안 승수를 이용해 목적함수로 올려 완화시킨 라그랑지안 문제 LR을 정의하자.

라그랑지안 문제[LR]

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z_D(u, d, e, f, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \\
& \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{Q_i}[\sum_{a\in L_i} A_{ija}x_{ija} - \sum_{b\in W_i} B_{ijb}y_{ijb} \\
& - \sum_{c\in H_i} C_{ijc}z_{ijc}] - \sum_{r=0}^{L-1}\sum_{s=0}^{W-1}\sum_{t=0}^{H-1} K_{rst}g_{rst} \\
& + \sum_{i=1}^{m}\sum_{c\in H_i}\sum_{r=0}^{L-1}\sum_{s=0}^{W-1}\sum_{t=0}^{H-1} L_{rst}g_{rst|t=c-1} \\
& + \sum_{r=0}^{L-1}\sum_{s=0}^{W-1}\sum_{t=0}^{H-1} M_{rst}p_{rst} \\
& + 3\sum_{i=1}^{m} l_i w_i h_i \sum_{j=1}^{Q_i}\sum_{a\in L_i}\sum_{b\in W_i}\sum_{c\in H_i} u_{ijabc} \\
& + WH\sum_{r=0}^{L-1} d_r + L\cdot H\sum_{s=0}^{W-1} e_s + L\cdot W\sum_{t=0}^{H-1} f_t \\
& + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{Q_i}\sum_{a\in L_i}\sum_{b\in W_i}\sum_{c\in H_i} N_i\alpha_{ijabc} \\
& + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{Q_i}\sum_{a\in L_i}\sum_{b\in W_i}\sum_{c\in H_i}\sum_{r=0}^{L-1}\sum_{s=0}^{W-1}\sum_{t=0}^{H-1}\delta_{ijabc}
\end{aligned}
$$

$$s.t. \quad \sum_{a\in L_i} x_{ija} \le 1, \qquad i=1,\dots,m, j=1,\dots,Q_i$$

$$\sum_{a\in L_i} x_{ija} = \sum_{b\in W_i} y_{ijb},$$

$$i=1,\dots,m, j=1,\dots,Q_i$$

$$\sum_{b\in W_i} y_{ijb} = \sum_{c\in H_i} z_{ijc},$$

$$i=1,\dots,m, j=1,\dots,Q_i$$

$$g_{rst|r=a+l_i/2, s=b+w_i/2, t=c-1}$$

$$+ \lfloor (x_{ija} + y_{ijb} + z_{ijc})/3 \rfloor \le 1$$

$$i=1,\dots,m, \ j=1,\dots,Q_i,$$

$$a\in L_i, \quad b\in W_i, \quad c\in H_i$$

$$x_{ija}, y_{ijb}, z_{ijc} \in \{0,1\}$$

$$i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,Q_i$$

$$a \in L_i, \quad b \in W_i, \quad c \in H_i$$

$$g_{rst}, \ p_{rst} \in \{0,1\}$$

$$r=0,\ldots,L-1, s=0,\ldots,$$

$$W-1, t=0,\ldots,H-1$$

단,

$$A_{ija} = v_i - l_i w_i h_i \sum_{b \in W_i} \sum_{c \in H_i} u_{ijabc} - w_i h_i \sum_{r=a}^{a+l_i-1} d_r - LWH \sum_{b \in W_i} \sum_{c \in H_i} \alpha_{ijabc}$$

$$B_{ijb} = l_i w_i h_i \sum_{a \in L_i} \sum_{c \in H_i} u_{ijabc} + l_i h_i \sum_{s=b}^{b+w_i-1} e_s - LWH \sum_{a \in L_i} \sum_{b \in W_i} \alpha_{ijabc}$$

$$C_{ijc} = l_i w_i h_i \sum_{a \in L_i} \sum_{b \in W_i} u_{ijabc} + l_i w_i \sum_{t=c}^{c+h_i-1} f_t - LWH \sum_{a \in L_i} \sum_{b \in W_i} \alpha_{ijabc}$$

$$K_{rst} = d_r + e_s + f_t + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{a=r-l_i+1, a \in L_i}^{r} \sum_{b=s-w_i+1, b \in W_i}^{s} \sum_{c=t-h_i+1, c \in H_i}^{t} u_{ijabc} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{a=r-l_i+1, a \in L_i}^{r} \sum_{b=s-w_i+1, b \in W_i}^{s} \sum_{c=1, c \in H_i}^{t-h_i} (\alpha_{ijabc} - \gamma_{ijabcrst} + \delta_{ijabcrst})$$

$$L_{rst} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{a=r-l_i+1, a \in L_i}^{r} \sum_{b=s-w_i+1, b \in W_i}^{s} \sum_{c=1, c \in H_i}^{t-h_i} (\beta_{ijabcrst} - \delta_{ijabcrst})$$

$$M_{rst} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{a=r-l_i+1, a \in L_i}^{r} \sum_{b=s-w_i+1, b \in W_i}^{s} \sum_{c=1, c \in H_i}^{t-h_i} (-2\alpha_{ijabc} - \beta_{ijabcrst} - \gamma_{ijabcrst} + \delta_{ijabcrst})$$

$$N_i = 3LWH + \sum_{i=1}^{m} l_i w_i (H - c - h_i)$$

이 라그랑지안 문제 LR은 $M(M = \sum_{i=1}^{m} Q_i)$ 개의 j번째 상자 i에 대해 부분문제로 분리하여 풀이할 수 있다

[부분문제] LR_{ij}

$$Z_{ij} = \max[\sum_{a \in L_i} A_{ija} x_{ija} - \sum_{b \in W_i} B_{ijb} y_{ijb} - \sum_{c \in H_i} C_{ijc} z_{ijc}]$$

$$s.t. \quad \sum_{a \in L_i} x_{ija} \le 1,$$

$$\sum_{a \in L_i} x_{ija} = \sum_{b \in W_i} y_{ijb},$$

$$\sum_{b \in W_i} y_{ijb} = \sum_{c \in H_i} z_{ijc},$$

$$g_{rst|r=a+l_i/2, s=b+w_i/2, t=c-1} + \lfloor (x_{ija} + y_{ijb} + z_{ijc})/3 \rfloor = 1,$$

$$a \in L_i, \ b \in W_i, \ c \in H_i$$

$$x_{ija}, y_{ijb}, z_{ijc} \in \{0,1\}$$

위의 부분문제 LR_{ij}는 j번째 상자 i를 컨테이너에 적재할 때 상자를 서로 겹쳐서 적재하면 안된다는 제약이 제거된 상태에서 상자의 최적 적재위치를 결정해 준다. 이와 같이 분리된 부분문제 LR_{ij}는 다항식 계산 안에 최적해를 찾을 수 있게 된다[1].

이와 같이 모든 i, j에 대하여 x_{ija}, y_{ijb}, z_{ijc}가 정해지면 g_{rst}는 컨테이너에서 상자에 의해 채워지지 않은 부분을 말하는 것이기 때문에 여기에 대응하는 g_{rst}가 상대적으로 결정되게 된다.

이 라그랑지안 완화문제는 부경사법(Subgradient Method)에 의해 Held, Wolfe & Crowder [8]의 라그랑지안 풀이방법에 따라 처음 2N횟수만큼은 (N=|L|+|W|+|H|) π는 2로 정하여 계산을 수행하고, 그후 연산 횟수가 매 5회마다 π값을 반으로 줄여 가다가 ε=0.005 보다 π가 작을 때 종료하도록 하는 방법을 사용한다. 라그랑지안 문제에서 비가능 최소 상한값을 $Z_{\min}$, 가능 최대 하한값을 Z_{LB}라 할 때 부경사법 절차에 의해 원문제 TDLIP의 최적해가 발견되거나($Z_{\min}=Z_{LB}$) 그렇지 않으면 최적해를 발견하지 못하고 종료하게 된다. 이렇게 되면 $Z_{\min}$값을 가지고 분지한계법을 사용하여 최적해를 찾아가게 된다. 본 분지한계 방법은 상자를 컨테이너의 좌측 하단으로부터 적재해 나갈 때 적재된 부분의 확정된 가치합과 아직 적재되지 않은 컨테이너의 빈 공간의 예상되는 가치합을 상한값으로 하여 분지해 가는 방법을 사용한다.

분지전략

분지나무에서 분지는 상자 하나를 적재하는 것을 의미하고 그 위치가 (a,b,c)라면 임의의 j번째 부품 i에 대한 ($x_{ija}, y_{ijb}, z_{ijc}$)에 1을 할당하는 것이다. 먼저 상자 적재에 있어서의 분지나무를 고려하기 위해 다음 집합을 정의하자.

- L_1 : 초기마디부터 현재의 마디까지 이미 적재되어 있는 상자의 집합
- L_2 : 아직 적재되지 않은 상자로 현 마디 이하부터 고려가 가능한 상자의 집합
- L_3 : 현재의 마디까지 탐색해 오며 이미 적재에 실패한 상자 집합
- G : 컨테이너에서 적재가 되지 않아 비어 있는 공간

적재되지 않고 비어있는 공간집합 G중에서 제일 하단 좌측끝에 있는 적재지점을 (R,S,T)라 하자.

$$(R,S,T) = \min_{t\in H}[\min_{s\in W}[\min_{r\in L}((r,s,t)|(r,s,t)\in G)]]$$

이와같은 적재가능지점 (R,S,T)에 상자를 적재하도록 한다. 상자를 컨테이너에 적재하는 가짓수를 고려할 때 분지개수는 컨테이너의 모든 위치에 상자를 적재하는 개수($n!\times|L|\times|W|\times|H|$)가 된다. 그러나 다음에 의해 분지개수를 줄일 수 있다.

성질 1 적재순서에 의해 적재된 가능 적재집합을 F_1이라 할 때 F_1의 적재순서에 의해 표현되는 적재패턴은 유일하다.

성질 2 적재 순서에 의해 적재될 수 있는 가능 적재집합을 F_1, 임의의 모든 가능적재집합을 F_2라 할 때 $F_1\subset F_2$ 가 성립한다.

정의 2. 같은 상자들에 대하여 다른 적재패턴 A, B를 만들때 버려지는 공간을 각각 G_A, G_B라 하자. 이때 $|G_A| \leq |G_B|$이면 패턴 A는 패턴 B를 대체(dominate)할 수 있다고 한다.

정리 1. 집합 F_2의 원소는 집합 F_1의 원소에 의해 대체될 수 있다.

증명 집합 F_2의 원소가 집합 F_1의 원소에 의해 대체될 수 있다는 것은 곧 F_1의 원소패턴에만 항상 최적패턴이 존재함을 이야기 한다. 만

일 F_1에 속하지 않는 임의의 패턴 F_2의 원소가 최적패턴을 형성한다고 가정하자. $b_i(i=1, \ldots, m)$를 적재하고자 하는 상자라 하고 현재 k-1개의 상자를 최적패턴으로 적재한 후 k번째로 상자 b_r을 적재한다고 하자. 이때 b_r을 현재까지 적재되고 남은 여유공간 S에서 좌측하단인 (R,S,T)에 적재하지 않고 임의의 위치인 (R+o,S+p,T+q) (이때 p,q,r은 정수)에 적재해야만 최적패턴이 형성된다고 하자. 그러나 모든 상자는 붙어서 적재가 되어야 한다고 했으므로 b_r은 다른 상자에 붙어서 적재되어야만 하기 때문에 상자 b_r의 적재가 있기전에 아직 적재되지 않은 L_2집합의 $(n-k-1)$개 보다 작은 상자가 (o,p,q)의 거리만큼 적재를 할 수 있게 해 준다. 따라서 b_r상자보다 사전에 적재된 상자들에 의해 상자 b_r의 좌측하단 위치는 (R+o,S+p,T+q)로 형성되게 된다. 따라서 만일 패턴 F_2의 원소가 최적패턴을 형성한다고 하면 이 원소는 곧 F_1의 원소가 된다. 따라서 집합 F_1은 집합 F_2를 대체한다. ∎

이와 같이 상자의 적재지점 (R,S,T)가 발견되면 이지점에 적재가 가능한 j번째 상자 i를 적재하므로 서 분지를 하게 된다.

$$Z_{ijRST} = Max[Z_{ij} | Z_{ij} = A_{ijR} - B_{ijS} - C_{ijT}]$$

이 (R,S,T) 지점에 적재되는 상자가 없다면 (S,T,R)지점, 그다음 (T,R,S)지점 순으로 적재하게 된다. 이 것은 곳 x, y, z축으로 평행하게 적재하는 것이 된다.

한계전략

한계전략은 분지끝을 촉진시키기 위해 상한을 선정하는 것이다. 적재해 나가면서 상한값을 형성한다는 것은 아직 적재되지 않은 여유공간에 상자를 임의로 적재할 때 겹쳐서 적재하는 불법적재가 발생하기 때문이다. 분지후 분지마디에서 결정되는 총 적재의 예상가치는 분지마디가 n이라 할때 다음과 같이 고려한다.

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

$f(n)$: 마디 n에서의 예상되는 적재의 총 가치

$g(n)$: 마디 n까지 적재된 상자들(L_1)의 가치합

$h(n)$: 여유공간에 적재될 수 있는 상자들의 예상가치합

이때 $g(n)$은 기존에 적재된 상자들의 가치는 알고 있기 때문에 쉽게 구할 수 있다. 그러나 $h(n)$은 쉽게 구할 수 없다. 본 한계 전략에서는 $h(n)$의 상한값과 하한값을 임의의 마디 n에 대하여 구하도록 한다. 상한값은 앞에서 정의한 라그랑지안 문제의 상한값을 사용하고 하한값은 다음과 같은 발견적 방법을 사용하여 구한다.

① X_{ija}를 라그랑지안 문제의 해라 할 때 $[(i,j) \mid X_{ija}=1$ 이고 $i \not\in L_1]$ 인 상자들을 라그랑지안 값 Z_{ij}에 대해 내림차순 정리한다.

② 각 상자를 순서에 의해 적재하되 만일 겹치는 적재가 생기는 상자는 제외시킨다.

③ ②에 의해 모든 적재가 완료시 생기는 빈 공간 E를 정의한다.

$E = [(r,s,t) | (r,s,t)$는 상자에 의해 적

재되지 않은 빈공간]

④ E가 비어 있으면 ⑥으로 가고 아니면 ⑤로 간다.

⑤ (R,S,T)를 다음과 같이 정의한다.

$$(R,S,T) = \min_{t \in H} [\min_{s \in W} [\min_{r \in L} ((r,s,t) | (r,s,t) \in E)]]$$

이 (R,S,T)에 대응하는 가장 큰 라그랑지안 값 Z_{ij}를 갖는 j번째 상자 i가 불법적재가 아니라면 적재한다. 이러한 상자가 없다면 (R,S, T)를 E에서 삭제한다. ④로 간다.

⑥ 적재가 끝난 컨테이너에 불법적재가 없다면 Z_{LB}를 수정하고 이값을 하한으로 정한다.

위와 같은 분지한계법을 적용해 나갈때 상한값에 대해 다음 조건 중에서 하나만 만족 되도 되돌아(backtracking) 간다.

(i) $\min(\sum_{i=1}^{m} Q_i v_i,\ Z_{UB}) \le Z_{LB}$

(ii) $\sum_{i=1}^{m} \theta_i l_i w_i h_i > LWH$

(iii) $\sum_{i=1}^{m} \theta_i v_i > Z_{UB}$

여기서 θ_i란 현재 마디까지의 탐색과정중 L_1에 포함되어져 있는 상자의 개수이다.

3. 실험방법

실험을 위해 Ivancic et. al[10]의 실험자료를 사용하였다〈표 1〉. 컨테이너의 사용개수를 본

〈표 1〉 3차원 적재문제의 실험자료

번호	상자수	상자의 크기 [가로*세로*높이, 개수]				
1	20	[40*60*80, 10]	[80*40*100, 10]			
2	26	[80*60*40, 5]	[80*80*80, 6]	[80*20*20, 5]	[120*40*40, 10]	
3	25	[100*50*50, 5]	[50*50*50, 10]	[50*60*60, 10]		
4	30	[100*80*40, 10]	[40*100*20, 10]	[80*30*100, 10]		
5	17	[60*50*50, 5]	[60*50*70, 2]	[20*50*50, 10]		
6	20	[80*100*80, 5]	[20*40*100, 5]	[60*100*80, 10]		
7	20	[70*40*100, 5]	[100*50*110, 5]	[60*90*100, 10]		
8	23	[60*80*100, 5]	[50*100*90, 7]	[40*100*70, 5]	[20*30*80, 4]	[10*40*10, 2]
9	15	[10*30*10, 3]	[80*90*100, 2]	[70*20*50, 5]	[40*50*10, 5]	
10	23	[60*80*10, 8]	[50*50*90, 5]	[40*30*70, 10]		
11	25	[50*10*40, 5]	[90*20*100, 8]	[70*30*70, 7]	[100*100*80, 5]	
12	23	[30*60*80, 5]	[50*90*40, 8]	[80*90*20, 10]		
13	28	[70*80*30, 16]	[20*10*40, 12]			
14	33	[40*80*60, 15]	[100*20*60, 3]	[40*40*80, 15]		
15	24	[60*60*90, 10]	[120*100*80, 5]	[40*70*50, 7]	[70*90*10, 2]	
16	10	[50*80*70, 5]	[10*40*10, 3]	[20*60*50, 12]		
17	15	[20*30*10, 5]	[10*30*90, 2]	[100*40*60, 2]	[80*30*50, 6]	
컨테이너 크기 ; 100*100*100						

연구에서는 하나로 제한했으나 Ivancic et. al은 사용개수에 제한을 두지 않았기 때문에 컨테이너 크기를 본 문제에 맞게 수정하였다. 원자재의 크기에 따른 비교방법으로 적율(= $\sum_{i \in S_R} (l_i \times w_i \times h_i)/(L \times W \times H)$, S_R = 컨테이너에 적재된 상자집합)을 사용하였다.

<표 2>의 실험결과에서는 방법 I은 발견적 방법에 의한 하한값을 사용하지 않고 라그랑지안 문제의 가능해를 통해 최적해를 찾았을때 결과를 표시하고, 방법 II는 상한과 하한값을 동시에 사용하여 최적해를 찾은 결과를 정리하였다. 이때 라그랑지안 상한은 상한값이 최적해에 도달한 시간과 그때의 탐색한 마디수를 하한은 발견적 방법에 의해 찾은 하한값이 최적해에 도달한 시간과 그때의 탐색마디수를 표시하였다. 이 결과를 보면 상한과 하한을 동시에 구하여 최적해를 찾아간 방법 II가 훨씬 좋은 결과를 줌을 알 수 있다. 실험은 SUN Sparc-170 기종에서 하였다.

4. 결 론

본 연구는 3차원 적재문제를 최적해 방법에 의해 해결하도록 하였다. 먼저 정수계획 모형으로 3차원 적재를 모형화하였으며 이를 라그랑지안 완화시켜 최적해를 찾도록 하고 여기서 최적해를 찾지 못하면 라그랑지안 값을 상한으로 하는 분지한계법으로 최적해를 찾도록 하였다. 현재까지 연구현황은 발견적 방법으로 해를 찾아 왔으나 이 연구에서는 최적해 방법을 처음으로 제시하였다. 그러나 3차원 적재의 복잡성으

<표 2> 최적해와 상한과 하한값의 수렴결과

실험 번호	적률	방법 I		방법 II: Lagrangean 상한(ZUB)		방법 II: 발견적 방법 하한(ZLB)	
		탐색마디	시간(min)	탐색 마디	시간(sec)	탐색 마디	시간(sec)
1	92.8	1024	1817	143	538.4	3	43.1
2	89.2	85	763.5	12	134.9	2	120.3
3	80	175	132	2	241.4	5	66.1
4	82.4	39	124.7	4	14.3	7	32.4
5	92.5	235	370.8	9	302.6	5	164.4
6	80	834	498.8	5	403.3	5	199.2
7	81.8	65	174.5	2	34.5	0	87
8	98.4	1241	578.3	8	610.4	3	72.3
9	92.5	381	426.7	3	312.4	0	142.4
10	73.2	88	843.6	12	32.7	5	121.6
11	85	239	543.5	5	295.5	3	220.3
12	72	352	440.6	3	321.3	0	146.8
13	86.4	1002	1157.7	13	518.3	7	52.5
14	92.5	232	558.4	7	233.4	2	159.6
15	58	753	341.6	2	330.8	1	170.4
16	72	438	1227.9	12	374.3	3	113.6
17	72	1174	407.7	3	669.3	3	135.4
평균	82.4	491.6	612.2	8.5	315.7	3	120.4

로 인해 다항식 계산시간안에 해를 제공해 주지 못하므로 계산시간을 줄이는 방안을 고려해 보아야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] 김상열, 박순달, "3차원 비길로틴 자재절단 문제의 라그랑지안 완화 해법", 산업공학회지 Vol.22. No.4, 1996, pp.741-751

[2] Beasley J.E., "An Exact Two-Dimensional Non-Guillotine Cutting Tree Search Procedure", *Operations Research*. Vol.33, 1985, pp.49-64

[3] Bishoff E.E. and M.D.Marriott, "A comparative evaluation of heuristics for container loading", *European Journal of Operational Research* Vol.44, 1990, pp.267-276

[4] Garey.M.R. & Johnson.D.S, "Computers and interactability", W.H.Freeman and Company, 1979

[5] Gehring H., K.Menschner and M.Meyer, "A computer-based heuristic for packing pooled shipment containers", *European Journal of Operational Research* Vol.44, 1990, pp.277-288

[6] George J.A. and D.F.Robinson, "A heuristic for packing boxes into a container", *Comput. & Ops. Res.* Vol.7, 1980, pp.147-156

[7] Hadjiconstantinous Eleni, Nicos Christofides, "An exact algorithm for general, orthogonal, two-dimensional knapsack problems", *European Journal of Operational Research* Vol.83, 1995, pp.39-56

[8] Held.M., H.,Wolfe.P. & Crowder.H.D., "Validation of subgradient optimization", *Mathematical Programming*, Vol.6, No.1, 1973, pp.62-88

[9] Held.M. & R.M.Karp, "The traveling salesman problem and minimum spanning trees: partII", *Mathematical Programming*, Vol.1, 1971, pp.6-25

[10] Ivancic Nancy, Kamlesh Mathur and Bidhu B. Mohanty, "An integer programming based heuristic approach to the three-dimensional packing problem", *J. Mfg. Oper. Mgt.* Vol.2, 1989, pp.268-298

[11] Mohanty Bidhu B., Kamlesh Mathur, Nancy J.Ivancic, "Value considerations in three-dimensional packing-A heuristic procedure using the fractional knapsack problem", *European Journal of Operational Research* Vol.74, 1994, pp.143-151