韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
1998. 5. 제 37권, 제 1호, 115-138.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 1998, Vol. 37, No. 1, 115-138.

# 프랙탈의 고등학교 수학교육과정에의 도입가능성에 관한 연구

최 정 숙 (중 앙 중 학 교)
신 인 선 (한국교원대학교)

## Ⅰ. 서 론

### A. 연구의 필요성 및 목적

수학은 과학, 기술뿐만 아니라 예술, 체육 등의 연구에도 매우 중요한 도구로서 이용되고 있으며, 컴퓨터의 출현으로 인해 가속화되고 있는 현대사회의 발달 속에서 수학의 중요성은 더욱 더 증가되고 있다.

그럼에도 불구하고 학교 수학의 내용은 고정된 채 변화를 거부하고 있다.

즉, 사회 문화의 발달과 함께 과학, 의학, 예술, 기술 등등 각 분야의 내용이 급진적으로 변화하고 있는 가운데 모든 학문의 중심인 수학, 특히 학교 수학은 이러한 변화를 외면하고 있다고 해도 과언이 아니다.

학교 수학에서 다루는 기하 역시 예외는 아니다.

학교 수학에서는 유클리드 기하만 강조하고 있다. 그러나 현대 수학에서는 프랙탈 기하의 등장과 함께 종전과는 다른 관점에서 자연의 형태를 이해하고 있다. 해안선, 구름, 산, 성단, 지진의 분포, 달의 분화구, 깃털, 산불, 강, 매연, 눈송이, 혈관조직, 뇌조직, 신경조직 등은 자연 속에서 쉽게 발견할 수 있는 프랙탈 모델들로서 종전의 유클리드 기하로는 설명하기 어려운 것들이다. 프랙탈의 응용범위는 매우 넓다. 예를 들어, 지진의 분포에 관한 연구와 생리학, 기상학 등에 응용되고 있고, 물리학의 경우에는 원자핵의 분열에서 성단의 형성에 이르기까지 광범위하게 응용되고 있는 여과(percolation)에 관한 연구에도 프랙탈이 응용되고 있다. 또한, 화학에서는 전기침전물에 관한 응집현상(aggregation)을 프랙탈 기하의 새로운 관점으로 재조명하게 되었다. 그리고 최근에 관심이 집중되고 있는 카오스에 대한 연구에도 프랙탈에 관한 지식이 필수적이다.

이와 같은 프랙탈을 수학교육과정에 도입하고자 하는 시도가 국내외에서 행해지고 있다. 예를 들어, 캐나다의 온타리오교육부(Ontario Ministry of Education)는 1993년에 고등학교 이수과목으로써 프랙탈과 카오스를 승인하여 온타리오주에 있는 4개의 고등학교 grade 12 (우리 나라 교육 과정의 고 3에 해당됨)에서 'Fractals In Your Future'란 교재로 가르쳐지고 있다.

또한 미국의 NCTM은 수학자들과 협력하여 'Fractals for the classroom'(1991)이란 교재와 연습책을 펴내어 프랙탈을 수학교육의 현장에 소개할 수 있는 자료를 제공하였다.

인문계 고등학교 학생들은 대학에 진학하고자 희망하는 학생들이며 장차 자신의 적성에 따라 다양한 분야의 학문에 임하게 될 것이므로 이 학생들에게 많은 영역에서 중요하게 응용되고 있는 프랙탈 기하를 소개할 필요가 있다고 생각한다.

또한 학생들은 직접 프랙탈 도형을 구성하고, 프랙탈 차원을 계산하며 컴퓨터를 통해 프랙탈 도형을 시각화하는 등 전략적인 활동들을 통해 수학에 대한 색다른 즐거움과 주위환경에 대한 새로운 인식을 가질 수 있다. 그리고 프랙탈에 대해 호기심과 상상력, 흥미를 가지고 수학이 우리 생활과 얼마나 밀접한가를 체험할

수 있다. 또한 실험적이고 경험적인 수학 학습이 이루어 질 수 있으므로 이와 같은 프랙탈의 효용성과 중요성 및 인문계 고등학교 자연계열 학생들의 특성과 요구에 비추어 볼 때, 수학 교육에서의 프랙탈에 관한 구체적인 연구가 요구된다.

따라서 본 연구의 목적은 인문계 고등학교 수학 교육의 범위(scope)와 계열(sequence)에 적절한 프랙탈 학습내용을 알아보고, 인문계 고등학교 자연계열 2학년 수준에 적합한 프랙탈의 학습내용을 선정하여 학생들에게 소개하였을 때 학생들의 성취수준을 조사함으로써 프랙탈의 수학교육과정에의 도입가능성을 모색하고자 한다.

### B. 연구내용

1. 인문계 고등학교 수학 교육의 범위(scope)와 계열(sequence)에 적절한 프랙탈 학습내용을 제시한다.
2. 프랙탈에 관한 학습 활동지를 인문계 고등학교 자연계열 2학년을 중심으로 개발한다.
3. 2에서 개발된 학습 활동지를 학생들에게 적용하였을 때 학생들의 성취 수준을 분석한다.

### C. 기대되는 효과

본 연구를 통해 기대되는 효과는 다음과 같다.

첫째, 프랙탈이 기존의 수학 내용들과 연계되어 인문계 고등학교 자연계열 2학년 수학교육과정 속에 도입될 가능성을 보여줄 것이다.

둘째, 학생들은 프랙탈이라는 새로운 수학내용과 컴퓨터를 활용한 새로운 수학학습방법을 경험함으로써 수학에 대해 색다른 즐거움과 관심을 갖게 될 것이다.

세째, 인문계 고등학교 자연계열 2학년 수학교육에 적절한 프랙탈 학습내용을 제시함으로써 이에 연계되어 3학년 수학교육에 적절한 프랙탈 내용에 대한 기초자료를 제공해 줄 수 있다.

## II. 본론

### A. 프랙탈의 성격

프랙탈은 지수와 로그, 무한급수, 수열의 극한, 변환 등의 개념이 형성된 이후에 이를 바탕으로 학습할 수 있는 수학 내용으로서 비정형적인 도형의 성질뿐 아니라 소수차원의 기초개념을 이해하게 하고, 최근에 관심이 집중되고 있는 비선형계와 카오스 등에 관한 문제들을 해결할 수 있도록 한다.

따라서 비선형계나 동력계, 카오스 등을 주로 연구하는 대학의 자연계열 또는 공학계열로 진학하고자 희망하는 학생들에게 유용한 수학 내용이다.

컴퓨터를 적절히 활용함으로써 학생들의 학습효과를 높일 수 있을 뿐만 아니라 컴퓨터그래픽을 통한 아름다운 프랙탈 도형의 형성은 학생들의 흥미를 높이고 호기심을 불러일으킬 수 있다. 그리고 프랙탈의 개념들은 이해하기가 쉽고 복잡한 계산이나 추상적인 개념이 적어서 학생들로 하여금 수학에 대해 자신감을 갖도록 한다.

### B. 고등학교 수학교육에서의 프랙탈의 필요성

제6차 교육과정에서는 고등학교 수학교육의 목표를 크게 두 가지 측면으로 나누고 있는데, 하나는 수학적 지식과 기능의 습득 및 그 응용이며, 다른 하나는 간접적인 것으로서, 수학적 사고력의 신장과 수학적 태도의 함양이다. 즉, 고등학교 학생들이 가져야 할 기본적인 수학적 지식의 습득과 이를 토대로 여러 가지 사물의 형상을 수학적으로 표현하고 사고하고 처리하는 능력 및 수학적 태도의 육성을 목표로 하고 있으며, 고등학교 수학과의 교과목표를 다음과 같이 기술하고 있다.

수학의 기본적인 지식과 기능을 가지게 하고,

> 수학적으로 사고하는 능력을 기르게 하여, 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 한다.
> (교육부, 1995, p.76)

그리고 다음과 같이 세 개의 항목으로 세분하여 좀 더 구체적이고 상세하게 제시하고 있다.

> 가. 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하게 한다.
> 나. 여러 가지 현상을 수학적으로 표현하고 논리적으로 사고하여 처리할 수 있는 능력을 기르게 한다.
> 다. 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 하고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 합리적으로 문제를 해결하는 태도를 가지게 한다. (교육부, 1995, p.76)

그러므로 고등학교 수학교육에서의 프랙탈의 필요성을 교과목표측면에서 고찰하고자 한다.

첫째, 프랙탈의 기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 쉽게 이해할 수 있다.

조한혁(1992)은 프랙탈의 많은 부분들이 접근하기 쉽고 초·중·고교학생조차도 프랙탈의 기본적인 개념들을 이해할 수 있다고 한다. 뿐만 아니라, 김순덕(1994)은 프랙탈이 학생들이 어려움을 느끼는 수학적 개념(확률, 등비급수)들을 시각화함으로써 수학의 지식영역을 확장시킬 수 있고 프랙탈을 통해 딱딱한 수학이 아닌 재미있고 흥미로운 수학이라는 인식을 가질 수 있도록 한다고 한다.

둘째, 프랙탈을 통해 여러 가지 현상을 수학적으로 표현하고, 논리적으로 사고하여 처리할 수 있다.

프랙탈 모델들은 자연현상에서 쉽게 발견될 수 있다. 학생들은 눈송이를 보면서 코흐섬을 떠올릴 수 있으며, 달 표면에 분포되어있는 크고 작은 분화구들이 프랙탈 특성을 지니고 있음을 알 수 있다. 그리고 Brownian운동 역시 자연현상 속에서 쉽게 볼 수 있는 프랙탈 모델이다. 이처럼 프랙탈은 다양한 축척에 따라 불규칙성을 수반하는 자연현상을 모델링 하는데 적합하기 때문에 학생들이 프랙탈을 배움으로써 여러 가지 현상을 수학적으로 표현하고 논리적으로 사고하여 처리할 수 있는 능력을 기를 수 있다.

세째, 프랙탈을 학습함으로써 수학에 대한 흥미와 관심을 갖고 수학적 지식과 기능을 활용하여 합리적으로 문제를 해결할 수 있다.

프랙탈의 장점 중의 하나는 컴퓨터를 활용하여 쉽고 간단하게 프로그래밍함으로써 프랙탈 도형들을 아름답게 표현할 수 있다는 점이다. 제6차 교육과정에서는 정보화사회에 대비하여 수학의 교수, 학습과정에서 문제해결에 계산기나 컴퓨터의 활용을 권장하고 있으며 류희찬(1996)은 제7차 수학교육과정 개정에서 생각해야할 점으로서 컴퓨터가 통합된 교육과정을 주장하고 있다. 그런데 프랙탈은 큐베이직, 로고, 비쥬얼베이직, 엑셀 등을 활용하여 쉽고 간단하게 컴퓨터그래픽을 할 수 있고, 따라서 학습내용을 쉽게 시각화하여 전달할 수 있으며 학생들에게 흥미와 관심을 불러일으킬 수 있다. 뿐만 아니라 수학적 지식과 기능을 활용하여 아름다운 프랙탈 도형 속의 수학적 개념(예, 수렴과 극한, 행렬, 변환 등등)들을 학생들이 쉽게 이해할 수 있도록 한다.

구광조·강완(1996)은 현행 학교 수학 교육과정의 내용이 약 500년 전의 것이며 이 교육과정의 핵심이 계산, 기하 및 초급대수로서 르네상스시대에 가르쳐지던 교육과정과 피상적으로만 다를 뿐이라고 주장하고 있다. 이와 같은 현행 교육과정의 엄청난 정체성은 수학이란 고정된 것이며 불변의 사실과 공식들의 덩어리라는 것과 수학을 한다는 것이 반복 숙달된 특정 기능을 통해 이미 만들어진 문제에 대한 답을 계산하는 일이라고 하는 두 가지 가정에 근거하고 있다고 주장한다. 그리고 학생들은 수학이 역동적이며 성장하는 학문이라는 사실을 배울 기회가 전혀 없으며 수학의 아름다움과 매력을 보게 되는 일이 거의 없고, 수학적 실제에서 컴퓨터의 중요한 역할과 현대 사회에서 수학의

변형된 역할을 모두 반영하도록 수학교육을 재구성할 때라고 주장한다.

NCTM(1989)이 발표한 Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics에서는 수학이 다른 학과를 위한 기초과목이고 유용성에 비례해서 발달해 가기 때문에 다른 학과에 응용 가능한 수학적 모델 및 구조, 시뮬레이션들을 모든 학생에게 이해시킬 필요가 있으며, 기술공학에서의 변화와 수학의 응용영역의 확장은 수학 자체의 성장과 변화를 가져왔다고 주장한다. 그리고 전형적으로 중등 수학과정이 특수한 주제영역별 (대수, 기하, 통계)로 분리되어 왔었으며 그 결과 교사와 학생들을 단일 영역에만 주목하게 되었다고 한다. 이제는 주제영역을 넘어서 수학내용을 통합하도록 함으로써 학생들로 하여금 하나 이상의 관점에서 수학적 아이디어를 볼 수 있고, 새로운 내용이나 문제를 다루는데 상호 관련된 아이디어를 이용할 수 있도록 해야한다고 주장하고 있다.

이와 같이 새로운 수학교육의 내용이 절실히 요구되어지는 가운데 프랙탈이야말로 그러한 요구를 만족시킬 수 있는 최적의 수학내용이며 프랙탈을 수학교육과정 속에 도입하는 것이 필요하다.

### C. 활동지 개발 및 평가기준

활동지는 인문계 고등학교 자연계열 2학년을 대상으로 개발하였으며, 내용은 수학 I 과정에 소개할 수 있는 프랙탈의 주제(연구문제 1의 결과)들을 바탕으로 구성하였다. 활동지는 5개를 개발하였으며, 활동지1에서는 충청북도 경계선의 길이 구하기, 활동지2에서는 시어핀스키 삼각형, 활동지3에서는 코흐섬, 활동지4에서는 소수차원인 도형, 활동지5에서는 카오스게임을 다루고 있다. 각 활동지의 내용 구성은 이미 학습한 수학내용을 바탕으로 활동지에 제시된 문제들을 풀어가면서 학생들이 스스로 프랙탈의 특성과 개념을 이해할 수 있도록 하는데 초점을 두었으며, 학생들이 프랙탈을 배우지 않았기 때문에 프랙탈에 관한 용어는 가능한 한 적게 쓰고자 하였다.

활동지에 제시된 문제는 내용이 연결되도록 구성하였다. 예를 들어 문제1을 풀고 난 후 문제 2를 풀 수 있도록 구성되어 있으며 성취도 평가기준은 크게 상 · 중 · 하의 세 부분으로 나누고 각 문제의 내용 및 중요성에 따라서 평가의 비중을 다르게 하였다. 그리고 활동지에 제시된 문제는 모두 주관식이므로 문제에 따라서 다양한 반응이 나올 수도 있는데 그러한 문제는 "평가시 주의사항"을 참고로 한다.

평가방법은 각 활동지의 평가기준에 따라 평가하고, 상 · 중 · 하에 해당하는 학생의 빈도를 구하여 각 활동에 참여한 학생수에 대한 비율(%)을 구한다.

각 활동지별로 활동의 목표, 내용구성 및 평가기준을 보면 다음과 같다.

#### 가. 활동지 1

1. 활동의 주제 ; 충청북도의 경계선의 길이 구하기
2. 활동의 목표 ;

① 컴파스 보행거리(compass walk)방법을 이해하고 이것을 이용하여 울퉁불퉁한 경계선의 길이를 구할 수 있다.

② 울퉁불퉁한 경계선(rugged boundaries)의 프랙탈 특성을 이해할 수 있다.

3. 핵심요소 및 선수학습 내용 ;

① 핵심요소 - 컴파스 보행거리

② 선수학습 내용 - 함수관계, 무한개념

4. 활동내용

컴파스 보행거리에 대한 설명을 제시하고 문제1에서는 컴파스 보행거리를 이용하여 실제로 충청북도의 경계선 길이와 원의 둘레길이를 구하도록 하였다. 문제2와 문제3에서는 문제1에서 구한 충청북도 경계선길이와 원의 둘레길이를 바탕으로 측정단위(L, L′)와 측정길이(P, P′)의

관계를 구하도록 하였으며, 문제4와 문제5에서는 문제2와 문제3의 결과를 바탕으로 충청북도 경계선과 같이 울퉁불퉁한 경계선의 프랙탈 구조를 파악하도록 하였다.

5. 성취도 평가기준

| | |
|---|---|
| 상 | 컴파스 보행거리를 구할 수 있고, 울퉁불퉁한 경계선의 프랙탈 구조 및 특성을 파악할 수 있다. (문제1~문제5를 해결한 경우) |
| 중 | 컴파스 보행거리를 구할 수는 있지만 울퉁불퉁한 경계선의 프랙탈 구조 및 특성을 파악하지 못한다. (문제1~문제3을 해결하였으나 문제4~문제5를 해결하지 못한 경우) |
| 하 | 컴파스 보행거리를 이해하지 못하고 값을 구하지 못한다. (문제1을 해결하지 못한 경우) |

※ 평가시 주의사항 ; 문제1~문제3을 해결 하였으나 문제4와 문제5 중 하나만 해결하였을 경우에는 "중"에 해당되며, 문제4와 문제5를 모두 해결하였을 경우에만 "상"에 해당됨.

나. 활동지2

1. 활동의 주제 ; 시어핀스키 삼각형에 관하여
2. 활동의 목표 ;

① 시어핀스키 삼각형을 이해하고 구성할 수 있다.

② 시어핀스키 삼각형의 프랙탈 특성을 이해할 수 있다.

3. 핵심요소 및 선수학습 내용 ;

① 핵심요소 - 시어핀스키삼각형

② 선수학습 내용 - 무한개념, 삼각형의 면적, 파스칼 삼각형, 차원, 패턴

4. 활동내용

시어핀스키 삼각형의 구성절차를 제시하고, 문제1에서는 제시된 시어핀스키 삼각형의 구성절차에 따라 시어핀스키 삼각형을 4단계까지 구성하도록 하였고, 문제2~문제4에서는 문제1에서 구성된 시어핀스키 삼각형을 바탕으로 각 단계에서 나타난 삼각형의 개수, 삼각형의 면적을 구하고 단계가 무한히 반복될 경우의 결과를 추측해 보도록 하였다. 문제5에서는 문제4의 결과를 바탕으로 시어핀스키 삼각형의 프랙탈 성질인 차원을 구하도록 하였으며, 문제6에서는 시어핀스키 삼각형의 응용으로써 파스칼 삼각형을 제시하였다.

5. 성취도 평가기준

| | |
|---|---|
| 상 | 시어핀스키 삼각형을 구성하고 프랙탈 성질을 알 수 있다. (문제1~문제6을 해결한 경우) |
| 중 | 시어핀스키 삼각형을 구성하지만 프랙탈 성질을 파악하지 못한다. (문제1~문제4를 해결하였으나 문제5~문제6을 해결하지 못한 경우) |
| 하 | 시어핀스키 삼각형의 구성절차를 이해하지 못하고 시어핀스키 삼각형을 구성하지 못한다. (문제1을 해결하지 못한 경우) |

※ 평가시 주의사항

① 문제1~문제4를 해결하였으나 문제5와 문제6 중 하나만 해결하였을 경우에는 "중"에 해당되며 문제5와 문제6을 모두 해결하였을 경우에만 "상"에 해당됨.

② 문제5의 경우 시어핀스키 삼각형에 관한 학습과 프랙탈 차원에 대한 학습이 이루어지지않았기 때문에 차원이 1에 가까워진다든지 2차원보다 작아진다고 반응한 것도 정답으로 인정함

다. 활동지3

1. 활동의 주제 ; 코흐섬에 관하여
2. 활동의 목표 ;

① 코흐섬을 이해하고 구성할 수 있다.

② 코흐섬의 프랙탈 특성을 이해하고 응용

할 수 있다.

3. 핵심요소 및 선수학습 내용 ;

① 핵심요소 - 코흐섬

② 선수학습 내용 - 무한개념, 삼각형의 면적, 삼각형의 둘레의 길이, 패턴

4. 활동내용

코흐곡선의 구성절차를 제시하고, 이를 이용하여 문제1에서는 제시된 정삼각형 위에 코흐섬을 3단계까지 구성하도록 하였고, 문제2와 문제4에서는 문제1에서 구성된 코흐섬의 둘레의 길이와 넓이를 각 단계별로 구하도록 하고, 문제3과 문제5에서는 각각 문제2와 문제4의 결과를 이용하여 단계가 무한히 반복될 경우의 결과를 추측해 보도록 하였다. 문제6에서는 문제3과 문제5의 결과를 바탕으로 코흐섬 특유의 성질과 그 성질이 응용되고 있는 것이 무엇인가를 생각해보도록 하였다.

5. 성취도 평가기준

| | |
|---|---|
| 상 | 코흐섬을 구성하고 프랙탈 성질을 알 수 있다. (문제1~문제6을 해결한 경우) |
| 중 | 코흐섬을 구성하지만 프랙탈 성질을 파악하지 못한다. (문제1, 문제2, 문제4를 해결하였으나 문제3, 문제5, 문제6을 해결하지 못한 경우) |
| 하 | 코흐곡선의 구성절차를 이해하지 못하고 코흐섬을 구성하지 못한다. (문제1을 해결하지 못한 경우) |

※ 평가시 주의사항

① 문제1, 문제2, 문제4를 해결하였으나 문제3, 문제5, 문제6 중 하나만 해결하였을 경우에는 "중"에 해당되며, 문제3, 문제5, 문제 을 모두 해결하였을 경우에만 "상"에 해당됨.

② 문제2와 문제4의 경우, 계산 능력을 관찰하는 것이 문제2와 문제4의 주목적이 아니므로 표를 완성하지 못하였더라도 n단계의 도형의 둘레의 길이와 도형의 넓이를 구한 경우에는 정답으로 인정해줌.

라. 활동지4

1. 활동의 주제 ; 차원이 소수인 도형에 관하여

2. 활동의 목표 ;

① 차원의 개념을 이해하고 여러 가지 도형의 차원을 구할 수 있다.

② 프랙탈 도형의 차원을 구함으로써 프랙탈 도형의 성질을 이해할 수 있다.

3. 핵심요소 및 선수학습 내용 ;

① 핵심요소 - 소수차원

② 선수학습 내용 - 수와 식, 관계식, 닮음비, 정수차원, 지수와 로그

4. 활동내용

차원의 기본개념을 이해할 수 있도록 설명을 제시하고, 문제1과 문제2에서는 차원의 기본개념을 바탕으로 차원, 확대배율, 확대했을때 필요한 처음도형의 개수사이의 관계식을 구하도록 하였다.

문제3~문제6은 문제2에서 구한 차원의 관계식을 바탕으로 소수차원을 구하기 위한 응용문제로서, 문제3에서는 칸토르먼지의 구성과정을 제시해주고, 칸토르먼지에 대한 소수차원을 구하도록 하였으며, 문제4와 문제5에서는 활동지2와 활동지3에서 각각 소개되었던 코흐곡선과 시어핀스키 삼각형에 대한 소수차원을 구하도록 하였다. 그리고 문제6에서는 시어핀스키카펫의 구성과정에 대한 설명과 함께 소수차원을 구하도록 하였다.

5. 성취도 평가기준

| | |
|---|---|
| 상 | 차원의 기본개념을 이해하고 여러 가지 도형의 차원을 구할 수 있다. (문제 1~문제6을 해결한 경우) |
| 중 | 차원의 기본개념을 이해하고 있으나 여러 가지 도형의 차원을 확실히 구하지 못한다. (문제1~문제2를 해결하였으나 문제3~문제6을 해결하지 못한 경우) |
| 하 | 차원을 기본개념을 이해하지 못한다. (문제1~문제2를 해결하지 못한 경우) |

※ 평가시 주의사항 ; 문제1~문제2를 해결하였으나 문제3~문제6을 모두 해결하지 못하였을 경우에는 "중"에 해당되며, 문제3~문제6을 모두 해결하였을 경우에만 "상"에 해당됨.

마. 활동지5

1. 활동의 주제 ; 카오스게임에 관하여
2. 활동의 목표 ;

① 카오스게임을 통하여 결정론적 카오스에 대한 개념을 이해할 수 있다.

② 카오스게임을 통하여 프랙탈도형의 특징인 자기유사성을 이해할 수 있다.

3. 핵심요소 및 선수학습 내용 ;

① 핵심요소 - 카오스게임, 자기유사성

② 선수학습 내용 - 확률, 삼각함수, 알고리즘, QBASIC, 중점, 패턴

4. 활동내용

카오스게임의 규칙을 제시한 후, 문제1에서는 실제로 주사위를 사용하여 카오스게임을 10회 실행하도록 하였으며, 문제2에서는 문제1의 결과를 바탕으로 1500번 실행하였을 경우에 어떤 결과가 나타날 것인가를 예측해 보도록 하였다.

카오스게임은 수 백번 이상 실행하여야만 카오스게임의 의미를 알 수 있는데 주사위를 사용하여 실행하는데는 한계가 있으므로 학생들의 이해를 돕기 위해 컴퓨터를 활용하였다. 그래서 카오스게임을 하기 위한 QBASIC프로그램을 제시해주고 학생들이 직접 실행해봄으로써 카오스게임의 참의미를 쉽게 이해할 수 있도록 하였다.

단, 학생들이 QBASIC프로그램에 대한 지식이 없기 때문에, 프로그램을 이해할 수 있도록 설명도 함께 제시하고, QBASIC활용에 대한 기본적인 설명도 참고로 제시하였다.

문제 3에서는 카오스게임을 1500번 반복실행할 수 있는 프로그램을 한 예로써 제시하여 실행하도록 하였으며, 문제4~문제7에서는 변수를 바꾸어줌으로써 프로그램을 응용하여 다양한 결과가 나타나도록 하였다.

그리고 문제2와 문제3의 결과를 비교해봄으로써 무질서하고 규칙이 없어서 예측할 수 없는 것처럼 보이지만 실제로는 항상 일정한 도형(시어핀스키 삼각형)이 결과로 나타난다는 것을 발견함으로써 결정론적 카오스를 이해하도록 하였다.

문제8에서는 문제3~문제7의 결과로 나타난 다양한 그림 속에서 프랙탈도형의 자기유사성을 발견하도록 하였다.

5. 성취도 평가기준

| | |
|---|---|
| 상 | 카오스게임을 이해하고 실행할 수 있으며, 결정론적 카오스와 자기유사성을 이해할 수 있다. (문제1~문제8을 모두 해결한 경우) |
| 중 | 카오스게임을 이해하고 실행할 수 있지만, 결정론적 카오스와 자기유사성을 이해하지 못한다. (문제1, 문제3~문제7을 해결하였으나 문제2와 문제8을 해결하지 못한 경우) |
| 하 | 카오스게임을 이해하지 못하고 실행하지 못한 경우. (문제1을 해결하지 못한 경우) |

※ 평가시 주의사항

① 문제1, 문제3~문제7을 해결하였으나 문제2와 문제8 중 하나만 해결하였을 경우에는 "중"에 해당되며, 문제2와 문제8을 모두 해결하였을 경우에만 "상"에 해당됨.

② 문제1은 카오스게임을 이해하고 실제로 행하여야 하는데 반해, 문제3~문제7은 카오스게임을 이해하지 못하더라도 문제3에서 제시된 프로그램을 입력하기만 하면 결과가 나오기 때문에 문제1을 해결하고 문제3~문제7을 해결하지 못한 경우에도 "중"에 해당함.

③ 컴퓨터활용이 본 활동의 주목적이 아니고 카오스게임의 이해를 돕기 위한 보조역할이기 때문에 평가시에 컴퓨터활용에 관한 평가는 하

지 않는다.

④ 문제8의 경우, 학생들이 자기유사성에 관한 개념 및 용어정의가 되어있지 않으므로, 같은 모양의 그림이 크기가 작아지면서 반복적으로 나타난다는 등 자기유사성에 관해 설명식으로 반응한 것도 정답으로 인정해줌.

D. 활동지 적용 및 결과분석

활동지 적용은 충청북도에 소재하고 있는 남녀공학 인문계 고등학교 한 학급 (43명)을 대상으로 1차 검사를 실시하였으며, 연구기간은 1997. 7. 7~1997. 7. 11 (5일간)에 걸쳐서 실시하였다. 본 활동지는 정규수업시간에 할 수 없기 때문에 저녁 자율학습시간을 이용하였으며, 활동지1~활동지4는 활동시간을 각각 50분씩하고 활동지5는 활동시간을 100분으로 하였다. 그 이유는 활동지5의 활동내용이 컴퓨터를 활용해야 하는 것인데, 학생들이 컴퓨터를 사용하는 것이 익숙하지 않을 것이므로(예를 들어, 컴퓨터 자판이 익숙하지 않다든가 혹은 제시된 프로그램을 이해하는데 시간이 걸리므로) 시간을 충분히 주기 위함이다.

2차 검사는 1차 검사 결과를 바탕으로 수정보완된 활동지를 가지고 실시하였으며 연구대상은 충청북도에 소재하고 있는 인문계 고등학교 중 3개 학교를 선정하여 4학급(남학생 2학급, 여학생 2학급)을 대상으로 하였다. 연구기간은 1997. 9. 8~1997. 9. 12(5일간)에 걸쳐서 실시하였다. 그리고 연구방법 및 평가방법은 1차 검사와 동일하다.

각 활동지별로 참여한 학생수는 다음과 같다.[1)]

A, B 학급은 남학생이고, C, D 학급은 여학생인데, 남 · 여학생의 성취정도를 비교하는 것이 본 검사의 목적이 아니기 때문에 성취수준

| | A학급 (44명) | B학급 (45명) | C학급 (44명) | D학급 (46명) | 총인원 (179명) |
|---|---|---|---|---|---|
| 활동지1 | 44 | 45 | 44 | 46 | 179 |
| 활동지2 | 42 | 43 | 44 | 46 | 175 |
| 활동지3 | 44 | 45 | 44 | 46 | 179 |
| 활동지4 | 44 | 45 | 44 | 45 | 178 |
| 활동지5 | 44 | 45 | 44 | 46 | 179 |

(괄호안의 수는 각 학급의 인원임)

의 결과분석은 남 · 여학생 구분 없이 한다.

각 활동지별 평가기준에 의해 활동지1~활동지5에 대한 평가결과를 보면 다음과 같다.

(1) 활동지1의 결과 분석

| | A | B | C | D | 합 계 |
|---|---|---|---|---|---|
| 상 | 19 | 13 | 10 | 11 | 53명 (29.61%) |
| 중 | 20 | 24 | 28 | 33 | 105명 (58.66%) |
| 하 | 5 | 8 | 6 | 2 | 21명 (11.73%) |

활동지1은 울퉁불퉁한 경계선의 프랙탈 구조에 관한 것으로서, 약 88% 학생이 "중" 이상의 성취수준을 보였으며, 컴파스 보행거리를 이해하고 이를 이용하여 충청북도의 경계선과 원의 둘레의 길이를 구할 수 있었다. 그리고 이 학생 158명 중 약 34%의 학생들은 충청북도의 경계선 길이와 원의 둘레 길이의 차이점을 인식하고 충청북도 경계선의 프랙탈 구조를 이해하였으며, 20%의 학생들은 예비검사에서처럼 충청북도 경계선의 길이와 원의 둘레의 길이의 차이점을 인식하지 못하고 단지 오차의 관점으로 문제를 해결하려고 하였는데, 그것은 학생들이 새로운 관점으로 문제를 해결하기보다는 이미 학습한 바 있는 '근사값과 오차'에 대한 선행지식을 바탕으로 문제를 해결하려고 했기 때문이라 생각된다. 그리고 46%의 학생들은 컴파스 보행거리를 이해하고 이를 이용할 수는 있었지만 울퉁불퉁한 경계선의 특징을 이해하지는 못하였다. 활동지1에 참가한 전체 학생 중 약 12%의 학생들은 제시된 컴파스 보행거리를 이

1) 검사를 실시하는 시간이 정규 수업 이외의 시간인데다가 5일간에 걸쳐서 실시하다보니 검사하는 도중에 결석, 조퇴, 학교의 사정 등으로 인해 각 활동지별로 참여한 학생수에 약간씩 변동이 있었다.

해하지 못하여서 충청북도의 경계선과 원의 둘레의 길이를 구하지 못하였다.

(2) 활동지2의 결과 분석

| | A | B | C | D | 합 계 |
|---|---|---|---|---|---|
| 상 | 18 | 14 | 6 | 0 | 38명 (21.71%) |
| 중 | 23 | 27 | 32 | 45 | 127명 (72.57%) |
| 하 | 1 | 2 | 6 | 1 | 10명 (5.71%) |

활동지2는 시어핀스키 삼각형에 관한 것으로서, 약 94% 학생들이 '중' 이상의 성취수준을 보여서 검사결과가 매우 좋았으며, 이 학생들은 제시된 시어핀스키 삼각형의 구성절차를 이해하고 완성할 수 있었다. 그리고 이 학생들 중 약 23%의 학생들은 시어핀스키 삼각형의 특성을 이해하고 파스칼 삼각형과 시어핀스키 삼각형의 관계도 알 수 있었다. 그리고 이 학생들은 시어핀스키 삼각형의 차원이 1차원이상 2차원이하가 될 것이라고 추측하고 있었는데, 이것은 정수차원에만 익숙한 학생들이 정수차원이 아닌 차원의 존재성을 추측할 수 있을 만큼 문제해결과정에서 사고의 폭이 넓다는 것을 의미한다. 그리고 약 77%의 학생들은 시어핀스키 삼각형을 구성할 수는 있었지만 시어핀스키 삼각형의 특성까지는 인식하지 못하였다. 그리고 활동지2에 참가한 학생 중 불과 6%의 학생만이 제시된 시어핀스키 삼각형의 구성절차를 이해하지 못하여 시어핀스키 삼각형을 완성하지 못하였다.

(3) 활동지3의 결과 분석

| | A | B | C | D | 합 계 |
|---|---|---|---|---|---|
| 상 | 12 | 2 | 5 | 10 | 29명 (16.20%) |
| 중 | 30 | 38 | 23 | 34 | 125명 (69.83%) |
| 하 | 2 | 5 | 16 | 2 | 25명 (13.97%) |

활동지3은 코흐섬에 관한 것으로서, 약 86%의 학생들이 "중"이상의 성취수준을 보였다. 이 학생들은 제시된 코흐곡선의 구성절차를 이해하고 이를 이용하여 코흐섬을 완성하는데 성공하였다. 뿐만 아니라 이 학생 중 약 18.8%의 학생들은 코흐섬의 둘레의 길이와 넓이의 관계를 바탕으로 프랙탈 구조 및 성질을 이해하고 우리 몸 속에서 이와 같은 코흐섬의 프랙탈 구조 및 성질을 지닌 것으로 무엇이 있는지도 알았다. 그리고 약 81.2%의 학생들은 코흐섬을 구성할 수는 있었지만 코흐섬의 프랙탈 구조 및 특성을 인식하지 못하였다. 그리고 활동지3에 참가한 학생들 중 약 14%의 학생들은 코흐곡선의 구성절차를 이해하지 못하여서 이를 이용하지 못하였다. 따라서 코흐섬 역시 완성하지 못하였고, 이 중 3명은 코흐곡선의 구성절차는 이해하였으나 코흐섬을 구성할 때 방향을 잘못 선택해서 코흐섬을 제대로 완성하지 못하였다.

(4) 활동지4의 결과 분석

| | A | B | C | D | 합 계 |
|---|---|---|---|---|---|
| 상 | 25 | 26 | 16 | 12 | 79명 (44.38%) |
| 중 | 14 | 15 | 20 | 17 | 66명 (37.08%) |
| 하 | 5 | 4 | 18 | 16 | 43명 (24.16%) |

활동지4는 차원이 소수인 도형에 관한 것으로서, 약 81%의 학생들이 "중" 이상의 성취수준을 보였다. 그런데 활동지1～활동지3에서와는 달리 활동지4에서는 "중"에 해당되는 학생들의 비중과 "상"에 해당되는 학생들의 비중 사이에 큰 차가 없는데 그 이유는 학생들의 '지수와 로그'에 관한 선행지식의 영향이 컸다. 즉, 차원(D)과 필요한 처음도형의 개수(N), 확대배율(S)간의 관계를 이해하고 이들의 관계식 $N=S^D$을 정확하게 구했으면서도 "중"에 해당하는 학생들은 로그를 이용할 줄 몰라서 차원에 관한 관계식 $D=\log_S N$ (또는 $D=\frac{\log N}{\log S}$)을 구하지 못하였다. 따라서 차원에 관한 응용문제인 여러가지 프랙탈 도형들의 차원을 구하지 못하였다. 반면에 "상"에 해당하는 학생들은 로그를 이용

함으로써 여러 가지 프랙탈 도형들의 차원을 정확하게 구할 수 있었다. 그리고 "하"에 해당하는 학생들이 약 24%를 차지해서 이전의 활동지에 비해 "하"에 해당하는 학생들의 비중이 컸는데, 학생들이 차원과 필요한 처음 도형의 개수, 확대배율간의 관계를 이해하지 못하고 관계식을 구하지 못하였다.

(5) 활동지5의 결과 분석

| | A | B | C | D | 합 계 |
|---|---|---|---|---|---|
| 상 | 25 | 15 | 0 | 0 | 42명 (23.46%) |
| 중 | 19 | 28 | 34 | 39 | 118명 (65.92%) |
| 하 | 0 | 2 | 10 | 7 | 19명 (10.61%) |

활동지5는 카오스게임에 관한 것으로서, 약 89%의 학생들이 "중" 이상의 성취수준을 보였다. 약 23.46%의 학생들이 "상"의 성취수준을 보였는데 이 학생들은 활동지5의 참고란(QBASIC활용에 관한 설명)을 바탕으로 제시된 프로그램을 잘 실행하였다. 따라서 컴퓨터 활용과 관련된 문제인 문제3~문제7도 잘 해결하였으며 이를 이용하여 자기유사성도 쉽게 인식하고 있었다. 그리고 "중"에 해당하는 약 65.92%의 학생들은 제시된 카오스게임의 규칙을 이해하고 주사위를 사용하여 카오스 게임을 실행할 수는 있었지만 컴퓨터 활용에 관한 문제인 문제3~문제7을 해결하지 못하여서 문제2와 문제8도 전혀 해결하지 못하였다. 이 학생들 대부분은 컴퓨터를 활용하지 못한 것이 주원인이었는데 남학생보다는 여학생들이 컴퓨터를 잘 활용하지 못하였다. 학생들이 활동지의 문제를 해결하는 과정을 관찰한 결과 여학생들은 컴퓨터의 자판의 손동작이 익숙하지 않을 뿐만 아니라 참고란에 설명되어진 컴퓨터 용어를 이해하지 못하여서 컴퓨터를 만지지 못하고 따라서 활동지에 제시된 프로그램을 입력하지 못하였다. 그런데 남학생들의 경우에는 참고란에 있는 QBASIC의 활용에 관한 설명을 조금은 이해하고 있었으며 비록 문제를 해결하지는 못했지만 활동지에 제시된 프로그램을 입력하고자 노력하여 여학생들보다는 좀더 적극적인 자세로 실험에 임했다. 남학생들은 기술시간이라든가 혹은 학교수업이외에 컴퓨터를 배울 기회가 많아서 활동지5를 해결하는데 여학생들보다 유리하였을 것으로 추측된다. 그리고 약 10.61%의 학생들은 제시된 카오스게임의 규칙을 이해하지 못하여 카오스게임을 실행하지 못하였다.

## Ⅲ. 결론 및 제언

프랙탈은 새로운 수학내용으로서 관심이 집중되고 있으며, 수학뿐만 아니라 물리, 화학, 컴퓨터, 의학, 생물학 등에서도 다양하게 응용되고 있다. 특히, 프랙탈은 다양한 프로그래밍 언어로 간단하게 프로그램을 만들 수 있어서 학생들이 쉽게 컴퓨터를 활용할 수 있고, 컴퓨터의 모니터에 나타난 아름다운 프랙탈 도형은 학생들에게 흥미와 호기심을 불러일으킬 수 있다. 또한 프랙탈을 학습하는데 있어서 복잡한 계산이나 추상적인 개념이 많지 않기 때문에 학생들이 쉽게 배울 수 있으며 프랙탈 모델이 일상생활 속에서 쉽게 관찰될 수 있기 때문에 학생들은 프랙탈을 배우면서 수학이 얼마나 우리 생활과 밀접한가를 체험할 수 있을 것이다.

또한, 학생들이 직접 프랙탈 도형을 구성하고 생활 속의 프랙탈 모델을 대상으로 프랙탈 특성을 살펴봄으로써 능동적인 수학학습이 이루어질 수 있다.

각 활동지의 결과에서 보여지듯이 학생들은 높은 성취수준을 보였으며 이로써 학생들은 이미 학습한 수학지식을 바탕으로 충분히 프랙탈을 학습할 수 있음을 알 수 있다.

특히, 활동지5의 실험은 완전히 새로운 수학학습방법으로 볼 수 있다. 그리고 학생들 개개인의 컴퓨터에 관한 지식이 변인으로 작용하였다고 볼 수 있는데, 컴퓨터의 대중화로 인해 학생들이 학교 밖에서 쉽게 컴퓨터를 접하고, 배울 기회가 많아졌기 때문에 컴퓨터를 조금 활

용할 줄 아는 학생들은 비록 QBASIC프로그램에 관한 지식이 없어도 활동지5에 제시된 컴퓨터에 관련된 문제들을 해결하는데 큰 어려움이 없었다. 따라서 프랙탈을 학습하는데 있어서 학생들이 컴퓨터의 기본적인 조작만 할 줄만 알면 충분히 컴퓨터를 활용할 수 있고 컴퓨터를 활용한 프랙탈 학습이 결코 불가능하지 않음을 알 수 있다. 수학교육에서 컴퓨터의 활용이 강조되고 있고 중학교 교육과정에서는 이미 컴퓨터가 선택과목으로 도입되고 있기 때문에 고등학교 수학교육에서 컴퓨터를 활용한 프랙탈 학습이 가능하다고 생각된다. 본 연구를 통해 학생들이 이미 학습한 수학내용을 바탕으로 프랙탈이라는 새로운 수학내용이 도입될 가능성이 있음을 알 수 있다. 그러나 본 연구는 인문계 고등학교 자연계열 2학년만을 대상으로 하였는데 대상의 범위를 확대하여 연구할 필요가 있고 후속 학습으로서의 프랙탈의 내용도 연구될 필요가 있다고 생각된다.

따라서 본 연구를 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구에서는 인문계 고등학교 자연계열 2학년을 대상으로 프랙탈 학습내용을 연구하였는데, 이에 대한 후속 학습으로서 좀 더 심화된 내용으로 3학년 학생들에게 적합한 프랙탈 학습내용이 연구되어질 필요가 있다.

둘째, 고등학교 수학교육과정에의 프랙탈 도입에 관한 현직 교사들의 반응이 연구될 필요가 있다. 프랙탈 내용이 새로운 현대 수학내용이므로 현직 교사들에게 생소한 부분이 많다. 더구나 프랙탈 학습이 컴퓨터를 활용하면 훨씬 효과적이기 때문에 컴퓨터와 관련하여 교사들의 반응을 조사할 필요가 있다.

## 참 고 문 헌


교육부 (1995). 고등학교 수학과 교육과정 해설, 서울: 대한교과서 주식회사.

구광조 · 강완 (1996). 낡은 가정, 학교수학의 재구성, 한국수학교육학회연구자료.

김순덕 (1994). 중등수학교육에서 프랙탈에 대한 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문.

류희찬 (1996). 제7차 수학교육과정 개정에서 생각해야할 점: 내용 측면을 중심으로, 수학교육학연구발표대회논문집, pp.77-88.

조한혁 (1992). 교육용 컴퓨터 언어 MAL과 Fractals 표현, 대한수학교육학회 논문집 제2권 제1호, pp.33-41.

NCTM. (1989). *Curriculumn and Evaluation Standard for School Mathematics Addenda Series, Grade 5-8*, Reston, UA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Peitgen, H. O., Jürgens, H. & Saupe, D. (1992). *Fractals for the classroom*, New York.: Springer-Verlag.

# A Study on the Possibility of Introduction of Fractals to the High School Mathematics Curriculum

**Choi, Jungsuk**
Joong-ang middle school, Choongju, Choongbook

**Shin, Insun**
Dept. of Math. Education, Korea National Univ. of Education, Chongwon, Choongbook 363-791, Korea; email: shinis@knuecc-sun.knue.ac.kr

We seek the possibility of introduction of Fractals to the high school math. curriculum through identifying Fractals teaching programs appropriate for the scopes and sequences in math. education for the high school students.

We presented the contents of Fractal theory suitable for the high school students. The following subjects were chosen to be introduced; self-similarity, Fractal dimension, Cantor set, Sierpinsky triangle, Sierpinsky carpet, Koch curve, Koch island, perimeter estimate of rugged profiles drawn on paper, and chaos game.

We developed the working papers and the criteria for appraisal. Each working paper focuses on the activities in which students can solve the given problems, understanding the characteristics and ideas of Fractals.

The working papers were given to the second year students who take science course, and the degree of achievements were analyzed based on the appraisal criteria. The results show that it is possible to introduce Fractals to the high school students

# 부 록

활동지 1

월 일 이름

* 주제 ; 충청북도의 경계선의 길이 구하기

※ 컴파스 보행거리 (compass walk)"란 들쭉날쭉한 형태의 둘레길이를 구하는 방법입니다.

---

* 구하는 방법

① 도형의 경계선 위의 임의의 점 A를 시작점으로 하고 컴파스의 간격을 임의로 정하여 A를 중심으로 반원을 그린후, 반원과 도형의 경계선이 만난 점을 중심으로 다시 반원을 그리고 또 그 반원과 도형의 경계선이 만난 점을 중심으로 다시 반원을 그리는 과정을 반복하면서 도형의 경계선을 따라 계속 움직인다.

② 지도의 경계선을 따라 한바퀴 도는데, 마지막 점 B와 A점 사이의 거리가 컴파스 간격보다 좁은 경우에는 자로 두 점 사이를 잰다.

③ 경계선의 둘레 길이를 P라하고, 컴파스 간격의 길이를 L이라 하면, $P = nL + R$

( n ; 컴파스가 움직인 횟수, R ; A점과 B점 사이의 자로 잰 거리)

---

(예)

$L = 2$ , $n = 7$ , $R = 1$

$\therefore P = nL \quad R = 2\times 7 + 1 = 15$

※ 다음은 충청북도의 지도와 원입니다. 충청북도의 경계선의 길이와 원의 둘레의 길이는 얼마일까요?

1. 지도와 원에서 A점을 시작점으로 하여 각각 컴파스 보행거리를 구하고, 다음 표를 완성하시오.

< 별 첨 참 고 >

(1) 충청북도의 경계선의 길이

| L (cm) | n | R (cm) | P = nL + R (cm) |
|---|---|---|---|
| 5 | | | |
| 3 | | | |
| 2 | | | |
| 1 | | | |

(2) 원의 둘레의 길이

| L′ (cm) | n′ | R′ (cm) | P′ = n′ L′ + R′ (cm) |
|---|---|---|---|
| 5 | | | |
| 3 | | | |
| 2 | | | |
| 1 | | | |

2 - 1. 문제 1의 (1)에서 L과 P의 관계를 설명해 보시오.

2 - 2. 문제 1의 (2)에서 L′ 과 P′ 의 관계를 설명해 보시오.

3. 만일 L과 L′ 의 값을 0에 가까울 정도로 무한히 작게 한다면 경계선의 길이 P와 P′ 의 값은 각각 어떻게 될까요? 추측해 보시오.

   ① P의 경우 ;

   ② P′ 의 경우 ;

4. 문제 2와 문제 3의 결과에서 알 수 있는 충청북도의 경계선의 값 P와 원의 둘레의 길이 P′ 의 차이점은 무엇입니까?

5. 문제 4의 결과를 볼때, 충청북도의 경계선의 길이 P의 값을 하나의 상수값으로 구할 수 있을까요? 만일 구할 수 없다면 그 이유는 무엇일까요?

활동지 2

월 일 이름

* 주제 ; 시어핀스키 삼각형에 관하여.

※구성 절차

0 단계 ; 정삼각형

1 단계 ; 0단계의 정삼각형에서 세변의 중점을 연결하여 4개의 작은 정삼각형을 만들고, 가운데 부분의 정삼각형을 제외한 나머지 3개의 정삼각형 내부를 빗금친다.

2 단계 ; 완성된 1단계의 정삼각형에서 빗금친 세 개의 정삼각형 각각에 대하여, 세 변의 중점을 연결하여 4개의 작은 정삼각형을 만들고, 가운데 부분의 정삼각형을 제외한 나머지 3개의 정삼각형 내부를 빗금친다.

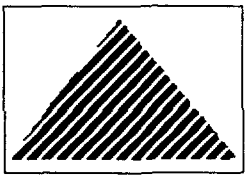
3 단계 ; 완성된 2단계의 정삼각형에서 빗금친 9개의 정삼각형 각각에 대하여, 위의 방법을 반복한다.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

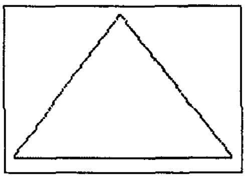
* 위와 같은 구성과정을 무한히 반복실행하면 평면상에 점들의 집합이 나타나는데 이것이 시어핀스키 삼각형입니다.

1. 다음 정삼각형 위에 위의 절차에 따라 시어핀스키 삼각형을 4 단계까지 구성해 봅시다.
(* 다음 단계를 실행할 때는 전 단계의 분할상태에서 실행하세요.
(예) 2단계: 1단계에서 구성된 4개의 정삼각형을 (빗금없이) 그리고 난 후, 1단계에서 빗금에 해당되는 3개의 정삼각형에 대해서 2단계의 구성과정을 실행함)

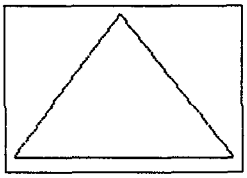
0단계



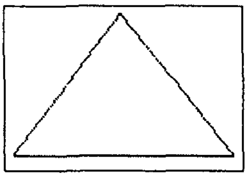
1단계



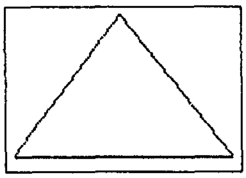
2단계



3 단 계



4 단 계



2. n단계일 때는 빗금친 삼각형의 개수는 얼마일까요?

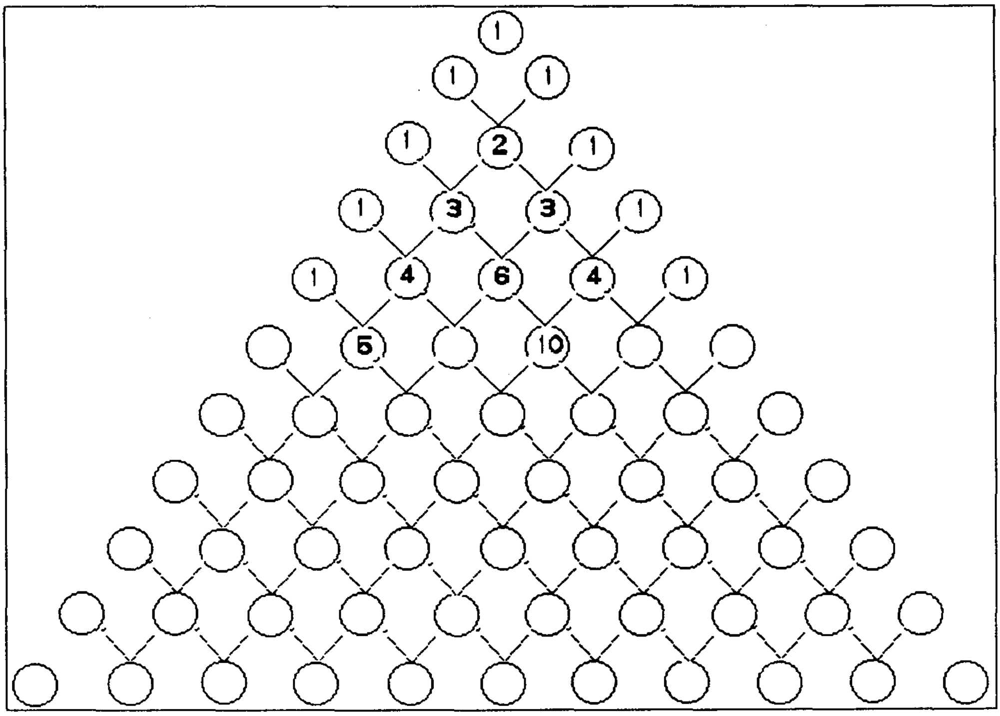
3. 0 단계의 정삼각형의 면적을 1이라 할 때 각 단계의 빗금친 삼각형의 면적을 구해봅시다.

| 단 계 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 면 적 | 1 | | | | | | |

4. 위와 같은 구성과정을 무한히 반복실행하면 빗금친 삼각형의 면적은 어떻게 될까요?

5. 0단계의 정삼각형은 2차원 도형입니다. 위와 같은 구성과정을 무한히 반복실행하여 구한 시어핀스키 삼각형의 차원은 몇 차원이라고 생각됩니까?

6. 다음은 파스칼의 삼각형입니다. (기호 ∨는 위쪽 두 수의 합이 아래쪽 수임을 나타냄) 빈 칸을 채우고, 홀수에 해당되는 ○에는 검게 칠하고, 짝수에 해당되는 ○에는 하얗게 둡시다. 행과 열을 더 많이 하여 완성하면 어떤 그림이 될까요?



활동지 3

월 일 이름

* 주제 ; 코흐섬 (Koch Island)에 관하여

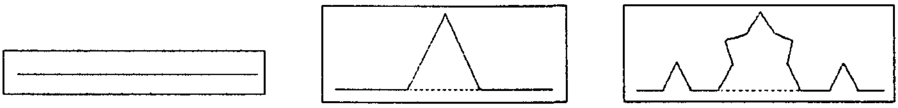
※코흐곡선의 구성절차

0 단계 ; 선분

1 단계 ; 0단계의 선분을 3등분한 후, 가운데 부분에 정삼각형을 그리고 그 정삼각형의 밑변을 지우면 같은 크기의 선분이 4개 만들어진다.

2 단계 ; 완성된 1단계에서, 크기가 같은 4개의 선분 각각에 대하여, 1단계의 방법을 반복하면 크기가 같은 선분이 12개가 만들어진다.

0단계 1단계 2단계



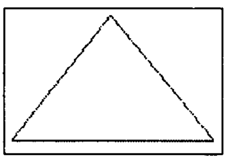
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

* 위와 같은 구성과정을 무한히 반복실행하여 구성된 선을 코흐곡선(Koch curve)이라 하고 삼각형 세변 각각에 대해 위와 같은 구성과정을 무한히 반복실행하여 구성된 도형을 코흐섬(또는, 코흐 눈송이)라고 한다.

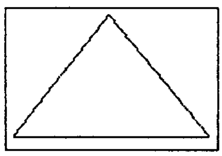
1. 다음은 한 변의 길이가 1cm인 정삼각형입니다. 정삼각형의 세 변의 각각에 대하여, 위의 코흐곡선 구성과정을 3단계까지 실행하고, 각 단계마다 완성된 그림은 알기 쉽도록 빨간색 펜이나 파란색 펜으로 나타내 보시오.

(* 다음 단계를 실행할 때는 완성된 전 단계를 바탕으로 실행하세요.
그리고 선분을 3등분한 후 가운데 부분에 작은 정삼각형을 그릴때, 작은 정삼각형의 꼭지점이 처음 정삼각형의 외부를 향하도록 그리시오.
(예) 2단계를 실행할 때는 완성된 1단계를 2단계의 삼각형 세변에 그리면 2단계는 12개의 선분으로 이루어진 도형이 되며, 12개의 각 선분에 대해 구성절차를 실행합니다.)

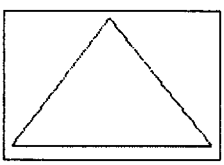
0 단계



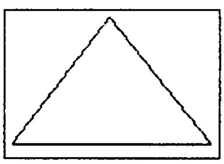
1 단계



2 단계



3 단계



2. 문제 1에서 각 단계마다 구성된 도형의 둘레길이를 구해봅시다.

| 단 계 | 0 | 1 | 2 | 3 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 도형의 둘레길이 | 3 | | | | | |

3. 위와같은 구성과정을 무한히 반복실행하면(즉, 단계 n이 무한대가 될때 ) 도형의 둘레의 길이는 어떻게 될까요?

4. 문제 1에서 각 단계마다 구성된 도형의 넓이를 구해봅시다.

| 단 계 | 0 | 1 | 2 | 3 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 도형의 넓이 | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | | | | | |

* 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$입니다.

5. 위와 같은 구성과정을 무한히 반복실행하면 (즉, 단계 n이 무한대가 될 때) 도형의 넓이는 어떻게 될까요?

6. 문제3과 문제5의 결과를 볼때, 위와 같은 구성과정을 무한히 반복실행하여 구성된 코흐섬의 둘레의 길이와 넓이에 관한 특징을 설명해보고, 우리 몸 속에도 이와 같은 코흐섬의 특징을 지닌 것이 있는데 그것이 무엇이 있는지 써 보고 그 이유를 써 보세요.

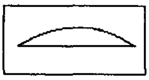
활동지 4

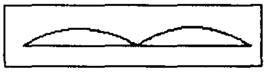
월 일 이름

* 주제 ; 차원이 소수인 도형에 관하여.

※ ① 길이가 1cm인 선분을 길이가 2배인 선분으로 확대하려면 처음의 선분이 2개가 필요합니다.

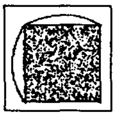
$(2(\text{배}))^1=2(\text{개})$

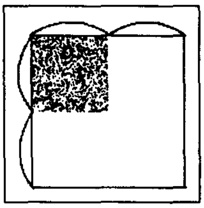




② 한 변의 길이가 1cm인 정사각형을 한 변의 길이가 2배인 정사각형으로 확대하려면 처음의 정사각형이 4개가 필요합니다.

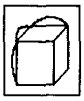
$(2(\text{배}))^2=4(\text{개})$

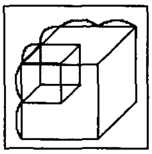




③ 한 모서리의 길이가 1cm인 정육면체를 한 모서리의 길이가 2배인 정육면체로 확대하려면 처음의 정육면체가 8개가 필요합니다.

$2(\text{배})^3=8(\text{개})$





1. 위의 내용 ①, ②, ③ 각각에 대하여 2배 대신 3배로 확대한다면 처음의 도형이 몇 개가 필요할까요? 표를 완성해 보세요.

| 처음의 도형 | 3배로 확대할때 필요한 개수 |
|---|---|
| 길이가 1cm인 선분 | |
| 한변의 길이가 1cm인 정사각형 | |
| 한 변의 길이가 1cm인 정육면체 | |

2. 위의 내용과 문제 1의 결과를 바탕으로, 선분, 정사각형, 정육면체의 차원이 각각 1차원, 2차원, 3차원이라는 사실에 비추어 볼 때, 차원(D), 확대배율(S), 확대했을 때 필요한 처음 도형의 개수(N)사이의 관계를 알아보고, 차원(D)에 관한 식으로 나타내 보시오.

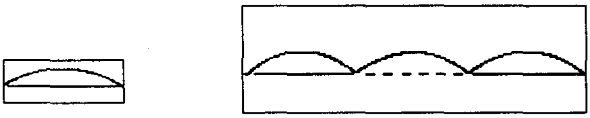
※ (3- 6) 다음 문제를 풀때는 2페이지에 있는 로그표를 참고하고, 차원은 소수 둘째자리까지 구하세요.

3. 다음은 칸토르 먼지의 구성과정입니다.

---

0단계;선분

1 단계 ; 0단계의 선분을 3배로 확대한 후, 3등분하면 같은 크기의 선분이 3개 만들어지는데, 이때 가운데 부분의 선분을 제거하면 처음 선분(즉, 0단계의 선분)과 크기가 같은 선분이 2개가 만들어진다.

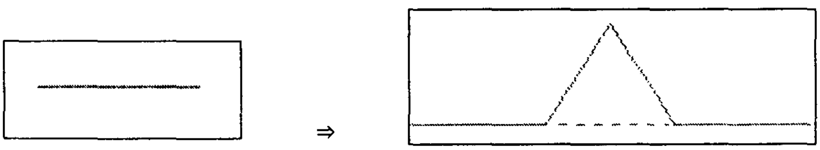


* 위와 같은 구성과정을 무한히 반복실행하면 평면상에 점들의 집합이 나타나는데 이 점들의 집합을 칸토르 먼지라고 합니다.

---

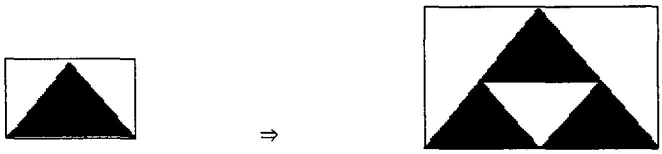
위의 구성과정을 보면, 0단계에서 1단계로 진행될때, 1단계의 선분의 길이는 0단계의 선분의 길이가 3배만큼 확대되었지만 3등분한 것 중 가운데 부분이 제거되었기 때문에 0단계의 선분과 크기가 같은 선분의 개수는 2개가 됩니다. 문제2의 결과를 이용하여 칸토르 집합의 차원을 구해 보세요.

4. 다음 그림은 코흐 곡선의 구성과정입니다. 0단계에서 1단계로 진행될 때, (a) 1단계의 선분의 길이는 0단계의 선분의 길이가 몇 배로 확대된 것입니까? (b) 코흐곡선의 구성절차에 의해 구성된 1단계의 선분은 0단계의 선분의 길이와 같은 선분이 몇개로 구성되어 있습니까? (c) (a), (b)의 결과를 이용하여 코흐곡선의 차원을 구해보세요.(프랙탈 도형은 반복에 의해 구성되기 때문에 각 단계의 확대배율과 선분의 개수의 증가율은 일정합니다.)



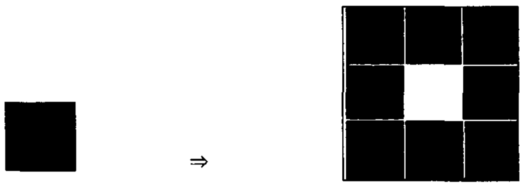
(a) (b) (c)

5. 다음은 시어핀스키 삼각형의 구성과정입니다. 0단계에서 1단계로 진행될 때, (a) 1단계의 삼각형의 한 변의 길이는 0단계의 삼각형의 한 변의 길이가 몇 배로 확대된 것입니까? (b) 시어핀스키 삼각형의 구성절차에 의해 구성된 1단계의 삼각형은 0단계의 삼각형과 크기가 같은 삼각형이 몇 개로 구성되어 있습니까? (c) (a), (b)의 결과를 이용하여 시어핀스키 삼각형의 차원을 구해 보세요.



(a) (b) (c)

6. 다음은 시어핀스키 카펫의 구성과정입니다. 0단계에서 1단계로 진행될 때, (a) 1단계의 정사각형의 한 변의 길이는 0단계의 정사각형의 한 변의 길이가 몇 배로 확대된 것입니까? (b) 시어핀스키 카펫의 구성절차에 의해 가운데 부분의 정사각형을 제거하여 구성되어진 1단계의 정사각형은 0단계의 정사각형과 크기가 같은 정사각형이 몇 개로 구성되어 있습니까? (c) (a), (b)의 결과를 이용하여 시어핀스키 카펫의 차원을 구해 보세요.



(a) (b) (c)

< 로 그 표 > log2 = 0.3010, log3=0.4771,

활동지 5

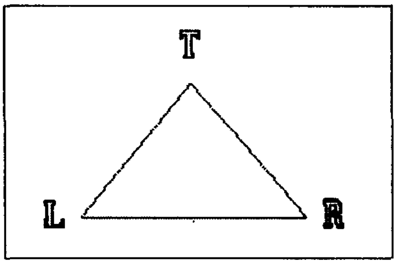
월 일 이름

* 주제 ; 카오스게임 (CHAOS GAME)에 관하여

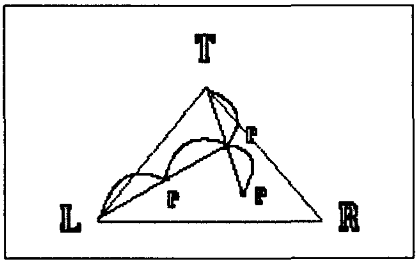
---

**※ 카오스 게임의 규칙**

(1) 아래의 그림과 같은 정삼각형에서, 맨 위에 있는 꼭지점을 T, 왼쪽 아래에 있는 꼭지점을 L, 오른쪽 아래에 있는 꼭지점을 R이라 하고 정삼각형의 내부 혹은 외부의 어느 곳이든 시작점 $P_0$를 정한다.




⇒




(2) 첫번째 주사위를 던졌을 때,

① 주사위의 눈이 1 혹은 6이 나오면 T와 $P_0$의 거리가 1/2인 지점에 $P_1$을 정한다.

② 주사위의 눈이 2 혹은 5이 나오면 L과 $P_0$의 거리가 1/2인 지점에 $P_1$을 정한다.

③ 주사위의 눈이 3 혹은 4이 나오면 R과 $P_0$의 거리가 1/2인 지점에 $P_1$을 정한다.

(3) 두번째 주사위를 던졌을 때,

① 주사위의 눈이 1 혹은 6이 나오면 T와 $P_1$의 거리가 1/2인 지점에 $P_2$을 정한다.

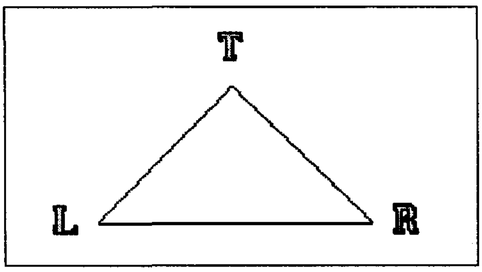
② 주사위의 눈이 2 혹은 5이 나오면 L과 $P_1$의 거리가 1/2인 지점에 $P_2$을 정한다.

③ 주사위의 눈이 3 혹은 4이 나오면 R과 $P_1$의 거리가 1/2인 지점에 $P_2$을 정한다.

· · · 위와 같은 과정을 k번 시행하면 평면 위에 $P_0$, $P_1$, $P_2$, $\cdots$, $P_k$ 의 점이 나타난다.

---

1. 주사위를 사용하여 카오스 게임을 10번째까지 실행하고 다음 정삼각형 위에 $P_0$, $P_1$, $P_2$, $\cdots$, $P_k$ 의 점을 표시하시오. (단, 시작점 $P_0$는 정삼각형의 내부에서 시작하든 혹은 외부에서 시작하든 상관없으나 세 꼭지점(T, L, R)은 제외됨)



2. 문제 1에서 점들의 분포상태를 볼 때 배열의 규칙이 있습니까? 만일 규칙이 있다면 1500번까지 실행하였을 때의 점들의 분포상태를 예측해 보고, 규칙이 없다면 그 이유를 쓰시오.

3. 다음은 정삼각형 위에서의 카오스게임을 하기 위한 QBASIC프로그램입니다.
(우측은 프로그램의 이해를 돕기 위한 설명임)
다음 프로그램을 입력하여 카오스게임을 1500번(프로그램에서 ② n=1 TO 1500에 해당) 실행하고, 그 결과를 문제 2의 결과와 비교해 보시오.
(QBASIC을 사용할 줄 모르는 사람은 참고란을 보시오.)

| 프 로 그 램 | 설 명 |
|---|---|
| REM program CHAOS GAME | |
| CLS | |
| pi2=6.2831853 | → 2Π의 값을 나타냄 |
| SCREEN 9 | |
| ① FOR n=1 TO 3 | → 정삼각형의 세 꼭지점의 위치를 좌표로 지정 |
| ① xp(n)=150+150*COS(pi2*n/3) | 해줌, 즉 (xp(1), yp(1)), (xp(2), yp(2)), |
| ① yp(n)=150+150*SIN(pi2*n/3) | (xp(3), yp(3)) |
| NEXT n | |
| ② FOR n=1 TO 1500 | → 1부터 1500번을 반복실행하라는 명령임 |
| ① q=INT(3*RND)+1 | → ♣의 내용을 참고할 것 |
| ③ x=xp(q)+(x-xp(q))*1/2 | → 정삼각형 세 꼭지점중 임의로 선택한 꼭지점 |
| ③ y=yp(q)+(y-yp(q))*1/2 | (xp(q), yp(q))와 전단계에서 실행되어진 점 |
| IF (n>10) THEN PSET (INT(x), INT(y)) | (x, y)의 거리가 1/2인 점을 다시 (x, y)로 |
| NEXT n | 지정해줌 |
| END | ♣ INT명령어는 정수값을 취하라는 것임 |
| | (예) INT(3.5)는 3이 됨 |
| ♧ ①,②,③은 문제4 ~문제6을 풀기위해 표시된 | ♣ RND함수는 난수를 발생시키는 내장함수임 |
| 것입니다. 그러므로 프로그램을 입력할때 이번호 | (난수란 규칙없이 만들어지는 수로 임의의 수라 |
| 들은 입력하지 마시오. | 고도 함) ∴ q는 세꼭지점중 한 꼭지점을 임의 |
| | 로 선택한 값임 |

4. ( i ) 위의 프로그램에서 ②가 표시된 행에 1500을 40000으로 바꾸어 실행하고 그 결과를 그림으로 나타내시오.
(ii) 위의 ( i )의 결과로 나타난 그림속에는 어떤 특징이 있습니까?
( i ) (ii)

5. 위의 프로그램에서 ③이 표시된 행에
( i ) 1/2을 1/3으로 바꾸어 실행한 후, 그 결과를 그림으로 나타내시오.
(ii) x에 관한 식에서는 1/2을 그대로 두고 y에 관한 식에서만 1/2을 1/4로 바꾸어 실행한 후,

그 결과를 그림으로 나타내시오.

(i) (ii)

6. (i) 위의 프로그램에서 ①이 표시된 4개의 행에는 3 대신 5로 바꾸고 ③이 표시된 행에는 1/2 대신 3/8로 바꾸어 실행하고 그 결과를 그림으로 나타내시오.
(ii) 위의 (i)의 결과로 나타난 그림 속에는 어떤 특징이 있습니까?

(i) (ii)

7. (i) 위의 프로그램에서 ①이 표시된 4개의 행에는 3 대신 6으로 바꾸고 ③이 표시된 행에는 1/2대신 1/3으로 바꾸어 실행하고 그 결과를 그림으로 나타내시오.
(ii) 위의 (i)의 결과로 나타난 그림 속에는 어떤 특징이 있습니까?

(i) (ii)

8. 위의 문제 3, 문제 6, 문제 7의 결과로 나타난 그림 속에는 공통적인 성질이 있습니다. 그것이 무엇인지 써 보시오.

※참고 ; QBASIC의 활용에 관하여

1. 시작 ; QBASIC 파일이 있는 디렉토리에서 다음과 같이 입력한다.
   C : > QBASIC [Enter 키를 친다]
2. 파일 저장 ; 프로그램을 입력한 후, 저장하고자 할 때는 [Alt] 키를 눌러 메뉴가 나타나게 한 다음 F를 선택하고 다시 화살표키를 이용해 S를 선택하면 파일이름 입력 대화상자가 나타나는데 이 안에 파일이름을 지정해주면 된다.
3. 파일 불러오기 ; [Alt]키를 누른 후 F를 선택하고 다시 O를 선택하면 파일열기 대화상자가 나타나고 커서가 이 안에 있게 된다. 이 때, [Tab]키를 누르면 커서가 파일 선택상자로 이동하는데 화살표키를 이용하여 선택하고자 하는 파일명에 반전막대를 위치시킨 후 [Enter]키를 누른다.
4. 프로그램 실행하기 ; ① [Alt]키를 눌러 메뉴막대가 나타나게 한 후 화살표키를 이용해 R을 선택.
   ② 화살표키를 이용해 S를 선택하고 [Enter]키를 누른다.
   ③ 실행화면에서 편집화면으로 돌아갈 경우 아무키나 눌러도 된다.
   ④ 다시 한번 실행 화면을 보고 싶으면 [F4]키를 누른다.
5. 끝 ; [Alt]키를 누른 후 F를 선택하고 다시 X를 선택한다.