韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1998. 5. 제 37권, 제 1호, 73-85.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 1998, Vol. 37, No. 1, 73-85.

수학 교육에서 '증명의 意義'에 관한 연구

류 성 림 (대구제일여자상업고등학교)

I. 서 론

우리 나라의 중학교 기하는 초등 학교에서 배운 도형과 측도에 관한 내용을 발전시켜 1학년에서는 조작적 활동이나 직관적 취급을 중심으로 한 도형에 대한 직관적 통찰 능력을 키우고, 2, 3학년에서는 수학적 증명의 의의와 방법을 이해하고, 논리적으로 표현하는 능력을 키우는 데 치중하여 평면에서의 논증기하를 완성하는 것으로 볼 수 있다.

특히 증명은 수학적 사고 활동의 핵심적인 부분이고, 입증의 과정을 정당화하는 연역 추론으로서 수학과 경험 과학의 차이를 보여주는 좋은 예가 되는 학습 영역이다.

그러나 그 중요성과 학교에서 많은 시간을 투자하여 지도하고 있음에도 불구하고, 학생들이 증명을 별로 선호하지 않고 증명 학습에서 심각한 어려움을 겪고 있다는 것은 널리 알려진 사실이다(우정호, 1994; 류성림, 1993). 이러한 현상은 비단 우리 나라에만 국한되는 것은 아니고 외국의 경우도 마찬가지로 증명의 수행력이 별로 성공적이지 못하다는 보고를 하고 있다(Senk, 1985; Clements & Battista, 1992; Healy & Hoyles, 1998). 일부 수학교육자들은 이러한 현상의 원인으로 학생들의 증명의 필요성 인식의 부족과 학생들의 불충분한 논리적 성숙 등을 언급하고 있다. 증명은 수학적 추론 능력을 개발하고 수학적 이해를 증진시키며, 수학적으로 이해한 것을 의사 소통할 수 있는 필수적인 도구이지만, 증명을 처음으로 접하게 되는 학생들에게는 인위적이고 부자연스럽게 이용되는 것으로 간주될 수도 있다. 초보자에게 수학적인 증명은 명제의 타당성에 대한 의심을 제거하기 위한 자연스러운 목적을 가지도록 해야 한다.

중학교 2학년에서 처음으로 나오는 도형의 증명 문제는 이등변삼각형, 평행사변형 등의 성질에 관한 문제이다. 이들 도형의 성질을 평행선의 성질이나 삼각형의 합동조건을 이용하여 학습하고 있는데, 만일 형식적인 증명은 할 수 있지만 왜 증명을 하게 되는가의 필요성과 의의를 이해하지 못한다면 동기유발이 결여되어 증명 학습의 본래 목적인 논리적, 비판적 사고력은 제대로 육성되지 못할 것이다.

본 논문에서는 증명의 의의에 대한 조사를 하여 학생들이 증명을 어느 정도 이해하고 있는지 알아보고, 증명의 의의에 대한 이해를 높일 수 있는 지도의 예를 들고자 한다.

II. 문헌 검토

1. 증명의 의의와 관련된 선행 연구

여기서는 연역적 추론으로서의 증명에 대한 학생들의 인식도를 조사한 몇몇 연구들에 대해 간략히 살펴보고 시사점을 논의하겠다.

Williams(1990)는 캐나다의 11학년 학생 225명을 대상으로 증명 개념에 대한 12문항을 제시하였는데, 조사 대상의 학생들 중에서 약 50% 정도가 직관적으로 분명한 명제에 대하여 증명할 필요성을 느끼지 못했다고 한다. 또한 70% 이상의 학생들이 귀납적 추론과 연역적 추론을 구분하지 못하였고, 귀납적 추론이 수학적 일반화를 뒷받침하기에는 부적합하다는 사실을 알지 못했으며, 80% 정도의 학생들은 수

학적 논쟁에서 가정과 정의의 의미를 전혀 인식하지 못하였다.

Fischbein과 Kedem(1982)은 10-12학년의 정규 고등학교 학생 397명을 대상(수학 수준이 높은 학생-HM: 150명, 낮은 학생-LM: 247명)으로 어떤 수학적인 명제의 형식적 증명이 선험적이고, 보편적으로 타당한가에 대한 이해도를 조사하였다. 그의 연구에 의하면, 수학적 수준이 높은 학생과 낮은 학생 모두에서 많은 학생들이 이미 입증된 명제의 경험적으로 검토하기를 원한다고 하였다(기하 문제에서 HM: 34.3%, LM: 32.3%). 단지 기하 문제에 답한 학생의 10%만이 일관되게 형식적인 입장, 즉 증명된 명제의 일반적인 타당성을 받아들이고, 더 이상의 경험적인 확인이 필요 없는 것으로 나타났다. 이러한 결과에 대해 그들은 평범한 학생들은 어떤 논증의 타당성을 경험적으로 해석하는 쪽으로 직관적으로 편향되는 경향이 있고, 그런 편견을 모른채 자연스럽게 가능한한 확인물을 모아서 어떤 명제를 지지하려고 노력하는 경향이 있다면서 학생들이 수학에서의 연역적 증명의 본질을 이해하는데 실패하고 있다는 결론을 내렸다.

또한 Martin과 Harel(1989)은 101명의 초등학교 예비 교사들을 상대로 귀납적 정당화와 연역적 정당화에 대해 수학적으로 옳은지를 판단하는 조사를 실시하였는데, 약 1/3 정도의 학생들이 옳은 귀납적 논의와 연역적 논의를 모두 타당한 것으로 받아들였으며, 절반 정도의 학생들은 귀납적 논의를 타당한 수학적 증명으로 인식하고 있었다. 학생들은 귀납적 추론과 연역적 추론을 구분하지 못했고, 따라서 귀납이 수학적 일반화를 지지하기에는 부적절하다는 사실을 인식하는데 실패하였다고 결론지었다. 어떤 명제에 대한 정확한 증명을 학습한 후에도 그 명제의 타당성을 인정하지 못하고 무언가를 더 조사할 필요성이 있다고 주장하는 학생들이 많았다는 것이다.

이와 같이 많은 학생들 특히 예비 교사들조차 증명을 배우고 나서도 그 연역적 방식의 진정한 의의를 잘 인식하지 못하고 있다는 것은 수학 교육 현장에서 재고해야 할 이슈가 아닌가 하는 생각이 든다. 물론 기하 학습에서 증명의 연역적 방식이 최선만이 아닐 수도 있다. 예컨대, 연역적 접근 방식을 취하기가 어려울 때는 선험적인 접근 방식으로 여러 가능성을 만들어 낼 수도 있을 것이다. Schoenfeld(1986)는 학생들이 기하의 다양한 측면을 함께 볼 수 있고 증명 결과와 연역적 추론을 이용할 수 있는 힘을 갖도록 하기 위해서는 경험적 방식과 연역적 방식이 공존하고 서로를 강화할 수 있는 문제해결 장면을 제시할 것을 권고하기도 하였다.

지금까지 외국에서의 증명에 대한 정당화 방식, 즉 연역적 증명의 필요성이나 의의에 대한 학생들의 인식도에 대한 선행 연구를 고찰해 보았는데, 우리 나라에서는 이와 같은 연구가 미진한 편이다. 따라서 처음으로 연역적 증명을 배우는 학생들이 참의 전달자로서의 증명의 기능을 이해할 수 있도록 하는 방안을 마련하기 위해서, 또 실제 수업을 반성해 본다는 의미에서 우리 나라의 중학교 2, 3학년 학생들이 증명의 의의에 대하여 어느 정도 이해하고 있는지를 연구하는 것은 중요한 의미를 지닌다 하겠다. 이하에서는 본 조사 연구의 틀을 삼으려고 하는 증명의 의의에 대한 지도 관점과 이해의 발달 단계에 대하여 논의한다.

2. 증명의 의의에 대한 이해의 발달 단계

1) 증명의 의의에 대한 지도 관점

위의 선행 연구에서와 같이, 많은 학생들이 도형의 성질을 증명할 때 증명의 필요성이나 의의를 모르고 막연히 증명을 하는 것으로 생각된다. 중학교 2학년에서 처음 다루는 증명 문제는 이등변삼각형이나 평행사변형의 성질에 관한 문제이다. 이것에 대해서는 이미 초등 학교에서 실험, 실측에 의해 학습하고 있다. 이들 도형의 성질을 평행선의 성질이나 삼각형의 합

동조건 등을 이용하여 증명을 하지만, 증명을 기술하면서 그 의의를 이해하지 못한다면 영혼이 들어있지 않는 동상을 세우는 것과 같고, 이해의 정도는 그 이후의 도형의 학습에 흥미와 관심을 갖는데 큰 영향을 줄 것이다. 따라서 진정한 의미에서 증명을 할 수 있는지 알기 위해서는 증명의 의의를 충분히 이해하고 있는가를 알아볼 필요가 있다.

國宗(1992)은 '증명의 의의'의 지도 관점으로 다음과 같이 제시하고 있다.

A. '증명의 일반성'을 이해시킨다.
① 정리는 전칭명제라는 것의 이해
② 증명에는 일반성이 있다는 것의 이해
③ 도형의 일반성의 이해
④ 실험, 실측에 의한 방법의 특징의 이해

B. '추론의 구성'을 이해시킨다.
① 가정 · 결론, 증명의 이해
② 근거가 되는 내용, 정의의 의미를 이해
③ 순환논법은 불합리하다는 것의 이해
④ 체계의 이해

'증명의 일반성'에서 일반성은 고찰 대상인 정리 그 자체가 가지는 일반성(A의 ①), 고찰 방법인 증명이 가지는 일반성(A의 ②), 고찰의 매개물인 그림이 가지는 일반성(A의 ③) 또 그것을 명확히 하기 위해 실험, 실측에 의한 방법의 특징을 이해시키는 것(A의 ④)을 말한다.

'추론의 구성'에서는 가정 · 결론, 증명(B의 ①), 근거가 되는 내용, 정의의 의미(B의 ②), 또 그것을 명확히 하기 위해서라도 순환논법은 불합리하다는 것을 지적할 수 있는 것(2의 ③)이 필요하다. B의 ④의 체계는 예컨대, 평행선의 성질에서 삼각형의 내각의 합, 다각형의 내각과 외각의 합에 대한 성질을 차례로 이끌어 낼 수 있는 것을 말한다.

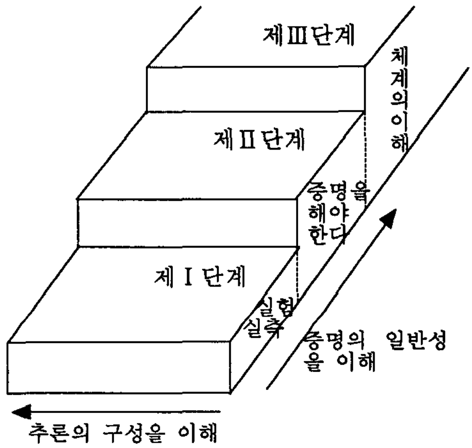
國宗은 조사, 수업 관찰, 면담 등을 통하여 학생들이 증명의 의의를 이해하는 방법에는 다음의 세 단계[1)]가 있음을 주장하였다.

제 I 단계…도형의 성질을 증명할 때, 실험 · 실측에 의한 방법으로 충분하다고 생각하는 단계

제 II 단계…연역적인 증명을 하지 않으면 안 되는 의미를 이해하고 있는 단계

제 III 단계…체계의 의미를 이해하면서 증명을 할 수 있는 단계

이것을 '증명의 의의에 대한 이해의 발달 단계'라 하고, 그림으로 나타내면 <그림 1>과 같다.



<그림 1> 증명의 의의에 대한 이해의 발달 단계(1)

여기서는 학생의 증명의 의의에 대한 이해도를 형식적인 증명을 할 수 있나 없나를 떠나서 증명을 어떻게 받아들이고 있는가를 파악하기 위해 제 I 단계, 제 II 단계를 설정한 것이다. 한편 제III단계는 도형의 성질 각각을 증명하는 것은 기하의 연역적 체계를 확립하는 일의 하나임을 이해하면서 증명을 받아들이는 단계이다. 중학교의 도형 지도에서는 제 II 단계까지만 도달해도 족하고, 모든 학생이 제III단계까지 도

1) '단계'라는 말은 여러 가지로 사용하고 있으나 여기서의 단계는 피아제가 말한 세 가지 단계에서 실험 자료의 분석에 의한 단계를 의미한다. 이러한 경우 '단계' 또는 '수준'이 사용된다. 피아제의 연구의 대부분은 I ~ III단계(수준)를 사용하는데, 제 I 단계는 실험과제의 실패, 제 II 단계는 부분적 성공, 제III단계는 완전한 성공을 한 경우에 설정되는 것이다.

달하기를 요구하는 것은 무리라고 생각되기 때문에, 여기서는 제Ⅰ, Ⅱ단계를 중심으로 고찰한다.

2) 발달 단계별 준비기와 완성기

國宗에 의하면 위의 발달 단계의 각각에는 준비기와 완성기가 있다는 것이다.

(1) 단계Ⅰ의 준비기와 완성기

단계Ⅰ의 학생은 도형의 성질을 설명할 때 실험·실측에 의한 방법으로 충분하다고 생각하지만, 이들 학생에게도 가정·결론, 증명을 이해하고 있는 학생과 그렇지 않은 학생이 있다. 가정·결론, 증명을 이해하고 있지 않은 단계를 준비기인 단계I_a, 가정·결론, 증명을 이해하고 있는 단계를 완성기인 단계I_b라 한다. 예를 들면, 단계Ⅰ의 학생은 부록의 [문제 2], [문제 3]에서 정답을 얻는 학생과 그렇지 않은 학생이 있다. [문제 2]는 삼각형의 합동조건을 이용하는 기본적인 증명 문제이고, [문제 3]은 증명이 주어지고 그 근거를 선택하는 문제이다. 단, 두 문제의 정답으로 [문제 2]가 정답이고 [문제 3]의 소문항 중 1개 이상이 맞는 경우, [문제 2]는 오답이지만 [문제 3]의 소문항 3개를 모두 맞는 경우도 정답으로 한다. 이것을 정리하면 다음과 같다.

단계I_a … 가정·결론, 증명을 이해하고 있지 못하는 단계. 예를 들면, 부록의 [문제 2, 3]에서 정답을 얻을 수 없는 경우.

단계I_b … 가정·결론, 증명을 이해하고 있는 단계. 예를 들면, 부록의 [문제 2, 3]에서 정답을 얻을 수 있는 경우.

(2) 단계Ⅱ의 준비기와 완성기

이 단계의 학생은 도형의 성질을 설명할 때, 연역적으로 증명하지 않으면 안된다는 것의 의미를 이해한다. 예를 들면, [문제 1]에서 이유도 정확하게 진술하면서 ○, ×의 판정을 할 수 있으며, 또한 가정·결론, 증명을 이해하고 있다.

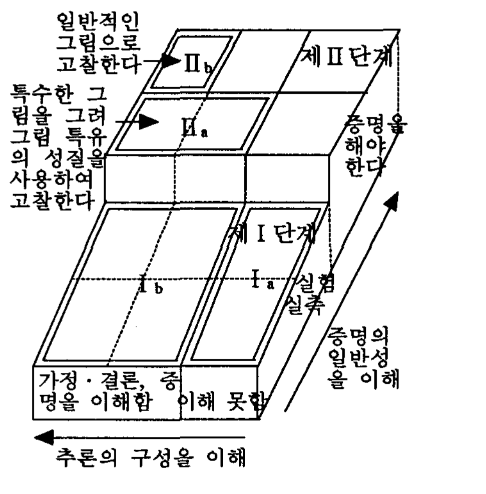
그러나 증명을 하기 위해 그린 도형의 특수성과 일반성을 어떻게 받아들이고 있는가 하는 측면에서 보면, 이 단계의 학생은 특수한 도형을 그리고 그 도형 특유의 성질을 사용해서 설명해 버리는 학생과 그렇지 않은 학생이 있다. 여기서 특수한 도형을 그리고 그 도형 특유의 성질을 사용하여 설명하는 단계를 준비기 단계II_a, 그렇지 않고 일반적인 도형을 고찰할 수 있는 단계를 완성기 단계II_b라 한다.

예를 들면, 이 단계의 학생은 부록의 [문제 4]에서 그림과 증명의 특수성(증명을 위해 그린 도형 특유의 성질을 사용하여 증명하고 있는 것)을 인식하는 학생과 그렇지 않은 학생이 있다.

단계II_a … 연역적인 증명을 하지 않으면 안된다는 것의 의미를 이해하지만, 특수한 도형을 그려서 그 도형 특유의 성질을 사용하여 설명해 버리는 단계. 예를 들면, [문제 4]의 정답을 얻을 수 없다.

단계II_b … 연역적으로 증명하지 않으면 안된다는 것의 의미를 이해하고, 나아가 일반적인 도형으로 고찰할 수 있는 단계. 예를 들면, [문제 4]의 정답을 얻을 수 있다.

지금까지 기술한 '증명의 의의에 대한 이해의 발달 단계'를 그림으로 나타내면 <그림 2>와 같다.



<그림 2> 증명의 의의에 대한 이해의 발달 단계(2)

한편, 증명의 의의에 대한 지도 관점에서 '순환논법은 불합리하다'는 것을 이해하고 있는지를 알기 위해 각 단계의 학생들에게 [문제 5]를 풀게 했더니 단계 I_b와 단계 II_a에서는 각각 정답을 얻은 학생과 얻지 못한 학생들이 있다는 것이 확인되었다. 결국 단계 I_b와 단계 II_a에서는 가정·결론, 증명을 이해하고 순환논법을 인식할 수 있는 학생과 가정·결론은 이해할 수 있으나 순환논법은 인식할 수 없는 학생이 공존한다는 사실을 알 수 있었다. 또 단계 II_b의 모든 학생은 [문제 5]에서 정답을 얻고 있었다.

다음 장에서는 '증명의 의의에 대한 이해의 발달 단계'를 기초로 우리 나라의 중학생들은 어느 영역에 어느 정도 분포해 있는지를 알아보기 위한 연구의 방법과 절차에 대해 논의한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

연구 대상은 대구시에 위치한 C중학교와 D중학교의 2개교에서 2학년 213명, 3학년 209명이다. 두 학교는 대구시 모의고사에서 중간 정도의 비슷한 성적을 갖고 있었다. 표집 대상은 <표 1>과 같다.

<표 1> 표집된 학생수

학년 / 학교	2			3		
	가반	나반	계	다반	라반	계
C	54	53	107	52	52	104
D	53	53	106	53	52	105
계	107	106	213	105	104	209

2. 검사 도구

검사 문항은 증명의 의의에 대한 지도 관점에 따라 부록의 [문제 1, 2, 3, 4, 5]의 내용을 <표 2>와 같이 구성하였다.

<표 2> 증명의 의의에 대한 지도 관점에 따른 문제의 분류

지도 관점		문제
증명의 일반성의 이해	①정리는 전칭명제임을 이해	[1의 병], [4]
	②증명에는 일반성이 있음을 이해	[1의 병]
	③그림의 일반성을 이해	[1의 병]
	④실험·실측에 의한 방법의 특징을 이해	[1의 갑, 을]
추론의 구성을 이해	①가정·결론, 증명의 이해	[2], [3의 가]
	②근거가되는 내용, 정의의 의미를 이해	[3의 나, 다]
	③순환논법의 불합리성을 이해	[5]

여기서는 발달 단계 중에서 제Ⅲ단계는 제외했기 때문에 지도 관점에서 체계의 이해도를 묻는 문제는 설정하지 않았다.

3. 검사 절차

본 검사는 증명 영역이 2학년 후학기에서 다루는 관계로 '도형의 성질, 도형의 닮음'에 대한 단원의 학습이 거의 이루어진 1997년 12월 17일 실시하였으며, 시간은 35분으로 제한하였다. 단, 연구 대상의 2학년 학생들은 닮음의 응용은 학습이 이루어지지 않았으나 검사에는 아무런 지장이 없었다.

4. 자료의 처리

문제에 대한 학생의 응답은 다음 분류 기준

표에 따라 백분율로 나타내었다.

1) '증명의 일반성'의 이해

<표 3> 증명의 일반성에 대한 응답의 분류 기준

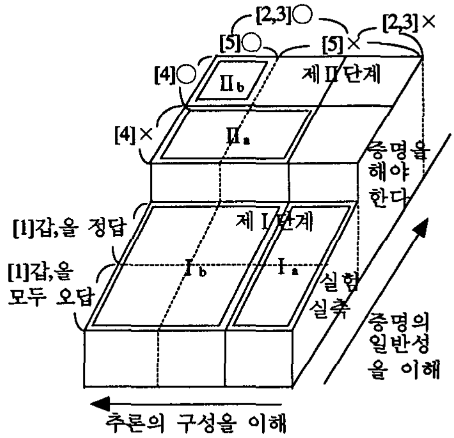
단계	이 해 도	응답의 분류 기준
I	1. 실험·실측에 의한 방법으로도 충분하다고 생각함	[1]의 갑, 을의 설명에 ○표하거나, ×를 했으나 이유가 바르지 않은 경우
	2. 실험·실측에 의한 방법으로는 충분하지 않다고 생각하기 시작함	[1]의 갑, 을의 설명 중 하나에 ×를 하고, 그 이유가 바른 경우
II	1. 특수한 그림을 그려 그 그림 특유의 성질을 사용하여 고찰함	[1]은 정답이지만, [4]가 오답
	2. 일반적인 그림으로 고찰함	[1], [4]가 정답

2) '추론의 구성'의 이해

<표 4> 추론의 구성의 이해에 대한 응답의 분류 기준

이 해 도	응답의 분류 기준
1. 가정·결론, 증명을 이해할 수 없음	[2], [3], [5]가 오답
2. 가정·결론, 증명을 이해하고 있으나 순환논법을 인식할 수 없음	[2], [3]은 정답이지만, [5]가 오답
3. 가정·결론, 증명을 이해하고, 순환논법도 지적할 수 있음	[2], [3], [5]가 정답

위의 1), 2)의 응답의 분류 기준표를 '증명의 의의'에 대한 발달 단계의 그림과 관련지어 나타내면 <그림 3>을 얻는다.



<그림 3> 응답의 분류 기준에 따른 발달 단계

IV. 결과 분석 및 논의

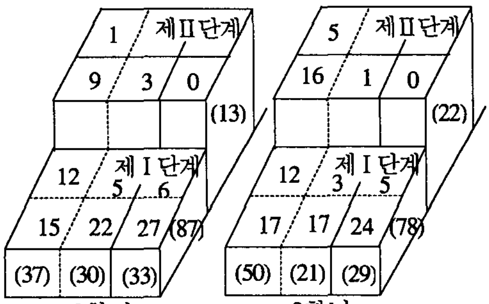
각 문제에 대한 학년별 결과는 <표 5>와 같다.

<표 5> 각 문제의 응답율 및 정답율

문 제		○, ×의 판정	2학년	3학년
[1]	갑의 설명	×	38	52
		○	56	43
		백지	6	5
	을의 설명	×	29	42
		○	66	54
		백지	5	4
	병의 설명	×	10	8
		○	84	88
		백지	6	4
[2]			45	58
[3]	가		81	86
	나		80	86
	다		54	63
[4]			5	9
[5]			41	56

<표 5>에서 [문제 1]의 수치는 판정의 이유와는 관계없이 나타낸 것이다.

또 앞의 응답의 분류 기준에 따라 학생의 반응을 분류한 것은 <그림 4>와 같다.



<그림 4> 응답의 분류 기준에 따른 발달 단계의 분포도

위의 결과를 바탕으로 각 문제에 대하여 고찰해 보기로 한다.

[문제 1]

갑의 설명에 대해 ○를 한 학생은 2학년이 56%, 3학년은 43%이다. 또 ×를 한 학생 중 이유를 바르게 진술하고 있는 학생은 2학년이 32%, 3학년은 37%인데, 이유의 답을 분류해 보면 <표 6>과 같다.

<표 6> 갑의 설명에 대한 ×의 이유

×의 이유	×a	×b	×ab	기타(×백)	계
2학년	23	9	0	6	38
3학년	28	8	1	16	52

<표 6>에서 ×a는 '하나의 예이고, 모든 경우에 성립하는 것은 아니다', '우연히 180° 가 되었을지도 모르기 때문에 이것만으로는 알 수 없다' 등의 일반성이 없다는 이유를 들고 있고, ×b는 '오차가 있을 것이다', '수치가 맞지 않을 수도 있다' 등의 측정으로는 정확히 알 수 없다는 이유를 들고 있다. 또 ×ab는 양자를 모두 들고 있음을 나타낸 것이다. 기타는 ×를 했지만 그 이유가 바르지 못하거나 아무 것도 쓰지 않은 것이다.

을의 설명에 대해 ○를 한 학생은 2학년이 66%, 3학년이 54%인데, 특히 갑의 설명에 대해 ○를 한 학생보다 2학년은 10%, 3학년은 11%가 많다.

또 ×를 한 학생 중에서 이유도 바르게 진술한 학생은 2학년이 20%, 3학년이 29%이다. 이유의 답을 분류해 보면 <표 7>과 같다.

<표 7> 을의 설명에 대한 ×의 이유

×의 이유	×a	×b	×c	기타(×백)	계
2학년	10	8	2	9	29
3학년	15	12	2	13	42

여기서도 ×a는 일반성이 없다는 의미의 이유(예를 들면, 하나의 예이므로 모든 삼각형에 대해 성립할지는 모른다 등)이고, ×b는 정확하지 않다는 의미의 이유(예를 들면, 꼭 직선이 될지 안될지 잘 모른다 등)이며, ×c는 논리적으로 이상하다는 의미(예를 들면, 왜 일직선이 되는지 설명이 없다 등)의 이유이다.

병의 설명에 대해 ×를 한 학생은 2학년이 10%, 3학년이 8%이다. 또 ○를 한 학생 중 이유를 바르게 진술하고 있는 학생은 2학년에서 22%, 3학년이 31%인데, 이유의 답을 분류해 보면 <표 8>과 같다.

<표 8> 병의 설명에 대한 ○의 이유

○의 이유	○a	○b	○c	기타(○백)	계
2학년	18	0	4	62	84
3학년	22	2	7	57	88

여기서 ○a는 일반적이라는 의미의 이유(예를 들면, 어떤 삼각형에도 적합한 성질을 사용하므로 등)이고, ○b는 정확하다는 의미의 이유이며, ○c는 논리적으로 납득이 간다는 의미의 이유이다.

갑, 을의 설명 모두에 ×를 하고, 이유도 바르게 기술한 학생은 2학년이 13%, 3학년이 22%로 매우 적은 편이다. 중학교 2, 3학년에서 도형의 증명을 학습해도 갑이나 을의 설명이 불충분함을 이해하지 못하고 있으며, '증명의 일반성'의 이해도가 낮다고 말할 수 있다.

[문제 2, 3, 5]

문제 2, 3, 5는 '추론의 구성'의 이해도를 알아보는 문제이다. 앞의 <그림 4>를 기초로 '추론의 구성'의 이해도에 따른 응답을 분류하면 <표 9>와 같다.

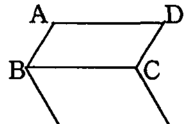
<표 9> 추론의 구성의 이해도에 따른 응답의 분류

이해도 / 학년	1.가정, 결론, 증명을 이해할 수 없다	2.가정, 결론, 증명은 이해하고 있지만, 순환 논법을 알지 못한다	3.가정·결론, 증명을 이해하고, 순환 논법도 지적할 수 있다
2	33	30	37
3	29	21	50

3학년이 2학년보다 상대적으로 이해도가 높고, '추론의 구성'을 충분히 이해하고 있는 학생이 과반수이다. '추론의 구성'의 이해는 어느 정도 하는 것 같다. 그러나 중학교에서 도형 증명의 학습을 마치는 시점에서 전체의 약 30%의 학생이 가정·결론, 증명을 이해할 수 없다는 것은 실제 지도에서 돌이켜 보아야 할 문제점이라고 생각된다.

[문제 4]

2, 3학년 모두 정답율은 매우 낮다. 이 문제에 진술된 증명은 그려진 그림에 따라 읽어 나가도 불합리한 점이 없다. 더욱이 주어진 증명이 이 그림에서만 통용된다는 불충분함을 인식하는 것은 무척 어렵다.



또 이 문제는 보통 오른쪽 그림과 같은 도형을 이용하는 경우가 대부분이며, 그림과 증명이 일반적인 것인가 하는 것까지 고려하여 증명을 학습하는 상황이 거의 없다는 점에도 그 원인이 있을 것이다.

위의 고찰로부터 중학교에서 도형의 증명을 학습할 때, '추론의 구성'에 대한 이해는 어느 정도 하고 있으나 '증명의 일반성'에 대한 이해는 잘 한다고는 말할 수 없음을 알 수 있다. 따라서 '증명의 의의'에 대한 학생의 이해를 깊게 하기 위해서는 '증명의 일반성'을 이해시키기 위한 의도적인 지도가 필요할 것이다.

지금까지의 결과를 바탕으로 '증명의 의의'에 대한 이해의 발달 단계에 관해 다음과 같은 점을 고찰할 수 있다.

1) 단계Ⅱ에 도달한 학생, 즉 도형의 성질을 연역적으로 증명해야 하는 의미를 이해하고 있는 학생은 2학년이 13%, 3학년이 22%로 매우 적은 편이다. 따라서, 중학교 2, 3학년에서 이루어지고 있는 도형 증명의 지도체계 중에서 학생의 증명의 의의에 대한 이해의 발달을 촉진시키는 지도, 특히 '증명이 가지는 일반성'을 이해시키기 위한 지도를 할 필요가 있다.

2) 단계Ⅰ에 속한 학생, 즉 도형의 성질을 설명하는데 실험·실측에 의한 방법으로도 충분하다고 생각하는 학생은 2학년이 87%, 3학년은 78%이다. 즉, 중학교에서 증명을 마친 시점에서 보면 전체의 약 3/4의 학생이 실험·실측에 의한 방법과 연역적인 증명에 의한 방법을 같이 받아들이고 있는 것이다. 또 단계 I_b의 학생은 2, 3학년이 각각 54%, 49%로서 각 학년의 절반 가량이 가정·결론, 증명을 이해하고 있지만 그 증명의 의미를 알지 못하고 있다.

이것으로부터 중학교 3학년 학생의 약 절반 가량이 증명의 의미도 모른 채 원의 성질을 학

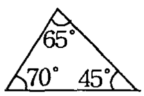
습하고 있다 볼 수 있으므로, 2학년에서 이들 학생의 증명의 의의에 대한 이해의 발달 단계를 단계Ⅱ로 높일 수 있는 지도가 필요하다. 다음 장에서는 이를 위한 예를 들기로 한다.

V. 증명의 의의에 대한 이해를 개선하기 위한 지도의 예

앞에서 언급한 증명의 의의에 대한 이해의 발달 단계를 단계Ⅰ에서 단계Ⅱ로 향상시키기 위해서는 도형의 성질 등을 고찰할 때, 실험·실측에 의한 방법만으로도 충분하다고 생각하는 학생들에게 연역적인 증명을 해야 하는 의미를 알도록 해야 할 것이다. 이를 위해서는 실험·실측에 의한 방법과 연역적인 방법의 특징을 비교, 고찰하는 것도 하나의 방법이 될 수 있을 것이다. 이와 같은 맥락에서 초등 학교에서 이미 배운바 있고, 중학교 2학년에서 연역적 증명의 뜻을 이해시키기 위해 처음으로 등장하는 '삼각형의 내각의 합은 180°'임을 소재로 위의 두 가지 방법의 장·단점에 대해 토의를 하도록 하여 수업을 전개해 나가는 것을 생각할 수 있다. 수업 방식은 일제 수업 또는 소집단 협력 학습을 이용할 수 있을 것이다. 다음의 대화는 예상되는 발문과 응답이다.

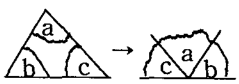
교사: '삼각형의 내각의 합은 180° 이다'는 초등 학교에서 어떤 방법으로 설명했는지 다음 네 가지 방법에 대해 생각해 봅시다.

방법A



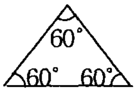
각도기로 잰다

방법B



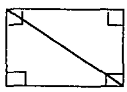
세 각을 잘라 한 곳에 모은다

방법C



60°× 3=180°

방법D



360°÷2=180°

학생: (위의 네 가지 방법에 대한 설명을 듣는다)

교사: 각 방법에 대해서 좋거나 좋지 않은 점, 충분하지 않은 점등을 각자 나누어 준 종이에 기록해 봅니다.(생각할 시간을 주고 각 방법에 대해 각자의 생각을 발표시킨다.)

교사: 먼저 방법A는 어떻게 생각하는가?

학생1: 각도기는 정확하기 때문에 괜찮습니다.

학생2: 시간이 걸리고, 이유를 잘 모릅니다.

학생3: 모든 삼각형에 각도기를 사용하는 것은 번거롭습니다.

학생4: 각도기가 없을 때는 곤란합니다.

학생5: 각도기의 눈금은 정확하지 않습니다. 55.7° 등이 나오면 어떻게 하지요?

학생6: 잘못 잴 수도 있습니다.

교사: 방법C에 대해 말해 봅시다.

학생7: 다른 삼각형에는 적합하지 않습니다.

학생8: 모든 삼각형이 60° 가 되지 않습니다.

교사: 방법B에 대해 자기의 생각을 말해 봅시다.

학생9: 훌륭한 방법이라 생각합니다. 왜냐하면 직선은 180° 이니까요.

학생10: 간단해서 좋아요.

학생11: 그렇지만 포갤 때 비뚤어지면 어떻게 하나요.

학생12: 정확하다면 괜찮겠지만, 종이의 삼각형 자체가 부정확하면 직선이 되지 않을 수도 있다는 것을 생각해 봐야 됩니다.

학생13: 정확한 자로 삼각형을 정확히 그린다면 괜찮을 텐데요.

학생14: 방법A, B는 어떤 삼각형에도 적용될 수 있기 때문에 좋지만, 방법C, D는 특수한 삼각형에만 적용되므로 좋지 않을 것입니다.

교사: 이번에는 방법D에 대해 생각해 봅시다.

학생15: 한 각이 직각인 특수한 경우에만 해당되므로 적절하지 않습니다.

교사: 이제 최종적으로 각 방법에 대해 좋은 점과 좋지 않은 점이 있으면 써 보시오.

교사: (지금까지 토의한 내용에 대해 실험·

실측에 의한 방법의 불충분함을 부연 설명해 준다. 예컨대, 각도기로 재는 것이 불가능한 매우 큰 삼각형에 대해서는 어떻게 할 것인가? 등)

이후의 수업 전개는 모든 삼각형의 내각의 합이 180° 가 된다는 사실을 실험 · 실측에 의한 방법이 아닌 연역적인 추론 방법에 의한 증명으로 설명해 주고, 증명의 필요성을 부각시킨다. 또 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다' 등의 다른 예에 대해서도 두 가지 방법의 장 · 단점을 토의하도록 하여 연역적 증명의 필요성을 자연스럽게 인식하도록 지도한다.

VI. 결 론

논리적으로 사고하는 능력과 태도의 육성은 수학 교육의 가장 중요한 목표 중의 하나라고 볼 때, 이러한 목표를 달성하는데 연역적 추론으로서의 증명은 수학 교육에서 더욱 중요한 학습 주제가 된다고 할 수 있다.

우리 나라를 비롯한 대부분의 나라에서 증명을 학습한 학생들을 대상으로 연구한 결과에 의하면 다른 영역에 비해 성취도 면에서 기대할만한 것이 못되고 있다. 본 연구자는 이러한 원인 중의 하나를 증명을 처음으로 학습하는 학생들이 연역적 증명의 본질을 제대로 알지 못한 상태에서 교사의 지시적인 수업에 의존하기 때문이 아닌가 생각한다. 이러한 생각을 바탕으로, 본 연구에서는 실천적 입장에서 우리 나라 중학생들이 증명의 의의에 대해 어느 정도 이해하고 있는지를 알아보고 개선 방안을 생각해 보았다.

본 연구를 통하여 다음 사실을 알게 되었다.

첫째, 도형의 성질을 연역적으로 증명해야 하는 의미를 이해하고 있는 학생은 2학년이 13%, 3학년이 22%로 매우 적은 편이다. 따라서 중학교 2, 3학년에서 이루어지고 있는 도형 증명의 지도 체계 중에서 학생의 증명의 의의에 대한 이해의 발달을 촉진시키는 지도, 특히 '증명의 일반성'을 이해시키기 위한 지도를 할 필요가 있다.

둘째, 도형의 성질을 설명하는데 실험 · 실측에 의한 방법으로도 충분하다고 생각하는 학생은 2학년이 87%, 3학년은 78%이다. 즉, 중학교에서 증명을 마친 시점에서 보면 전체의 약 3/4의 학생이 실험 · 실측에 의한 방법과 연역적인 증명에 의한 방법을 같이 받아들이고 있었다. 또 각 학년의 절반 가량이 가정 · 결론, 증명을 이해하고 있지만 그 증명의 의미를 알지 못하고 있었다.

이것으로부터 중학교 3학년 학생의 약 절반 가량이 증명의 의미도 모른 채 원의 성질을 학습하고 있다 볼 수 있으므로, 2학년에서 이들 학생의 증명의 의의에 대한 이해의 발달 단계를 높일 수 있는 지도가 필요하다고 본다.

이를 위한 지도의 하나로 실험 · 실측에 의한 방법의 특징과 연역적 증명에 의한 방법의 특징을 비교, 고찰하도록 하는 것을 생각할 수 있다. 예를 들면, 이미 초등학교에서 배운 '삼각형의 내각의 합'에 대한 지도를 통하여 실험 · 실측에 의한 방법의 특징을 이해시킴과 동시에 평행선의 성질 등을 토대로 연역적인 증명의 의미를 이해시키는 것이 유효한데, 가급적 학생들이 토론에 의하여 그 장 · 단점을 비교, 고찰하도록 하는 것도 하나의 방법이 될 수 있을 것이다.

앞으로 대규모의 학생들을 대상으로 증명의 의의에 대한 이해도를 조사하여 우리 나라의 전반적인 현상을 파악하고, 학생들에게 소그룹 협력 학습 등에 의한 토의 학습을 하도록 하여 그들 스스로 증명의 정당화 및 연역적 추론의 의의와 본질을 이해해 나갈 수 있는 실제적 수업에 대한 연구가 이루어지기를 기대하는 바이다.

참 고 문 헌

류성림 (1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구, 한국수학교육학회 논문집

제32권 제2호.

우정호 (1994). 증명 지도의 재음미, 대한수학교육학회 논문집, 제4권 제1호.

國宗進 (1992). 圖形의 論證 指導. 東京: 明治圖書株式會社.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning, In Grows, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, NY: Macmillan Publishing Company.

Fishbein, E. & Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. In. Vermandel(Ed). *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education.* Antwerp: PME.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). Justifying and Proving in School Mathematics. *Mathematical Sciences*, February 1998. Institute of Education: University of London.

Martin, W. G. & Harel, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 1.

Schenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedual knowledge: the case of mathematics. Hillsdale*, NJ: Lawrence Erlbaum.

Senk, S. L. (1985). How Well Do Students Write Geometry Proofs? *Mathematics Teacher*, 78.

Williams, E. (1990). An Investigation of Senior High School Students' Understanding of the Nature of Mathematical Proof, *Journal for Research in Mathematics Education*, 11, 3.

A Study on the Meaning of Proof in Mathematics Education

Ryu, Sung-Rim

Taegu Cheil Girls' Commercial High School, 156-1, Bonri-Dong, Dalseo-gu, Daegu, Korea

The purpose of this study is to investigate the understanding of middle school students on the meaning of proof and to suggest a teaching method to improve their understanding based on three levels identified by Kunimune as follows: Level Ⅰ to think that experimental method is enough for justifying proof, Level Ⅱ to think that deductive method is necessary for justifying proof, Level Ⅲ to understand the meaning of deductive system.

The conclusions of this study are as follows:

First, only 13% of 8th graders and 22% of 9th graders are on level Ⅱ.

Second, although about 50% students understand the meaning of hypothesis, conclusion, and proof, they can't understand the necessity of deductive proof.

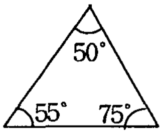
This conclusion implies that the necessity of deductive proof needs to be taught to the middle school students. One of the teaching methods on the necessity of proof is to compare the nature of experimental method and deductive proof method by providing their weak and strong points respectively.

[부록]

증명의 의의에 대한 이해도 검사지

[문제 1] '삼각형의 세 내각의 합은 180° 이다'라는 사실이 옳다는 것을 갑, 을, 병 세 사람은 각각 다음과 같이 설명하였다. 이 세 사람의 설명은 위의 사실에 대한 설명으로서 충분하다고 생각하면 ○, 그렇지 않다고 생각하면 ×를 □안에 기입하시오. 또 그 이유를 써 넣으시오.

①(갑의 설명) 오른쪽 삼각형의 3개의 각을 재어보니 50°, 55°, 75° 였다.

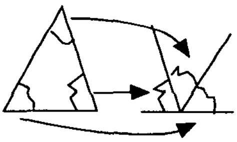


세 내각의 합은 50° + 55° + 75° =180° 이므로 삼각형의 세 내각의 합은 180° 이다.

[답 란] □ (○ 또는 ×),

[이 유] :

②(을의 설명) 삼각형을 그려 오른쪽 그림과 같이 3개의 각을 잘라 한곳에 모으면 정확히 일직선이 된다.

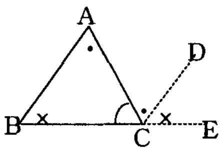


따라서, 삼각형의 내각의 합은 180° 이다.

[답 란] □ (○ 또는 ×),

[이 유] :

③(병의 설명) △ABC에서 변 BC의 연장선 CE를 긋고, C에서 BA에 평행한 직선 CD를 긋는다.



$\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$이므로

엇각이 같으므로 ∠A=∠ACD

동위각이 같으므로 ∠B=∠DCE

그러므로, ∠A+∠B+∠ACB

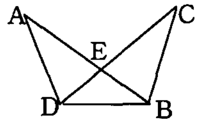
= ∠ACD+∠DCE+∠ACB = 180°

따라서, 삼각형의 세 내각의 합은 180° 이다.

[답 란] □ (○ 또는 ×),

[이 유] :

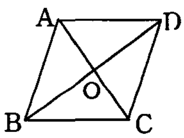
[문제 2] 오른쪽 그림과 같이 선분 AB, CD가 점 E에서 만나고 있다.



∠A=∠C, $\overline{AE}=\overline{CE}$일 때, $\overline{AD}=\overline{CB}$임을 증명하시오.

[문제 3] '평행사변형의 대각선은 각각의 중점에서 만난다'는 성질을 다음과 같이 증명하였다.

<증명> 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라고 한다.



△AOD와 △COB에서,

$\underset{(가)}{\underline{\overline{AD} /\!/ \overline{BC}}}$이므로

∠DAO = ∠BCO

∠ADO = ∠CBO

또, $\underset{(나)}{\underline{\overline{AD}=\overline{CB}}}$ 그러므로 $\underset{(다)}{\underline{\triangle AOD \equiv \triangle COB}}$

∴ $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$

따라서, 평행사변형의 대각선은 각각의 중점에서 만난다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)의 주장은 각각 어떤 근거를 갖는지 다음 ① ~ ⑦ 중에서 알맞은 것을 골라 ( ) 안에 써 넣으시오.

(가) $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$의 근거는 ………… ( )

(나) $\overline{AD}=\overline{CB}$의 근거는 ………… ( )

(다) △AOD≡△COB의 근거는 … ( )

① 평행사변형의 대변의 길이는 서로 같다.

② 평행사변형의 대각의 크기는 서로 같다.

③ 평행사변형의 대각선은 서로 이등분한다.

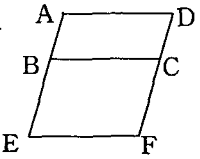
④ 평행사변형의 대변은 서로 평행하다.

⑤ 세 변의 길이가 각각 같다.

⑥ 두 변과 그 끼인각의 크기가 각각 같다.

⑦ 한 변과 그 양끝각의 크기가 각각 같다.

[문제 4] 두 사각형 ABCD와 BEFC가 평행사변형이면, 사각형 AEFD도 평행사변형이다. 이것을 다음과 같이 그림을 그려 증명을 하였다.



<증명> 사각형 ABCD는 평행사변형이므로

$\overline{AD} = \overline{BC}$ … ①

$\overline{AB} = \overline{DC}$ … ②

사각형 BEFC는 평행사변형이므로

$\overline{BC} = \overline{EF}$ … ③ $\overline{BE} = \overline{CF}$ … ④

①, ③에서 $\overline{AD} = \overline{EF}$ … ⑤

②, ④에서 $\overline{AB} + \overline{BE} = \overline{DC} + \overline{CF}$

그런데, $\overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AE}$, $\overline{DC} + \overline{CF} = \overline{DF}$이므로 $\overline{AE} = \overline{DF}$ … ⑥

⑤, ⑥에서 사각형 AEFD는 평행사변형이다.

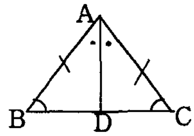
(1) 위의 증명이 옳으면 ○, 틀리면 ×를 기입하시오…

(2) 만약 틀리다(×)고 답한 경우는 그 이유를 쓰시오.

[이 유] :

[문제 5] '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다'는 성질이 옳다는 것을 다음과 같이 증명하였다.

<증명> ∠A의 이등분선과 밑변 BC와의 교점을 D라 한다.



△ABD와 △ACD에서

$\overline{AB} = \overline{AC}$, ∠BAD=∠CAD,

∠B=∠C

한 변과 그 양끝각의 크기가 각각 같으므로

△ABD ≡ △ACD ∴ ∠B=∠C

(1) 위의 증명이 옳으면 ○, 틀리면 ×를 기입하시오 …

(2) 틀리다(×)고 답한 경우는 그 이유를 쓰시오.

[이 유] :