韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1998. 5. 제 37권, 제 1호, 55-72.

J. Kor. Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 1998, Vol. 37, No. 1, 55-72.

중학교 수학에서 증명지도에 관한 연구 [1)]

김 홍 기 (단국대학교)

1. 연구 동기 및 목적

수학은 우리의 일상 생활의 여러 분야에서 밀접하고도 유용하게 사용되고 있다. 수학을 유용하게 사용하기 위해서는 그 사용에 대하여 완전하게 잘 이해해야만 한다. 완전한 이해 없이 사용할 때는 기계적이고, 비효율적 역할밖에 할 수 없는 경우가 많다.

이러한 수학을 학생들이 공부하면서 많은 어려움에 마주치곤 하는데, 그 중에서도 증명을 처음 다룰 때에 다시 한번 더 수학이 어려운 과목으로 부상하여 당황하게 된다.

수학에서 증명을 구성(창조)하는 것을 예술이라고까지 표현하기도 한다. 이를테면 화가가 작품을 구성하기 위해서는 우선 붓, 물감, 화판, ···등의 기본 도구가 필요하듯이 수학에서 증명을 하기 위하여도 증명에 대한 기본적인 도구(양식)가 필요하다. 그리고 화가가 작품을 만들기 위하여 이들 기본 도구의 사용 방법을 알아야만 하듯이, 수학에서 증명을 하기 위해서는 우선 증명에 대한 기본양식을 알아야 하는 것은 당연한 일이다. 이 때, 이들 도구를 갖추고 있는 화가가 어떤 창작물(작품)을 만들어 내는 가는 화가 자신이 얼마나 많은 노력을 하였는가와 그 개인의 능력에 따르듯이, 수학에서도 증명에 대한 기본양식을 알고 있더라도 증명을 얼마만큼 잘 할 수 있는가는 각 개인의 노력과 능력에 달려 있는 것이다.

여하튼, 수학에서 증명을 하기 위해서는 우선은 증명에 대한 기본양식을 알아야 하고, 그들을 사용한 성공적인 증명은 각 개인의 노력과 능력에 따라 다를 수 있는 것이다.

그런데 증명을 처음 다루게 되는 중학교 2학년에서 증명에 대한 기본양식에 관한 아무런 언급도 없이 증명을 취급하고 있기 때문에, 대개의 학생들은 증명을 한다는 것에 대하여 어떤 양식에 맞추어 구성을 어떻게 해야할 지 모르고 있다.

또, 증명을 하여 그것을 서술한 경우에도 그 증명 구성이 옳게 된 것인지, 잘못된 것인지를 알지 못하는 경우가 많으며, 옳게 된 경우라 할지라도, 그것이 왜 옳은 증명인지를 설명할 수 없는 경우가 많다.

증명에 대한 기본양식을 이해하기 위해서는 수리논리를 알아야만 하는데 우리 나라의 중등학교 수학에서는 수리논리를 다루고 있지 않다. 따라서 증명에 대한 기본양식에 대한 엄밀한 이해를 바라는 것은 무리이다.

그러나 증명을 중학교 2학년에 다루기 시작하는 한, 수리논리에 대한 기본 지식이 없는 상태에서라도 중학교 2학년까지의 수학적 지식을 사용하여 증명에 대한 기본양식을 어느 정도 이해시킬 수 있는 방법을 모색하는 것은 필요하다.

증명을 잘하기 위해서는 많은 노력과 시행착오가 있게 마련인 데, 증명에 대한 기본양식을 어느 정도라도 이해하고 그 틀에 맞추어 증명을 위한 노력 및 시행착오는 막연한 상태에서의 노력 및 시행착오보다는 효과적일 것임은 분명하다.

따라서, 이 논문에서는 증명에 대한 보다 구체적이고 체계적이면서도 정확한 기본양식을

---

1) 이 논문은 1997년도 단국대학교 연구비 지원에 의하여 연구되었음

직관적으로라도 이해하고 그 기본양식에 대한 사용방법과 활용을 익히어 증명을 원활히 할 수 있도록 도움을 주는 것을 목적으로 한다.

2. 교과서의 현황

(1) 우리 나라의 교과서

중학교 교육과정(교육부, 1992)에서의 수학 부분에서 수학의 성격으로

> 수학과는 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 사고하는 능력을 기르게 하여, 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 하는 교과이다. · · · 건전한 민주 시민으로서 갖추어야할 합리적이고 창의적인 사고력을 길러 주는 교과이다.

라 하였고, 목표는 다음과 같다.

> 수학의 기초적인 지식을 가지게 하고, 수학적으로 사고하는 능력을 기르게 하며, 이를 활용하여 합리적으로 문제를 해결할 수 있게 한다.
>
> 가. 여러 가지 사물의 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하게 한다.
>
> 나. 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하게 하고, 생활 주변에서 일어나는 여러 문제를 수학적으로 사고하는 능력을 기르게 하며, 이를 생활에 적용할 수 있게 한다.
>
> 다. 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 하고, 수학적 지식과 기능을 활용하여, 합리적으로 문제를 해결하는 태도를 가지게 한다.

또, 증명이 처음으로 취급되는 중학교 2학년의 학년별 내용의 도형 부분은 다음과 같다.

> (5) 도 형
>
> (가) 삼각형의 합동조건을 이용하여 간단한 도형의 성질을 증명하게 한다.
>
> ① 삼각형의 성질
>
> ② 사각형의 성질
>
> <용어와 기호> 명제, 가정, 결론, 역, 정의, 정리, 증명, 외심, 외접, 외접원, 내심, 내접, 내접원, 내접다각형, 외접다각형, $p \rightarrow q$, □ABCD
>
> (나) 두 삼각형의 닮음조건을 알아보게 하고, 이를 이용하여 도형의 성질을 증명하게 한다.
>
> ① 도형의 닮음
>
> ② 삼각형의 닮음조건
>
> ③ 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비
>
> ④ 닮음의 응용
>
> <용어와 기호> 닮음, 닮음비, 닮음의 중심, 닮음의 위치, 무게중심, 중선, 삼각형의 닮음조건, $\backsim$

그리고 방법에서 증명부분에 대하여는 다음 사항에 유의하여 지도한다고 하였다.

> (6) 도형의 성질을 지도할 때에는 삼각형의 합동조건이나 닮음조건을 이용하여 증명과정의 논리성에 중점을 두되, 무리하게 심화하지 않도록 한다.

위의 수학과의 성격에서는「논리적인 사고」,「창의적인 사고력」을 언급하였는데 우선「논리적」이라는 단어의 해석을 어느 정도까지 하여야 할 지 분명하지가 않다. 실제로 중학교 수학의 내용에서는 논리(수리논리)에 대한 아무런 취급도 없다. 물론 중학교에서 논리에 대한 취급을 어떤 방법으로 어느 정도까지 취급해야 할 것인가는 앞으로 연구가 되어야만 할 것이다.

또, 목표에서 언급한「수학적 사고」도 논리의 취급이 되고 있지 않은 상태에서 어떤 뜻을 갖고 있는지 막연한 감이 들며, 내용 중에 증명을 처음 취급하는 곳에서는 증명에 대한 준비과정이 없이 단순히 「… 간단한 도형의 성질을 증명하게 한다.」고 하여 내용의 흐름에 격

차가 있는 상태이다. 특히 증명 부분에서의 내용의 흐름의 격차는 원만한 사고의 진행을 방해할 수도 있으므로「창의적인 사고력」을 길러주는데 적합한 한 부분인 증명 부분이 그 역할을 제대로 할 수 없게 된다.

이제 중학교 교육과정에 따른 현행 교과서의 증명이 관련된 분야의 내용 취급과 그 전개에 대하여 알아보자.

현행 8종 중학교 2학년 교과서에서는 모두 기하부분의 처음에서 명제를 도입하였고, 명제「p 이면 q 이다.」를 기호로 p → q로 나타낸다는 것과 이 때 p는 가정, q를 결론이라고 하였다. 또, 명제 p → q와 명제 q → p를 서로 다른 명제의 역이라 하였고, 용어의 정의에 대하여 서술하였다.

증명의 도입에서는 1종의 교과서(김응태 외 3인, 1996)를 제외하고는 단순히 참인 명제를 밝히는 예를 든 후에 증명에 대한 설명을 하였다. 이를테면, 교과서(김호우 외 3인(1996), 박두일 외 2인(1996), 오병승(1996))에서는

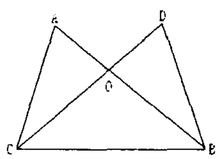
> $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면, $\angle B=\angle C$이다.

를 밝히는 보기를, 교과서 (김연식 외 1인(1996), 박배훈 외 1인(1996))에서는

> 삼각형의 내각의 크기의 합이 180° 이다

를 밝히는 보기를, 교과서(구광조 외 1인, 1996)에서는 다음과 같이 밝히는 보기를 교과서(김응태 외 3인, 1996)에서는 아무런 보기도 없이 용어 증명을 정의하였다.

> 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$가 점 O에서 만나고 있다. 이 때,
> $\angle ACO=\angle DBO$,
> $\angle OCB=\angle OBC$
> 이면 $\overline{AB}=\overline{CD}$이다



를 밝히는 보기를 교과서(최용준 외 1인, 1996)에서는

> 점 P는 $\overline{AB}$의 수직이등분선 l위의 한 점이고, 점 M은 직선 l과 $\overline{AB}$의 교점이다. 이 때 $\overline{PA}=\overline{PB}$이다.

여기서 특히 교과서(구광조 외 1인(1996), 김응태 외 3인(1996), 김호우 외 3인(1996), 오병승(1996))에서는

> 주어진 명제가 참임을 밝히기 위하여 가정에서 출발하여 이미 알고 있는 사실을 이용하여 결론으로 이끌어 나가는 것이 증명이다

라고 하여 연역적 증명이 왜 필요한가의 설명이 없이 직접 연역적 증명의 도입을 하였으며, 교과서(김연식 외 1인(1996), 박두일 외 2인(1996), 최용준 외 1인(1996))에서는 실험이나 측정으로 어떤 성질을 확인해 보던가 또는 예측해볼 수 는 있지만, 이것만으로 어떤 성질이 항상 옳다고는 단정할 수 없다는 보기와 그에 대한 설명을 한 후에 증명에 대한 용어 정의를 다음과 같이 하였다.

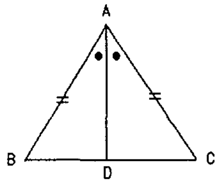
> 실측이나 실험에 의하지 않고 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질들을 근거로 하여 이론적으로 어떤 명제가 참임을 밝히는 것을 증명이라고 한다.

위와 같은 증명에 대한 용어를 전부로 하여 바로 삼각형의 성질, 사각형의 성질, 닮은 도형에서의 성질에 대한 증명을 2학년 교과서에서 다루고 있다.

물론 2학년 교과서에서 다루고 있는 증명의 도입에서는 직접증명법을 사용한 증명으로 가정에서부터 결론을 이끌어내고 있는데, 이를테면「이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다」의 증명을 보면 다음과 같다.

다음 그림에서와 같이 $\angle A$의 이등분선과

변 BC가 만난 점을 D라고 하면, $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$ (가정), $\overline{AD}$는 공통 $\angle BAD=\angle CAD$ ($\angle A$의 이등분각)이므로, 삼각형의 합동조건에 의하여



$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

따라서, $\angle B=\angle C$

위의 증명 과정은 결국

$$\overline{AB}=\overline{AC} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \triangle ABD \equiv \triangle ACD \overset{(2)}{\Longrightarrow} \angle B=\angle C$$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{AB}=\overline{AC}\ (\text{가정}) \\ \overline{AD}\ \text{공통} \\ \angle BAD=\angle CAD \\ (\angle A\text{의 이등분각의 상등})\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{합동인 삼각형의} \\ \text{대응각의 합동}\end{array}\right.$$

이다. 이 과정을 살펴보면 우선 이와 같은 나열에 의하면 왜 주어진 명제가 증명이 된 것인가 하는 의문이 생기게 된다.

우선 위의 증명 과정의 나열에서 참인 명제

(1) $\overline{AB}=\overline{AC} \Longrightarrow \triangle ABD \equiv \triangle ACD$

은 보조선인 $\angle A$의 이등분선 $\overline{AD}$를 사용하여 주어진 가정, 이미 옳다고 알고 있는 $\angle A$의 이등분각의 상등, 공통으로 같은 크기의 선분에 따른 삼각형의 합동조건에 의한 것이고, 또

(2) $\triangle ABD \equiv \triangle ACD \Longrightarrow \angle B=\angle C$

도 이미 알고 있는 합동인 두 도형에서는 대응각의 크기가 같다는 사실에 의한 것이다.

결국,

「 $\overline{AB}=\overline{AC} \Longrightarrow \angle B=\angle C$ 」

의 증명은 (1)과 (2)에 의한 삼단논법을 사용하여 밝힌 것이다.

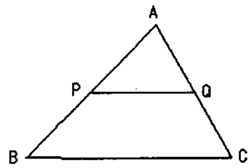
그러나 삼단논법이 타당한 추론 방법이라는 것에 대한 언급은 아무 곳에도 있지 않다. 실제로 중학교에서 간단한 논리도 취급하지 않으므로 논리적으로 삼단논법에 대하여 논할 수는 없다. 그러나 이와 같은 증명 방법이 타당하다는 것을 논리를 다루지 않는 학생들도 이해할 수 있게 하여 증명에 활용할 수 있게 한다면 좋은 효과를 얻을 수 있을 것이다.

또 다음과 같은 문제(최용준 외 1인, 1996)를 살펴보자.

오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서

$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{PC}}$ 이면

$\overline{PQ} \,/\!/\, \overline{BC}$ 이다.



이 명제의 증명 과정을 나열하면 다음과 같다.

(1) $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \Longrightarrow \dfrac{\overline{PB}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{QC}}{\overline{AQ}} \quad (p \Rightarrow p_1)$

$\Uparrow$

등식의 성질

(2) $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{QC}}{\overline{AQ}} \Longrightarrow \dfrac{\overline{AB}-\overline{AP}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{AC}-\overline{AQ}}{\overline{AQ}}$

$\Uparrow \qquad (p_1 \Longrightarrow p_2)$

$\left\{\begin{array}{l}\overline{PB}=\overline{AB}-\overline{AP} \\ \overline{QC}=\overline{AC}-\overline{AQ}\end{array}\right.$

(3) $\dfrac{\overline{AB}-\overline{AP}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{AC}-\overline{AQ}}{\overline{AQ}}$

$\Longrightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}-1=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}-1 \quad (p_2 \Rightarrow p_3)$

$\Uparrow$

분수의 계산

(4) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}-1=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}-1 \Longrightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{QC}}{\overline{AQ}}$

$\Uparrow \qquad (p_3 \Longrightarrow p_4)$

등식의 성질

(5) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} \Longrightarrow \triangle APQ \backsim \triangle ABC \ (p_4 \Rightarrow p_5)$

$\Uparrow$

$\left\{\begin{array}{l}\angle A : \text{공통} \\ \text{삼각형의 닮음조건}\end{array}\right.$

(6) $\triangle APQ \backsim \triangle ABC \Longrightarrow \angle APQ=\angle ABC \ (p_5 \Rightarrow p_6)$

$\Uparrow$

닮은도형에서의 대응각

(7) $\angle APQ = \angle ABC \Longrightarrow \overline{PQ} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ $(p_6 \Longrightarrow q)$

$$\Uparrow$$

$\left\{\begin{array}{l}\angle APQ\text{와 } \angle ABC\text{는} \\ \text{동위각, 평행선의 성질}\end{array}\right.$

위의 증명 과정을 살펴보면, 「 $p \Rightarrow q$ 」를 증명하기 위하여

$$p \Rightarrow p_1, \quad p_1 \Rightarrow p_2, \quad \cdots, \quad p_6 \Rightarrow q$$

를 밝혔다. 이것이 바로 「 $p \Rightarrow q$ 」의 증명이 된다는 것은

$$\frac{p \Rightarrow p_1 \qquad p_1 \Rightarrow p_2}{\therefore\ p \Rightarrow p_2}, \quad \frac{p \Rightarrow p_2 \qquad p_2 \Rightarrow p_3}{\therefore\ p \Rightarrow p_3}, \quad \cdots, \quad \frac{p \Rightarrow p_6 \qquad p_6 \Rightarrow q}{\therefore\ p \Rightarrow q}$$

와 같은 사실에 의한 것이고, 삼단논법을 계속 사용하여 증명을 할 수 있음을 뜻하는 것이다. 그러나 중학교 과정에서는 이와 같은 타당한 추론의 구성에 대한 언급이 없이 무작정 사용하고 있기 때문에 학생들은 위와 같은 증명 과정의 흐름이 어떤 의미를 갖고 있는 것인지 알지 못하고 있다. 따라서, 증명의 구성을 어떻게 해야할 지 모르는 학생들이 증명을 올바르게 써서 나열한다는 것은 쉽지 않은 일이며, 심한 경우에는 옳게 써놓은 증명조차 그것이 왜 증명이 되는 것인가도 이해할 수 없는 경우가 많다.

직접 증명의 도입과 간단한 활용을 한 후에 각 교과서마다 내심, 외심, 중심에 관한 증명에서는 간접증명방법의 하나인 동일법 곧, 도형 F가 P인 성질을 갖는 것을 증명하는데 따로 P인 성질을 갖는 도형 F'을 생각하여 F와 F'이 일치하는 것을 밝혀서 정리가 성립함을 추론과는 증명방법을 사용하였다.

어떤 각의 이등분선, 어떤 점에서 그 점을 지나지 않는 직선에로의 수선, 그리고 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 하나 뿐이라는 사실과 앞에서 다룬 직접증명법을 이용하면 바로 증명할 수 있는 정리들이기는 하지만, 이 증명방법을 이해하고서 증명을 다룬다면 그 구성과 과정의 이해를 보다 명확히 할 수 있을 것이다.

그리고 명제 「p이면 q이다」가 참일 때 다음의 두 조건

(1) p인 성질의 것이 존재한다.

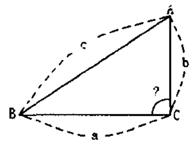
(2) q인 성질을 갖는 것은 단 하나만 존재한다.

가 만족될 때에는 참인 명제 「p이면 q이다」의 역 「q이면 p이다」도 동일법에 의하면 참인 명제가 됨을 이용하여 3학년의 모든 교과서에서는

피타고라스의 정리의 역「세 변의 길이가 각각 a, b, c인 $\triangle ABC$에서 $a^2+b^2=c^2$ … ① 이면 $\angle C=90^\circ$ 이다.」

를 다음과 같이 증명하였다.

오른쪽 그림과 같이 $\angle C'=90^\circ$, $\overline{B'C'}=a$, $\overline{C'A'}=b$ 가 되도록 $\triangle A'B'C'$을 만들고 $\overline{A'B'}=x$ 라고 하면 피타고라스의 정리로부터 $a^2+b^2=x^2$ … ② 위의 ①, ② 로부터 $x^2=c^2$이다. 여기서 $x>0, c>0$ 이므로 $x=c$ 따라서, $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$는 세 변의 길이가 각각 같게 되어 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$이다.



$$\therefore \angle C = \angle C' = 90^\circ$$

그런데, 이 때 참인 명제 「p이면 q이다」가 앞의 조건 (1), (2)를 만족할 때에는 왜 그 역인 「q이면 p이다」도 참인 명제가 될 수밖에 없는가를 벤다이어그램을 사용하여 직관적으로라도 이해할 수 있다면, 뒷부분에서도 나타나게 되는 이와 같은 증명의 구성과 이해에 보다 효과적일 것이다.

또, 3학년의 일부 교과서(구광조 외 1인(1996), 김연식 외 1인(1996), 박배훈 외 1인(1996), 최용

준 외 1인(1996))에서는 증명에서 귀류법을 사용하고 있는데, 그 중에서 교과서(구광조 외 1인, 1996)에서는 「삼각형의 변에 대한 각의 관계 (정리 6-4, p186)」의 증명과, 「원의 접선과 반지름의 (정리 7-4, p210) 관계」증명에서 귀류법을 사용하고 참고 부분을 두어,

> 결론을 부정하면 가정 또는 이미 증명된 명제에 모순이 생기는 것을 밝혀 결론이 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다

고 하여 귀류법 증명 방법을 소개하였다

그리고 3학년 교과서(최용준 외 1인, 1996)에서는 피타고라스의 정리의 역

「△ABC에서 $a^2+b^2=c^2$이면 $\angle C=90^\circ$ 이다」와 삼각형의 변과 각의 관계 중의 「△ABC에서 $C^2 < a^2+b^2$ 이면 $\angle C < 90^\circ$ 이다」의 증명을 귀류법에 의하여 증명을 한 후 참고 부분을 두어

> 위의 증명과 같이 결론이 성립하지 않는다고 가정하고, 주어진 가정에 모순되는 사실을 유도하여 결론이 성립하지 않을 수 없음을 보이는 증명 방법을 간접증명법이라고 한다

고 해설을 하였다.

끝으로 교과서(김연식 외 1인, 1996)에서는 연구·학습 중의 한 면을 증명 방법 (귀류법)에 대하여 할애하여서「명제「p이면 q이다」가 참임을 증명하는 방법 중에서 가정 p아래서 결론인 q를 부정하면, 모순이 생기는 것을 보임으로써 주어진 명제가 참임을 주장하는 증명 방법을 귀류법이라고 한다」고 하였고, 앞에서 배운「원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름에 수직이다」가 참임을 귀류법에 따라서 증명을 하여 보였으며「삼각형의 변의 길이에 대한 각의 크기」관계를 귀류법을 사용하여 증명하도록 제시하였다.

한편 일부 교과서(김응태 외 3인(1996), 김호우 외 3인(1996), 오병승(1996))에서는 예제와 문제에서 귀류법 증명을 이용하였다.

교과 내용의 흐름상 증명에서 귀류법을 사용해야 하는 정리들이 있고, 이들 정리들을 이용하면 보다 원활한 응용을 할 수 있고 분명하게 내용을 이해할 수 있는 경우가 많이 있다. 따라서, 귀류법 증명의 사용은 보다 바람직한 학습효과를 올릴 수 있게 한다.

그런데, 현행 교과서에서는 귀류법을 이용하여 증명을 하고는 있지만 이 증명 방법이 왜 타당한 증명 방법인가에 대하여는 아무런 언급이 없다. 곧, 명제 「p이면 q이다」가 참임을 증명하는 대신에 왜 「p이고 q가 아니다」가 모순 명제임을 보이면 되는 것인가에 대한 아무런 이해도 없이 단순히 기계적으로 사용하고 있다.

실제로 다음과 같은 논리에서의 동치관계

$p \to q$: 항진명제 $\Leftrightarrow$ $\sim p \vee q$: 항진명제

$\Leftrightarrow$ $\sim(\sim p \vee q)$: 모순명제

$\Leftrightarrow$ $p \wedge \sim q$: 모순명제

를 이해하지 않고서는「p이면 q이다」가 참임을 증명하는 대신에「p가 아니고 q이다」,「p가 아니고 q가 아니다」,「p가 아니거나 q이다」,「p이거나 가 아니다」,… 등에서 어느 한 명제가 모순명제임을 밝히면 왜 안되는가 하고 의문을 가질 수 있게 된다.

직관적으로라도 명제「p이면 q이다」가 참인 경우와 명제「p이고 q가 아니다」가 모순인 경우의 관계를 이해할 수 있다면 기계적인 사용보다는 논리적인 사고 및 응용에 도움을 줄 수 있을 것이다.

중학교 3학년의 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이에서 필요한 명제

「$ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$」

에 대하여 서술한 내용을 살펴보면 다음과 같다.

교과서(김호우 외 3인(1996), 오병승(1996), 최용준 외 1인(1996))에서는 a, b사이의 관계에 대한 살펴봄이 없이 단순히

「 $ab=0$ 이면 $a=0$ 또는 $b=0$ 」

이라고 하였고, 그 이외의 교과서 [구광조 외 1인(1996), 김연식 외 1인(1996), 김응태 외 3인(1996), 박두일 외 2인(1996), 박배훈 외 1인(1996)]에서는 조금씩 다르기는 하지만 다음과 같이 하였다.

$ab=0$인 경우는

(1) $a=0, b\neq0$ (2) $a\neq0, b=0$

(3) $a=0, b=0$ (4) $a\neq0, b\neq0$

에서 (1), (2), (3)인 경우 중의 어느 한 경우이므로 두 수 a, b에 대하여 적어도 하나는 0이다. 곧,

$ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$

또, 이것의 역도 성립한다. 곧,

$a=0$ 또는 $b=0$이면 $ab=0$

논리를 취급하지 않는 현행 중학교 교과 과정에서 위의 내용을 정확하게 처리할 수는 없다. 이 명제는 고등학교의 공통수학 부분에서도 취급을 하면서 그곳에서는 증명을 하고 있다. 그런데, 고등학교에서도 증명방법에 대한 취급을 하지 않기 때문에 「 $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이다」의 증명을 그 방법에 대한 아무런 언급도 없이 다음과 같이 제시한 교과서들이 있다.

$ab=0$이고 $a\neq0$이라고 하면

$\frac{1}{a}(ab)=\frac{1}{a}\cdot 0$ 에서 $(\frac{1}{a}\cdot a)b=0$

여기서 $(\frac{1}{a}\cdot a)=1$ 이므로 $1\cdot b=0$

$\therefore b=0$

또, 같은 방법으로 $ab=0$이고 $b\neq0$이라고 하면 $a=0$

위의 증명을 다시 써보면

① $ab=0 \wedge a\neq0 \Rightarrow \frac{1}{a}(ab)=\frac{1}{a}\cdot 0$

$\Rightarrow (\frac{1}{a}\cdot a)b=0 \Rightarrow 1\cdot b=0 \Rightarrow b=0$

② $ab=0 \wedge b\neq0 \Rightarrow (ab)\cdot\frac{1}{b}=0\cdot\frac{1}{b}$

$\Rightarrow a(b\cdot\frac{1}{b})=0 \Rightarrow a\cdot1=0 \Rightarrow a=0$

이다. 위의 내용을 살펴보면 주어진 명제

「 $ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$ 」

대신에 다른 꼴인 명제

「 $ab=0 \wedge a\neq0 \Rightarrow b=0$ 」

을 증명하였다.

그러나 이와 같이 다른 꼴의 명제로 바꾸어서 증명하여도 되는 이유에 대하여는 어느 곳에서도 설명이 없다.

실제로 논리에서의 동치관계

$p\rightarrow(q\vee r)$	$p\rightarrow(q\vee r)$
$\equiv\sim p\vee(q\vee r)$	$\equiv\sim p\vee(q\vee r)$
$\equiv(\sim p\vee q)\vee r$	$\equiv\sim p\vee(r\vee q)$
$\equiv\sim(p\wedge\sim q)\vee r$	$\equiv(\sim p\vee r)\vee q$
$\equiv(p\wedge\sim q)\rightarrow r$	$\equiv\sim(p\wedge\sim r)\vee q$
	$\equiv(p\wedge\sim r)\rightarrow q$

을 이해할 수 있다면 명제 $p\Rightarrow(q\vee r)$ 대신에 이것과 논리적으로 동치인 명제

$(p\wedge\sim q)\Rightarrow r$ 나 $(p\wedge\sim r)\Rightarrow q$

중의 어느 하나를 증명하면 됨을 알 수 있으며, 이 때 위의 ②의 부분은 사족임도 알 수 있다.

또, $p\vee q\rightarrow r\equiv\sim(p\vee q)\vee r$

$\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee r$

$\equiv(\sim p\vee r)\wedge(\sim q\vee r)$

$\equiv(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$

에서 「 $a=0\vee b=0\Rightarrow ab=0$ 」의 증명은 $(a=0\Rightarrow ab=0)\wedge(b=0\Rightarrow ab=0)$를 밝히면 된다.

결과적으로 우리 나라의 현행 수학교육에서는 중학교 2학년부터 고등학교까지에서 많은 증명을 하고 있으면서도 기본양식인 증명 방법

에 대한 아무런 언급도 없이 여러 가지의 증명 방법을 무작정 사용하여 증명을 하고 있으므로 수학이라는 건축물의 토대를 모래 위에 만들고 있는 것이 아닌가 하는 생각이 든다.

다음에는 중학교 2학년 교과서에서 서술한 증명의 전략에 대하여 알아보자.

8종의 교과서 중에서 6종의 교과서(구광조 외 1인(1996), 김연식 외 1인(1996), 김응태 외 3인(1996), 박배훈 외 1인(1996), 오병승(1996), 최용준 외 1인(1996))에서만 증명의 전략에 대하여 표를 만들거나 본문에서 간단히 서술하였는데 그 내용은 대략 다음과 같다.

(1) 주어진 명제를 가정과 결론으로 나누고,

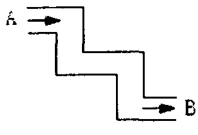
(2) 증명에 필요한 정의 정리, 이미 알고 있는 성질들을 알아내어 증명을 위한 계획을 세우고,

(3) 세운 계획에 따라 증명을 한다.

단, 도형에 관한 명제이면 알맞은 그림을 그려서 기호를 붙여 알아보면 좋다.

교과서의 쪽수가 제한이 되어 있고, 논리의 취급을 하고 있지 않는 우리 나라의 교과서에서 증명의 전략에 대하여 얼마만큼 언급하는 것이 좋을지는 모르지만 위의 내용 정도로는 너무나 약한 것이 아닌가 생각된다.

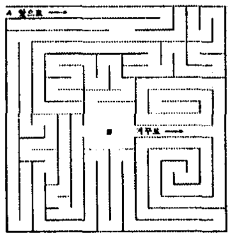
가정에서 시작하여 결론에 이르는 방법을 찾는 것은 문제에 따라 그리고 각 개인의 특성에 따라서 얼마든지 다를 수가 있다. 이를테면, 가정을 출발지점이라 하고, 결론을 도착해야할 지점이라고 하여 출발지점에서 도착지점으로 가는 길을 찾는 방법을 다음과 같이 생각해 보자.



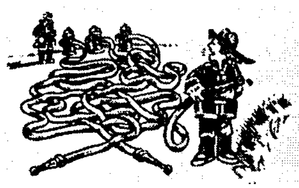
<그림 I>

오른쪽 <그림 I>과 같은 도로의 A지점에서 B지점으로 갈 때에는 곧장A지점을 출발하여 B지점으로 가면 바로 B지점에 도착하게 되어 쉽게 길을 찾게 된다.

그러나 다음의 <그림 II>(Solow. D., 1990)의 미로에서는 출발지점 A에서 시작하여 도착 지점 B로 계속 가면서 길을 찾을 수도, 거꾸로 B에서 출발하여 A로 가면서 길을 찾을 수도 있고, 또, A와 B의 양쪽 곧, A에서 B로 가고 거꾸로 B에서도 A로 가면서 중간에 만나도록 하여서 길을 찾을 수도 있다.


<그림 II>

다음의 <그림 III>(Serra. M., 1993)에서는 들고 있는 소방호수에 연결된 수도꼭지를 찾을 때 일반으로 소방 호수의 끝점에서부터 거꾸로 거슬러가 수도꼭지를 찾는 것이 빠를 것이다. 여하튼 가정으로부터 결론을 이끌어 내는 증명 과정을 정리하여 써 나간다는 것은 대개의 경우는 위의 <그림 II>의 미로에서와 같이 많은 시행착오를 범하게 되는 것이 보통이고, 어떤 방법으로든 길을 찾았을 때의 성공에 대한 즐거운 기분은 증명에서도 마찬가지가 될 것이다. 따라서, 증명을 처음 다루게 되는 때에 증명의 전략, 곧 증명 과정을 찾는 방법에 대한 충분한 논의는 학생들이 증명에 도전하게 할 의욕을 갖게 할 수도 있고, 보다 논리적이고 창의적인 사고력을 키울 수 있게 할 수도 있을 것이다.


<그림 III>

(2) 미국 및 일본의 교과서

우선 미국에는 학년, 내용분야(대수, 기하 등)에 따른 많은 종류의 교과서가 있으며, 또 학생 개인의 능력에 따라 학습 내용의 진도도 다르므로 우리 나라의 교과서와 같은 방법으로 비교할 수는 없다. 따라서, 이곳에서는 그 내용

이 우리 나라의 중학교 과정과 비슷한 것들 몇 종류를 택하여 증명 부분의 취급에 대하여 살펴본다.

7학년용 교과서(Eicholz. R. E 외 9인, 1991)에서는 귀납적 추론을 도입하여 수들의 패턴, 기하학적 도형을 발견하게 하였고, 그 후 대수에서와 기하학에서 간단한 비형식적 증명(Informal proof)을 다루었다.

또, 진리표의 사용 없이 「And」, 「Or」, 「If …, then」을 사용한 합성명제의 참인 경우를 다음과 같이 열거하였다.

명제 P, Q에 대하여 (P and Q)는 P와 Q가 모두 참일 때만 참이다. (P or Q)는 P가 참 또는 Q가 참이던가 P, Q 모두가 참일 때 참이다. (If P , then Q)는 P가 참이고 Q가 거짓일 때를 제외하고는 참이다.

논리적 추론 부분에서는 「If …, then」 명제는 새로운 논리적인 추론을 만들기 위하여 계속 연결될 수 있으며, 「If …, then」 형태의 명제를 A가 B를 함의하는 것으로 생각할 수 있고 이것을 $A \Rightarrow B$로 나타내며, $A \Rightarrow B$이고 $B \Rightarrow C$임을 알 때에는 $A \Rightarrow C$로 쓸 수 있다고 하였다.

이 책에서는 위와 같은 추론을 간단한 보기로부터 도입을 하여 내용을 심화하지는 않았지만 관련된 여러 문제에서 활용을 하여 익히도록 하고 있으며 8학년 교과서에서 추론 부분에서 활용을 하고 있다.

교과서(Ulrich. J. F., 1987)에서는 제 1 장에서 기하의 소개, 정의와 정의들이 갖는 논리적인 순서, 공준, 정리, 선분, 각 들에 대하여 간단히 다루고 「제 2 장 증명의 도입」에서는 대수적인 성질들과 증명, 조건적, 연역적 추론, 연역적 추론과 증명, 귀납적 추론을 다루었고, 「제 3 장 합동인 삼각형」의 7절에서는 간접증명에 대하여 다루었다. 그리고 부록에 「논리와 증명」 부분을 두어, 부정, 합접, 이접, 합접과 이접에 관한 진리표, 논리적 동치, 항진명제와 모순명제, 조건문, 추론의 법칙을 다루고 있다.

교과서(Jacobs. H. R., 1987)에서는 제 1 장 「연역적 추론의 본바탕」에서 결론의 유도, 조건문, 동치명제 정의, 타당한 연역과 타당하지 않은 연역, 두 개의 전제를 갖는 추론, 직접 증명, 간접 증명, 연역체계 등을 다루고 있는 데, 이 책에서는 오일러 다이어그램을 이용하여 많은 설명을 하려고 하였다.

끝으로 뉴욕 시에서 사용하고 있는 두 종류의 교과서에서의 증명 관련 분야에 대하여 살펴본다.

교과서(Rising. G. R. 외 4인, 1989) 1권에서는 제 1 장 수와 연산에서 우리 나라의 초등학교 6학년 내지 중학교 1학년의 전반부에 해당하는 내용인 집합, 수직선, 유리수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 연산의 순서에 관하여 다루고 제 2 장을 논리로 하여 논리의 도입, 부정, 합접, 이접, 조건문, 진리표 작성, 조건문에서 역, 이, 대우, 쌍조건문, 유효한 추론 등을 50여쪽의 지면을 할애하여 상당히 자세하게 다루었다. 그리고 교과서 2권에서는 제 1 장 요점의 복습에서 집합과 그래프, 실수의 성질과 기본연산, 일차방정식, 일차부등식, 용어의 기호화에 대하여 간단히 살펴보고, 제 2 장을 논리로 하여 명제와 부정, 합접과 이접, 조건문, 역, 이, 대우, 개문장, 추론의 법칙, 추론의 연계, 직접증명, 간접증명 등을 50여쪽의 지면을 할애하여 상당히 자세하고 나름대로 엄밀하게 서술하여 제 3 장의 기하와 증명 부분부터 논리적인 틈이 없이 이용하도록 하였다.

또, 교과서(Keenan. E. P. 외 1인, 1990)의 course 1 에서는 제 1 장 수학적 연산, 제 2 장 대수적 표현과 개문장, 제 3 장 연산의 성질, 제 4 장 간단한 방정식과 문제에서 우리 나라의 초등학교 6학년부터 중학교 1학년의 전반부에서 다루는 학습 내용 정도의 내용을 다루고, 제 5 장을 논리로 60여쪽을 할애하여 상당히 자세하게 다루고 있다.

이 교과서에서는 문장을 우선 수학적인 문장

과 비수학적인 문장으로 나누고, 수학적 문장을 다시 개문장(변수를 포함한 문장)과 폐문장(명제라고 하며 변수를 갖고 있지 않음)으로 나눈 후에 폐문장을 또 참인 문장과 거짓인 문장으로 나누어 논리의 시작부터 상당히 엄밀하게 하려고 하였고, 계속하여 부정과 기호, 진리표, 합접, 이접, 논리와 집합, 조건문, 합성명제와 진리값, 합성명제와 진리표, 쌍조건문, 항진명제, 논리적 동치, 역, 이, 대우 등을 자세한 설명과 보기를 들어가면서 서술하였다.

그리고, course 2 에서는 제 1 장 기하의 도입에서 실수의 성질, 무정의 용어, 선과 선분의 정의, 각의 정의, 수선의 정의, 삼각형과 사각형에 관련된 선분들의 정의를 하고, 제 2 장을 논리로 하여 60여쪽을 할애하여 상당히 자세하게 다루었다. 곧, 논리의 필요성, 문장, 명제, 진리값, 논리에서의 연결사, 진리표, 항진명제, 논리적으로 동치인 명제, 논리에서의 증명, 삼단논법의 여러 경우에 대한 추론법칙, 부정과 드 모르간의 법칙, 논리적 증명의 실행을 상당히 자세하게 다루었다. 그리고 제 3 장 기하에서의 명제 증명에서는 귀납적 추론, 정의와 쌍조건문, 연역적 추론, 직접증명과 간접증명, 공준체계의 이해, 정리 증명에 사용된 공리들, 증명에서의 공리와 정리의 사용 등을 50여쪽을 할애하여 다루어 이 후에서의 증명은 모두 이 내용들을 활용함으로써 교과 내용의 흐름에 논리적인 간격이 없도록 하였다.

일반으로, 미국에서 사용하는 교과서는 대개 논리 부분을 강조하고 있고, 그 활용을 철저하게 하도록 하여 수학적 내용 학습에 적당한 이론 전개를 하도록 하고 있지 않다. 결국 문제해결을 논리적으로 이끌어 나갈 수 있도록 학습하는 것은 이들을 바탕으로 하여 창의적인 사고력도 키울 수 있게 된다.

이제 일본의 중학교 교과서에서 증명에 관한 부분을 살펴보자.

일본에도 여러 종류의 교과서가 있지만 내용은 대개 비슷하므로 다음의 2종류의 교과서만 살펴본다.

새로운 수학 2, 3(磯川幸直 외 27인, 1993)에서는 중학교 2학년의 도형 부분에서 삼각형의 내각의 합이 180° 임을 앞에서 배운 평행선과 각의 내용을 이용하여 밝히고, 이와 같이 경험이나 실험에 의하지 않고 이제까지 배운 성질들을 근거로 하여 잘 정리하여 나타내는 것을 증명이라고 하였다. 그리고 증명의 전략에 대하여 보기를 들어 설명을 하였지만 증명 방법에 대하여는 아무런 언급도 없이 많은 증명을 하고 있다. 계속하여 3학년 교과서에서도 많은 증명을 하고 있는데 직접증명과 함께 간접증명도 사용하고 있다. 또, 수학 2년, 3년(飯島康男 외 26인, 1993)에서도 중학교 2학년의 도형 부분에서 도형과 증명이라는 장을 두어 증명, 증명의 구성, 합동조건과 증명의 진행 방법에 대하여 서술하였는데 이곳에서도 테이프를 접어서 만들어진 삼각형이 이등변삼각형임을 보이는 예를 들어 이치를 따라 어떤 사항이 옳다는 것을 밝히는 것을 증명이라고 하였다. 그리고 증명의 구성에서 증명의 보기를 들어 그 흐름에 대하여 설명하였고, 합동조건을 사용하여 증명의 진행 방법을 예를 들어 보였다. 다음에 도형의 닮음에서와 3학년의 도형 부분에서는 간접증명도 함께 사용하고 있다.

이상에서 살펴본 일본의 중학교 수학 교과서에서의 증명의 취급은 현행 우리 나라의 중학교 수학 교과서에서의 증명의 취급과 거의 같으므로 특별히 언급할 새로운 내용이 없다.

3. 제 언

(1) 증명 방법(양식)의 이해

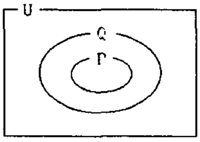
중학교에서 처음 취급하기 시작하여 특별한 설명 없이 고등학교까지 계속 사용하고 있는 직접증명과 간접증명의 증명 방법이 타당한 증명 방법이라는 것을 논리를 배우지 않은 학생들이 벤 다이어그램을 이용하여 직관적으로라

도 이해하여 증명을 원활히 할 수 있도록 하게 하기 위하여 다음과 같은 내용의 지도를 제시한다.

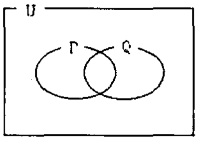
가정이 p이고 결론이 q인 명제「p이면 q이다」가
(1) 사람이면 동물이다.
(2) 남자이면 학생이다.
(3) 유리수이면 정수이다.
(4) 곤충이면 식물이다.
(5) 정삼각형이면 세 변의 길이가 같다.

로 주어졌을 때, 가정 p에 해당하는 집합을 P, 결론 q에 해당하는 집합을 Q라고 하여 P, Q 사이의 벤 다이어그램을 나타내면 각각 다음과 같다.

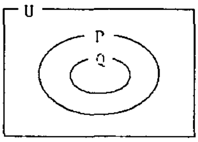
(1)



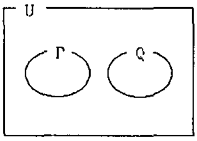
(2)



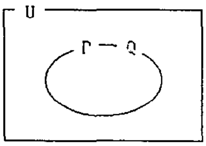
(3)



(4)



(5)

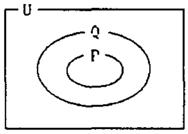


특히 위의 명제에서 (1)의 경우를 살펴보면, 명제 (1)은 항상 참인 명제이고, 이 때 가정과 결론에 해당하는 집합 P, Q사이에는 $P \subset Q$인 관계가 성립한다.

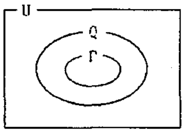
일반적으로, 가정이 p, 결론이 q인 명제에서 p, q에 해당하는 집합을 각각 P, Q라고 할 때「p이면 q이다」가 참(항진)이면 $P \subset Q$이고, 거꾸로 $P \subset Q$이면「p이면 q이다」가 참(항진)이다.

명제 $p \rightarrow q$가 참(항진)일 때 $p \Rightarrow q$로 나타내기로 하고, 이들 관계를 벤 다이어그램을 사용하여 다시 나타내면 다음과 같다.

$p \Rightarrow q$ 이면

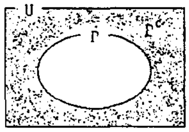


거꾸로



이면 $p \Rightarrow q$

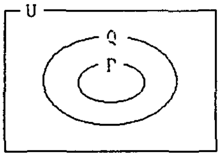
또, 앞의 (1)~(5)의 명제에서 가정 p의 부정 $\sim p$는「사람이 아니다」,「남자가 아니다」, … 로 이것에 해당하는 집합은 명제 p에 해당하는 집합 P의 여집합 P^c로 그 벤다이어그램은 위의 그림과 같다.

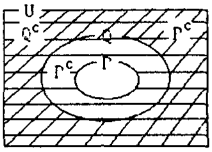


여기서 명제 $p \Rightarrow q$ 에 대하여 p, q에 해당하는 집합을 P, Q라고 할 때,

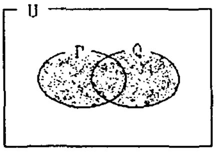
$$p \Rightarrow q \text{ 곧, } P \subset Q \text{이면 } Q^c \subset P^c \text{에서}$$
$$\sim q \Rightarrow \sim p$$
$$\sim q \Rightarrow \sim p \text{ 곧, } Q^c \subset P^c \text{이면 } P \subset Q \text{에서}$$
$$p \Rightarrow q$$

임을 알 수 있으며, 이들 관계를 벤 다이어그램으로 살펴보면 다음 그림과 같다.

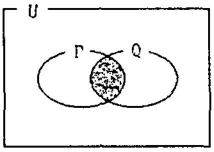




또, 명제 p, q에 해당하는 집합 P, Q를 사용하여 명제 「p 또는 q」, 「p이고 q」를 나타내는 집합을 각각 $P \cup Q$, $P \cap Q$로 나타내기로 하자.



p 또는 q



p 이고 q

명제 p에 대하여 「p 또는 $\sim p$」는 항상 참인 명제이고 「p이고 $\sim p$」는 항상 거짓인 명제인데, 이 때 p에 해당하는 집합 P와 $\sim p$에 해당하는 집합 P^c에 대하여 「p 또는 $\sim p$」를 나타내는 집합 $P \cup P^c$과 「p이고 $\sim p$」를 나타내는 집합 $P \cap P^c$ 에 대하여

$$(P \cap P^c)^c = \emptyset^c = U$$

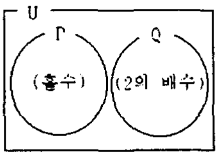
$$(P \cup P^c)^c = U^c = \emptyset,$$

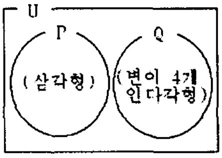
이므로 항상 참인 명제를 나타내는 전체 집합의 여집합은 항상 거짓인 명제를 나타내는 공집합과 같고 그 역도 성립함을 알 수 있다.

명제 「p이고 q이다」가 이를테면, 「n은 홀수이고 n은 2의 배수이다」 「도형 F는 삼각형이고 도형 F는 변이 4개인 다각형이다」로 주어졌다면, 이를 두 명제는 항상 거짓이고, p에 해당하는 명제 「n은 홀수」, 「도형 F는 삼각형」에 대하여 q에 해당하는 명제 「n은 2의 배수」, 「도형 F는 변이 4개인 다각형」을 나타내는 집합 Q는 명제 p를 나타내는 집합 P의 여집합 P^c에 속하므로

$$P \cap Q \subset P \cap P^c = \emptyset$$

이다. 이들을 벤 다이어그램을 이용하여 나타내면 다음과 같다.





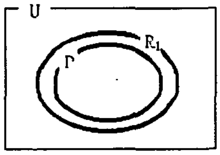
위의 내용에서 명제 「p이고 q이다」가 항상 거짓이면 명제 p, q를 나타내는 집합 P, Q에 대하여 $P \cap Q = \emptyset$ 이고, 거꾸로 명제 p, q를 나타내는 집합 P, Q에 대하여 $P \cap Q = \emptyset$ 이면 명제 「p이고 q이다」는 항상 거짓임을 알 수 있다.

이제 위에서 알아본 명제의 참, 거짓과 그에 관련된 집합의 벤다이어그램을 이용하여 중학교에서 사용하고 있는 직접증명과 간접증명(귀류법)이 올바른 추론에 의한 증명이라는 것을 직관적으로라도 알아보자.

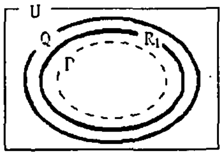
우선 직접증명에서 기본적으로 사용하는 추론 ($p \Rightarrow r_1$이고 $r_1 \Rightarrow q$)이면 $p \Rightarrow q$가 성립함을 알아보자.

위의 $p \Rightarrow r_1 \Rightarrow q$에서 p, r_1, q에 해당하는 집합을 각각 P, R_1, Q라고 하자.

(i) 우선, $p \Rightarrow r_1$에서 p, r_1에 해당하는 집합 P, R_1이고 그 벤다이어그램은 오른쪽 그림과 같고,

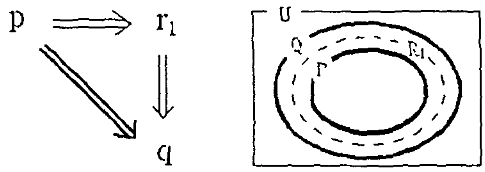


(ii) 다음에 $r_1 \Rightarrow q$에서 r_1, q을 해당하는 집합 R_1, Q의 관계는 $R_1 \subset Q$이고, 그 벤다이어그램은 오른쪽 그림



과 같다.

따라서 위의 (i), (ii)로부터 p, q에 해당하는 집합 P, Q사이에는 $P \subset Q$인 관계가 성립하게 되어 $p \Rightarrow q$임을 알 수 있으며, P, R_1, Q 사이의 벤 다이어그램은 다음의 오른쪽 그림과 같다.



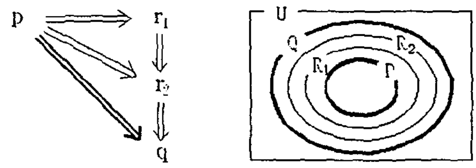
같은 방법으로

$$(p \Rightarrow r_1 \text{이고 } r_1 \Rightarrow r_2 \text{고 } r_2 \Rightarrow q)$$

이면, $p \Rightarrow q$임을 알아보자. 여기서 p, r_1, r_2, q에 해당하는 집합을 각각 P, R_1, R_2, Q하고 하여 이들 사이의 관계를 알아보면

$$P \subset R_1 \subset R_2 \subset Q$$

가 성립하며, 이들을 나타낸 벤다이어그램은 다음의 오른쪽 그림과 같다. 따라서, $P \subset Q$이고 $p \Rightarrow q$임을 알 수 있다.



일반으로 $p \Rightarrow q$을 밝히기 위하여 다음의 명제

$$p \Rightarrow r_1,\ r_1 \Rightarrow r_2,\ \cdots,\ r_n \Rightarrow q$$

를 차례로 밝혔을 경우에 이 사실로부터 결국 $p \Rightarrow q$라고 할 수 있는 것은

$$p,\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ q$$

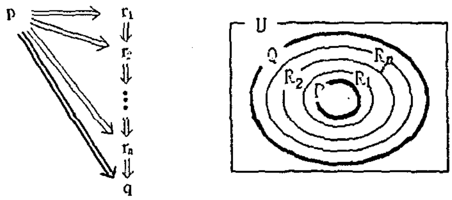
에 해당하는 집합을 각각

$$P,\ R_1,\ R_2,\ \cdots,\ R_n,\ Q$$

라 할 때 이들 사이에는

$$P \subset R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R_n \subset Q$$

인 관계가 성립하며 이 때의 벤 다이어그램은 다음의 오른쪽 그림과 같다. 따라서, $P \subset Q$이고 $p \Rightarrow q$임을 알 수 있다.



위의 내용에 의하면 앞에서 언급한 증명의 과정에서

$$p \Rightarrow p_1,\ p_1 \Rightarrow p_2,\ \cdots,\ p_6 \Rightarrow q$$

을 차례로 밝힌 것은 결국 $p \Rightarrow q$를 밝힌 것이라는 것을 알 수 있다.

같은 방법으로 증명에서 기본적으로 사용하는 다음 추론이 타당함을 보일 수 있다.

$[(p \rightarrow q)$이고 $p] \Rightarrow q$

$[(p \rightarrow q)$이고 $\sim q] \Rightarrow \sim p$

$[(p$ 또는 $q)$이고 $\sim p] \Rightarrow q$

$\sim(p$ 또는 $q) \Leftrightarrow \sim p$이고 $\sim q$

$\sim(p$이고 $q) \Leftrightarrow \sim p$ 또는 $\sim q$

$(p$이고 $q) \Rightarrow p$

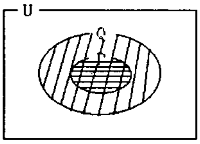
$p \Rightarrow (p$ 또는 $q)$, $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

이제 명제「$p \rightarrow q$」가 참임을 증명하는 대신에 간접증명(귀류법)으로 왜 명제「p이고 $\sim q$」가 항상 거짓임을 밝혀도 되는 것인가에 대하여 알아보자.

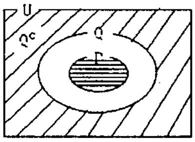
명제 $p \rightarrow q$가 항상 참인 경우에 p, q에 해당하는 집합 P, Q와 이 때의 집합 P, Q^c에 대한 관계를 살펴보자.

우선 $p \Rightarrow q$ 곧 $P \subset Q$인 경우에는 P, Q^c

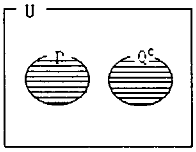
사이의 관계 $P \cap Q^c = \emptyset$ 에서「 p 이고 $\sim q$ 」가 항상 거짓(모순)이며 이들을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



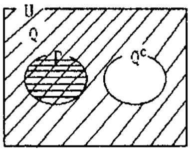
이면



또 거꾸로 명제 「 p 이고 $\sim q$ 」가 항상 거짓(모순)인 경우 곧 $P \cap Q^c = \emptyset$ 인 경우에는 P, Q 사이의 관계 $P \subset Q$ 에서 $p \Rightarrow q$ 이고 이들을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



이면



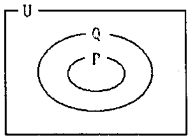
따라서, 명제「 $p \rightarrow q$ 」가 항상 참임을 증명하는 것은 명제「 p 이고 q 가 아니다」가 항상 거짓(모순)임을 증명하는 것과 같다.

여기서 명제「 $p \rightarrow q$ 」가 참임을 증명하는 대신에 명제「 $\sim p$ 이고 q 」,「 p 이거나 $\sim q$ 」, … 등이 항상 거짓(모순)임을 증명하는 것은 타당하지 않다는 것은 위와 같이 벤다이어그램을 이용하면 쉽게 알 수 있다. 그런데 명제 $p \rightarrow q$ 가 항상 참일 때, 곧 p, q 에 해당하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 일 때,

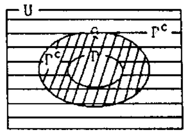
$$P \subset Q \Leftrightarrow P \cap Q^c = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow (P \cap Q^c)^c = \emptyset^c \Leftrightarrow P^c \cup Q = U$$

에서 $p \Rightarrow q$ 이면 명제「 $\sim p$ 또는 q 」가 항상 참이고 거꾸로 이 역도 성립함을 알 수 있다.



$P \subset Q$ ($p \Rightarrow q$)



$P^c \cup Q$ ($\sim p$ 또는 q)

위의 사실을 이용하면, 드 모르간의 법칙을 벤 다이어그램으로 알게 하여, 앞에서 언급한

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ 또는 } b = 0$$

의 증명 방법을 이해하게 할 수 있다. 곧

「 $ab = 0 \Rightarrow (a = 0$ 또는 $b = 0)$ 」

을「 $p \Rightarrow (q$ 또는 $r)$ 」로 나타내고, p, q, r 을 나타내는 집합을 각각 P, Q, R 이라고 하면

$$[p \Rightarrow (q \text{ 또는 } r)] \Leftrightarrow P \subset (Q \cup R)$$

에서

$$P \subset (Q \cup R) \Leftrightarrow P^c \cup (Q \cup R) = U$$

$$\Leftrightarrow (P^c \cup Q) \cup R = U$$

[또는 $(P^c \cup R) \cup Q = U$]

$$\Leftrightarrow (P \cap Q^c)^c \cup R = U$$

[또는 $(P \cap R^c)^c \cup Q = U$]

$$\Leftrightarrow (P \cap Q^c) \subset R$$

[또는 $(P \cap R^c) \subset Q$]

$\Leftrightarrow$ (p 이고 $\sim q$) $\Rightarrow r$

[또는 (p 이고 $\sim r$) $\Rightarrow q$]

이므로 명제 $p \rightarrow (q$ 또는 $r)$ 이 항상 참인 명제임을 밝히는 것은 명제

(p 이고 $\sim q$) $\rightarrow r$ [또는 (p 이고 $\sim r$) $\rightarrow q$]

가 항상 참인 명제를 밝히는 것과 같다. 곧

$ab = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$ 이다.

를 증명하기 위해서는

$ab = 0$ 이고 $a \neq 0$ 이면 $b = 0$ 이다

[또는 $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$ 이면 $a = 0$ 이다]

를 밝히면 됨을 알 수 있다.

또, 명제 「 (p 또는 q) $\rightarrow r$ 」이 참인 명

제임을 밝히기 위해서는

$[(p \text{ 또는 } q) \rightarrow r] \Leftrightarrow (P \cup Q) \subset R$

에서

$$(P \cup Q) \subset R \Leftrightarrow (P \cup Q)^c \cup R = U$$
$$\Leftrightarrow (P^c \cap Q^c) \cup R = U$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(P^c \cup R) \cap (Q^c \cup R) = U$$
$$\Leftrightarrow P^c \cup R \subset U \text{ 이고}$$
$$Q^c \cup R \subset U$$
$$\Leftrightarrow P \subset R \text{ 이고 } Q \subset R$$
$$\Leftrightarrow p \Rightarrow r \text{ 이고 } q \Rightarrow r$$

이므로 명제 $[(p \text{ 또는 } q) \rightarrow r]$이 항상 참인 명제임을 밝히는 것은 명제 $p \rightarrow r$과 명제 $q \rightarrow r$이 모두 항상 참임을 밝히는 것과 같다. 곧, $a=0$ 또는 $b=0$ 이면 $ab=0$ 이다
를 증명하기 위해서는

$a=0$ 이면 $ab=0$ 이고, $b=0$ 이면 $ab=0$ 이다

를 밝히는 것과 같음을 알 수 있다.

(2) 증명의 전략

붓과 페인트는 화가가 작품을 창작하는데 사용하는 도구일 뿐이 듯이 앞에서 알아 본 증명의 양식은 증명을 창작하는 데 대한 도구일 뿐이다. 곧 이들 도구를 갖춘 것과 증명을 완성하는 것은 별개의 것이다.

증명의 전략에 대하여 Velleman. D. J.(1994)는 증명을 조각그림 맞추기 퍼즐에 비교하였다. 조각그림 맞추기 퍼즐에서 조각그림을 맞추기 위한 특별한 법칙은 없지만 적당한 전략 이를테면 가장자리부터 차례로 메꾸어간다든가 또는 특수한 부분의 모양이나 색깔을 살펴서 맞추어 나가다 보면 갑자기 큰 일부분이 완성되기도 하며 전체의 모양을 짐작할 수 있게 되기도 하여 이렇게 계속해 나가면 조각그림 맞추기를 완성할 수 있듯이 증명을 완성해 나가는 과정도 이와 비슷하다고 하였다.

또 Causey. R. L.(1994)는 증명 과정을 발견할 수 있는 법칙이 있는 것은 아니지만 증명 과정을 구성하는데는 앞에서 열거한 증명의 양식들이 유용한 역할을 한다고 하였고 그 사용에 대한 일반적인 사항을 열거하였다. 그리고 어떤 목표 q를 증명하기 위해서는 q를 다시 쉽게 해결할 수 있는 부분적인 목표 $q_1, q_2, \cdots, q_n$으로 나누어 이들을 해결한 후에 q를 해결하는 전략에 대하여 언급하였다.

그리고 Solow. D.(1990)는 앞에서 말한 증명양식의 각 경우마다 그 경우가 사용될 수 있는 조건들을 들었고 그 활용에 대하여도 언급하였다.

이제 중학교 수학에서 취급하고 있는 증명에 대한 전략을 제시하여 보자.

증명을 처음 접하게 되면은 대개는 어디서부터 어떻게 시작을 하여야 할 지 모르겠다는 말을 자주 듣게 된다. 여기서는 Bittinger. M. L.(1982)를 참조하여 증명의 전략을 제시한다.

증명을 하고자 하는 문장(명제)이 주어지면 우선 그 명제를 수학에서 사용하는 기호(가능하면 논리적인)를 사용하여 내용을 정리하는 것이 좋다. 그러나 이와 같은 기호를 사용하여 정리한 것으로 증명이 완성된 것은 아니다.

이제 주어진 명제가 명제 $p \Rightarrow q$의 꼴로 정리되었다면 참인 가정 p로부터 참인 명제 q를 어떻게 연역해낼 것인가가 문제이다.

앞에서 말했듯이 일반으로 p에서 q에 도달하게 하는 연역에서 왕도는 없다. 그러나 도움이 될 수는 있는 경우도 있으므로 그러한 경우에 대하여 살펴보자.

우선 증명의 전략으로 유추법(전향적 구성)을 들어보자. 이를테면 명제 「n이 짝수이면 n^2도 짝수이다」의 증명을 구성해 보자.

n이 짝수라고 하자. 그러면 어떤 자연수 k에 대하여 $n=2k$이다. 따라서 $n^2=2(2k^2)$이

고 $2k^2$은 자연수이다. 그러므로 n^2은 짝수이다. 곧

$$
\begin{aligned}
n : \text{짝수} &\Rightarrow n=2k\ (k\text{는 자연수}) \\
&\Rightarrow n^2=2\ (2k^2) \\
&\Rightarrow n^2 : \text{짝수} \\
\therefore\ n : \text{짝수} &\Rightarrow n^2 : \text{짝수}
\end{aligned}
$$

위의 증명은

$$p \Rightarrow r_1 \Rightarrow r_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow r_n \Rightarrow q$$

를 사용하여 $p \Rightarrow q$를 밝힌 것이다.

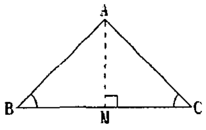
특히, 위의 증명을 이용하면 명제 「m이 홀수이면 m^2도 홀수이다」의 증명을 쉽게 할 수 있다. 따라서 증명을 완성하는 데 대한 중요한 전략 중의 하나는 다른 증명으로부터 착상(아이디어)를 얻는 것이고 이와 같은 착상은 많은 연습과 서로 다른 여러 종류의 증명을 실행해 봄으로써 얻을 수 있다.

다음에 분석적 과정(후향적 구성)의 전략을 알아 보자. 이 전략은 $p \Rightarrow q$를 증명하기 위하여 q에서 시작을 하여 $r \Rightarrow q$인 r을 구하고, 다시 $s \Rightarrow r$인 s를 구하고, 이 때 $p \Rightarrow s$가 성립한다면 $p \Rightarrow q$가 증명된 것이 되는 전략이다.

이를테면 $\triangle ABC$에서

$\overline{AB}=\overline{AC} \Rightarrow \angle B=\angle C$

의 증명을 이와 같은 전략으로 하여 보자.



우선 $\angle B$와 $\angle C$는 이 두 각이 합동인 삼각형에서 서로 대응하는 각이면 서로 같을 것이고, 이 때, A로부터 BC의 중점 M을 잇는 선분으로 $\triangle ABM$, $\triangle ACM$을 생각할 수 있다. 여기서 후향적 구성을 하면

$\triangle ABN \equiv \triangle ACM \Rightarrow \angle B=\angle C$

$$\left\{\begin{array}{l}(i)\ \overline{AM}\ (\text{공통}) \\ (ii)\ \overline{BM}=\overline{CM}\ (M\text{이 중점}) \Rightarrow \triangle ABM \equiv \triangle ACM \\ (iii)\ \overline{AB}=\overline{AC}\ (\text{가정})\end{array}\right.$$

곧, 위에서 (iii), (ii), (i)의 단계로 증명을 해 나가면 $\triangle ABN \equiv \triangle ACM$과 $\angle B=\angle C$를 연역할 수 있다.

이제 결론에서부터 시작해서 가정에 도착하도록 하여 증명을 하는 증명의 전략, 곧

$$q \ \underset{?}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}}\ s \ \underset{?}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}}\ \cdots \ \underset{?}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}}\ p$$

에 대하여 알아보자. 이때, 일반으로 $q \Rightarrow p$이면 $p \Rightarrow q$가 항상 참인 것은 아니므로 위에서의 거꾸로의 방향 $\underset{?}{\Longleftarrow}$ 에 유의해야만 한다.

이 경우의 전략에 대한 보기 $f(x)=2x+1$일 때, $|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<10$인 $\delta>0$의 값을 알아보자.

$$
\begin{aligned}
|f(x)-1|<10 &\Rightarrow |(2x+1)-1|<10 \\
&\Rightarrow |2x|<10 \\
&\Rightarrow -10<2x<10 \\
&\Rightarrow -5<x<5 \\
&\Rightarrow |x|<5
\end{aligned}
$$

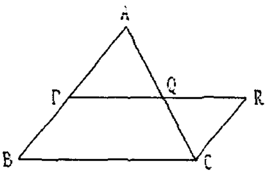
여기서 $\Rightarrow$의 각 단계에서 그 역의 방향 $\Leftarrow$을 사용해도 항상 성립함을 알 수 있다. 곧 $\delta=5$에 대하여

$$|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<10$$

끝으로 $p \Rightarrow q$의 증명에서 q를 얻을 수 있는 여러 경우를 생각하여 각 경우에서의 증명을 생각해보는 전략에 대하여 알아보자.

이를테면 앞에서 보기로 들었던 명제 곧, 다

음 그림과 같은



$\triangle ABC$에서
「$\overline{AB} : \overline{PB}$이면
$= \overline{AQ} : \overline{QC}$
$\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 이다」

의 증명에서 앞에서는 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$를 보이기 위하여 $\triangle APQ \backsim \triangle ABC$를 보였다. 그러나 위의 그림에서와 같이 C에서 $\overline{BA}$에 평행한 직선을 그어 직선 PQ와 만난 점을 R이라고 하면 $\square PBCR$이 평행사변형이 됨을 보여 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$임을 밝힐 수도 있다.

곧, 위의 그림에서
$\triangle APQ \backsim \triangle CRA$이므로
$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{RC}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$. 그런데 가정에서 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$
이므로

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{RC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \quad \therefore \overline{RC} = \overline{PB}$$

$\square PBCR$에서 $\overline{PB} = \overline{RC}$, $\overline{PB} \parallel \overline{RC}$이므로
$\square PBCR$은 평행사변형이다.

$$\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$$

일반적으로 수학교과서에 실려 있는 증명을 읽을 때 우리는 그 증명이 성공적으로 되어 표현되기 이전에 얼마나 많은 좌절과 성공하지 못한 시도가 있었었는지를 알지 못한다.

실제로 증명이 완성되기까지는 수많은 좌절과 시행착오가 있었으며 대개의 경우 이와 같은 많은 증명에 대한 시행착오가 증명에 대한 좋은 전략 자체가 되고 있다. 따라서, 증명을 완성하기 위해서는 무언가를 해 보고, 여러 방법으로 접근도 시도하면서 할 수 있는 모든 방법을 이용하면서 노력하여야만 한다.

4. 결 론

중학교 수학에서 증명을 처음 다루면서 증명 방법과 증명의 전략에 대한 취급이 너무나 미약하기 때문에 원활한 운용이 어렵게 되어 있다.

실제로 논리를 취급하지 않고서 증명 방법 양식에 대한 엄밀한 논의를 한다는 것은 어려운 일이지만, 중·고등학교 수학에서 많은 증명을 다루고 있으므로 증명 방법에 대한 이해를 도울 수 있는 방법의 제시는 필요한 것이다. 또, 증명 방법에 따른 증명의 구성을 완성시키기 위하여 증명의 전략에 대한 지도도 충분히 제시되어야만 한다.

이와 같은 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 면에 보강이 요구된다.

(1) 증명에서의 증명 방법은 방법으로 만의 소개가 아니고, 이미 배운 벤 다이어그램을 사용하여 그 증명법이 타당한 추론을 이용한 방법임을 직관적으로라도 이해하게 하여 활용에 도움을 주어야 한다.

(2) 증명 부분은 보다 많은 지면을 할애하여 충분한 보기를 제시하고 그 보기를 통하여 증명 전략을 이해하도록 하게 한다.

(3) 가능하다면 논리를 중학교에서부터 취급하여 증명 및 수학의 구성에 대한 올바른 이해를 할 수 있도록 하고 그 활용을 원활하도록 하게 하여야만 한다.

참 고 문 헌

교육부 (1992). 중학교 교육과정(제6차 교육과정, 교육부 고시 제1992-11호).

구광조 외 1인 (1996). 중학교 수학2, 3, 서울: 지학사.

김연식 외 1인 (1996). 중학교 수학2, 3, 서울: 동아출판사.

김응태 외 3인 (1996). 중학교 수학2, 3, 서울: 한샘출판사(주).

김호우 외 3인 (1996). 중학교 수학2, 3, 서울:

(주)지학사.
박두일 외 2인 (1996). 중학교 수학2, 3, 서울: (주)교학사.
박배훈 외 1인 (1996). 중학교 수학2, 3, 서울: (주)교학사.
오병승 (1996). 중학교 수학2, 3, 바른교육사.
최용준 외 1인 (1996). 중학교 수학2, 3, 서울: (주)천재교육.
磯川幸直 외 27인 (1993). 새로운 수학 2, 3, 東京書籍.
飯島康男 외 26인 (1993). 수학 2, 3, 啓林館.
Bittinger, M. L. (1982). *Logic, Proof, and Sets*, Addison-wesley Publishing Company.
Causey, R. L. (1994). *Logic, Sets, and Recursion*, Jones and Bartlett Publishers.
Eicholz, R. E. 외 9인 (1991), *Addison-wesley Mathematics* (Grade 7, Grade 8), Addison-wesley Publishing Company.
Eves, H. 외 1인 (1964). *An introduction to the foundations and fundamental concepts of mathematics*, Holt, Rinehart and Winston.
Henderson, K. B. 외 2인 (1968). *Modern Geometry*, Mcgraw-Hill Book Company.
Jacobs, H. R. (1987). *Geometry*, W. H. Freeman and Company.
Keenan, E. P. 외 1인 (1990). *Integrated mathematics* (course I, course II), AMSCO School Publications. Inc.
Rising, G. R. 외 4인 (1989). *Unified mathematics* (book 1, book 2), Houghton Mifflin Company.
Serra, M. (1993). *Discovering Geometry*, Key Curriculum Press.
Solow, D. (1990). *How to read and to proofs*, John Wilely & Sons.
Ulrich, J. F. (1987). *HBJ Geometry*, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.
Velleman, D. J. (1994). *How to prove it*, Cambridge university press.

A Note on Teaching of Proof in Middle School Mathematics

Kim, Heung Ki
DanKook Univ. 8 Hannam-Dong, Yongsan-ku, Seoul 140-714, Korea;
email: hkkim@ns.dankook.ac.kr

We prove many statements in middle and high school mathematics, so it is necessary to have some method for understanding the modes of proof. But it is hard to discuss about the modes of proof without knowing logics. Venn-diagrams can be used in a great variety of situations, and it is useful to the students unfamiliar with logical procedure.

Since knowing a mode of proof that could be used may still not guarantee success of proof, it is also necessary to illustrate many cases of proof strategies.

To achieve the above reguirements,

(1) Even though intuition, the modes of proof used in middle school mathemactics should be understood by using venn-diagrams and the students can use the right proof in the right statement.

(2) We must illustrate many kinds of proof so that the students can get the proof stratigies from these illustrations.

(3) If possible, logic should be treated in middle school mathematics for students to understand the system of proof correctly.