

# 인벌류우트-트로코이드 치형을 갖는 타원계 엽형기어의 최소잇수에 관한 연구

최 상 훈\*

## Minimum Tooth Number of Elliptical Gears with Involute-Trochoidal Profile

Sang Hoon Choi\*

### ABSTRACT

This present paper describes a mathematical model of profile shifted elliptical gears, and this model is based on the concepts of envelope theory and conjugate geometry between the blank and the straight-sided rack cutter. The geometric model of the rack cutter includes working regions generating involute curves and fillets for trochoidal curves, and furthermore the addendum modified coeff. is considered for avoiding undercutting. The addendum modified coeff. is changed linearly along with pitch curves and must be the same absolute value at both major semi-axis and minor semi-axis.

If undercutting is at all pronounced, the undercut tooth not only are weakened in strength, but lose a small portion of the involute adjacent to the base circle, then this loss of involute may cause a serious reduction in the length of contact.

A very effective method of avoiding undercutting is to use the so-called profile shifted gearing. Non-undercutting condition is examined with the change of eccentricity and addendum modified coeff. in elliptical gears and then the minimum number of tooth is proposed not to generate undercutting phenomenon.

**Key Words** : elliptical gear(타원계 엽형기어), profile shifted gear(전위기어), addendum modified coeff.(전위계수), contact lines(교선군), envelope(포락선), undercutting(언더컷), minimum tooth number(최소잇수)

### 1. 서 론

비원형기어는 진원이 아닌 임의의 변위곡선을 이용하여 크랭크-슬라이더, 캠기구와 같이 부등속회전운동을 얻을 수 있는 기계요소이다. 이(齒)가 직접 맞물려 회전하므로 운동을 확실하게 전달할 수 있는 장점을 가지고 있어, 자

동화기구, 급속귀환장치, 펌프 및 유량계에 효과적으로 사용되고 있지만, 설계 및 가공상의 어려움때문에 광범위하게 응용되고 있지는 못하다.

타원계 엽형기어는 비원형기어의 한 형태로 타원을 피치곡선으로 갖는 기어이고, 유량계에 사용되는 2엽형 타원기어인 오발 기어(oval gear)에서 사용예를 찾아볼 수

\* 건국대학교 기계설계학과

있다.

타원기어에 대해서는 1888년 Grant에 의해 연구가 처음으로 시작되었다.<sup>(1)</sup> 지금까지 다루어진 대부분의 주제는 피치곡선의 기하학적 특성에 관한 것이었으며,<sup>(2)</sup> 치형에 관해서는 Litvin에 의해 기하학적 해석이 이루어졌지만, 이것은 기어필렛부에 대해서는 취급하지 않아 치형의 완전한 수학적 모델이 이루어지지는 않았다.<sup>(3)</sup>

타원기어의 가공에 관해서는 일본을 중심으로 비교적 많은 연구가 수행되었는데, 窪田雅男, 横山良明 등이 보조기구에 의한 치절장치의 개발에 대하여 연구하였으며,<sup>(4-7)</sup> 최근에는 CAD와 CNC 가공을 위한 프로그램의 개발에 연구가 이루어지고 있다.

국내에서는 타원기어의 이심율, 속도비 등의 피치곡선에 관한특징과 치절에 관한 연구가 되었지만, 치형의 해석에 관한 논의는 충분히 되어 있지 않다.<sup>(8,9)</sup>

타원기어의 경우에는 각 위치에 따라 이의 크기와 모양이 변하게 된다. 지금까지의 타원기어는 큰 힘을 받지 않는 운동을 전달하기 위한 목적이므로 많은 잇수의 기어가 사용되고 있지만, 잇수를 적게하려면 언더컷의 문제가 발생하게 된다. 언더컷이 발생하면 유효한 물림길이가 감소되므로 인하여 이의 강도가 아주 약하게 된다. 언더컷을 피하기 위한 가장 효과적인 방법은 치형을 전위시키는 것인데, 타원기어의 특성상 전위량을 장경부에는 (+), 단경부에는 (-)의 같은 크기로 주어야 하며, 전위량을 적당히 선택함으로써 같은 기초곡선에서 인벌류우트 곡선의 적당한 곳을 이용할 수 있을 뿐 아니라, 그 이두께를 임의로 조절할 수가 있어 강도상 유리한 치형을 설계할 수 있다.

본 연구에서는 먼저 랙커터의 경사부 및 필렛부를 모두 고려하여 치형의 이빨곡선, 이끝곡선과 인벌류우트 곡선 뿐만 아니라 트로코이드 곡선을 완전하게 표현할 수 있도록 타원기어의 치형을 모델링하였다. 치형의 수학적 모델은 먼저 직선치 랙커터를 매개변수 방정식으로 표현하고, 커터와 기어블랭크에 고정된 두 좌표계의 창성운동에 의해서 교선군을 얻고 랙커터의 형상이 전사되는 포락선을 물림조건식에 의해서 구했다. 이러한 모델링 방법은 커터 및 커터의 변위 설계, 가공 결과의 검토, 적합한 가공방법의 선택에 유용하게 쓰일 수 있다.<sup>(10)</sup>

또한 전위량을 피치곡선을 따라 선형적으로 변화하도록 주어 전위 타원기어를 설계하였고, 언더컷의 발생에 대한 조건을 유도하여 표준치형과 전위치형을 갖는 타원기어의 언더컷의 유무를 비교하였으며, 이심율과 전위량의 변

화에 따라 언더컷을 피할 수 있는 2엽과 3엽의 경우에 타원기어의 최소잇수에 대해서 검토하였다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 곡선의 맞물림

Fig.1과 같이 기준좌표계  $S_0(O_0X_0Y_0)$ 과 두 좌표계  $S_1(O_1X_1Y_1)$ ,  $S_2(O_2X_2Y_2)$ 를 잡고,  $S_1$ 좌표계에서 임의의 곡선을 매개변수  $u$ 의 함수로 나타내면

$$P_1(u) = x_1(u)i + y_1(u)j \quad (1)$$

여기서  $i$ 와  $j$ 는  $S_1$ 좌표계의 각 축방향의 단위벡터이다.

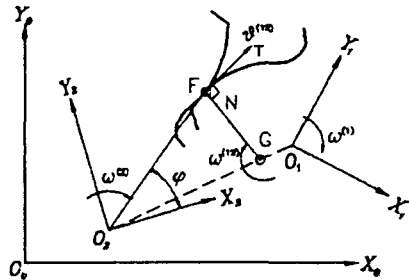


Fig. 1 Conjugate geometry between coordinate systems

이제 두 좌표계  $S_1, S_2$ 의 상대 운동에 의해서 곡선  $P_1$ 에 창성되는 곡선의 교선군은 다음과 같이 좌표변환에 의해서  $S_2$ 좌표계에서  $P_2$ 로 표현된다.

$$P_2 = H_2^1 P_1 \quad (2)$$

단, 행렬  $H_2^1$ 은 세 좌표계간의 운동의 관계에 의해 결정되며, 곡선  $P_1$ 의 임의의 점에서의 접선벡터와 법선벡터는 다음식과 같다.

$$T = T_x i + T_y j = \frac{dx_1}{du} i + \frac{dy_1}{du} j \quad (3)$$

$$N = T \times k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ T_x & T_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_y \\ -T_x \\ 0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

교선군으로부터 포락선을 얻기 위한 물림조건식, 즉  $u$ 와  $S_2$ 에서의 접점 F의 각변위  $\phi$ 의 관계는 접점에서의 법선벡터  $N$ 과 미끄럼속도벡터  $v^{(12)}$ 는 수직을 이루어야 하

므로,

$$f(u, \varphi) = N \cdot v^{(12)} = 0 \quad (5)$$

으로 구해지고, 마찬가지로 공통법선이 순간회전중심 G 점을 지나게 되므로 위식은 다음을 만족시키는 것과 같다.

$$\frac{X_1 - x_1(u, \varphi)}{N_x(u, \varphi)} = \frac{Y_1 - y_1(u, \varphi)}{N_y(u, \varphi)} \quad (6)$$

여기서  $X_1, Y_1$ 은 Fig.1에서의 순간회전중심 G의 좌표이다.

$S_1, S_2$ 를 랙커터와 블랭크에 각각 고정된 좌표계라고 하면 랙커터의 형상이  $S_2$ 에 전사되는 곡선, 즉 치형의 표현은 식(2)와 식(5) 또는 식(6)에 의해 구할 수 있다.<sup>(3,10,11)</sup>

### 2.2 언더컷의 해석

언더컷은 인벌류우트 곡선과 기어필렛부가 만나는 점에서 일치하는 접선을 갖지 못할 때, 즉 만나는 점이 특이점이 될 때 발생하게 된다. 이러한 조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.<sup>(3,12)</sup>

$$F(u, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & v_x^{(12)} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & v_y^{(12)} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

### 2.3 피치곡선의 기하학적 성질 (Fig.4 참조)

타원계 엽형기어의 피치곡선을  $r, \varphi$ 로 나타내면

$$r = \frac{D}{2} \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos N\varphi}$$

여기서  $N$ 은 엽수,  $D$ 는 축간거리이고, 이심율( $\varepsilon$ )은 초점거리를  $f$ 라고 할 때  $\varepsilon = 2f/D$ 가 된다. 피치곡선의 곡률이 (-)가 되지 않는 이심율의 한계값은 엽수가 2일 때 0.33, 엽수가 3일 때 0.13이다. 결국 이 값들은 랙커터로 이(齒)를 절삭할 수 있는 이심율의 한계이다.<sup>(8)</sup>

그리고 임의의 각  $\varphi$ 에서의 곡선의 길이  $S$ 는 다음식과 같다.

$$S = \int_0^\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

피치곡선의 기울기  $\tau$ 는

$$\tau = \tan^{-1}\left(r \frac{d\varphi}{dr}\right)$$

이고, 곡률반경은 다음과 같다.

$$\rho = \left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} / \left\{ r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r + \left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right) \right\}$$

일반적으로 타원계엽형기어는 한쌍의 기어가 서로 크기와 잇수를 동일하게 하므로, 이(齒)의 위치가 이미 정해져 있다고 할 수 있다. 즉, 장경부에 이끝면의 중심이 있으면 이것과 맞물리는 단경부에는 이밀면의 중심이 위치해야 한다. 또한 단경부에 이(齒)가 위치하고, 장경부에 빈 공간이 되는 것이 강도면이나 원활한 운동을 위하여 그 반대의 경우보다 유리하므로, 타원기어의 잇수는 다음식에 의해 구해진다.<sup>(9)</sup>

$$Z = N(3 + 2i) \quad \text{여기서 } i = 0, 1, 2, \dots$$

## 3. 전위 타원계 엽형기어의 설계

### 3.1 전위계수

타원기어의 맞물림은 일반적으로 그 관계가 정해져 있으므로, 단경부는 반드시 장경부와 맞물려야 한다. 따라서 타원기어에서의 전위량도 장경부와 단경부에서 같은 크기를 갖도록 설계하여야만 한다. 이렇게 함으로써 중심거리는 일정하게 되는 잇점이 있으며, 본 연구에서는 단경부에는 (-)의 전위를, 장경부에는 (+)의 전위를 선행적으로 변화시켰다. Fig.2는 전위치형을 창성하기 위한

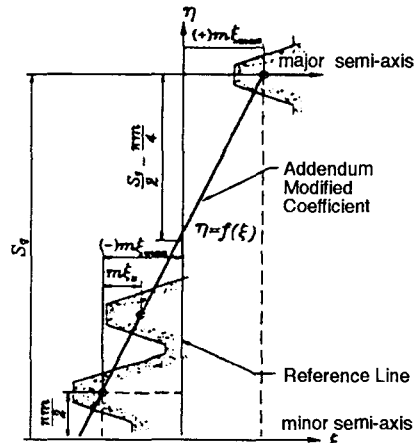


Fig. 2 Addendum modified coefficient

피치곡선의  $1/(2N)$ 과 맞물리는 랙커터의 형상을 도시한 것으로, 전위계수( $\xi$ )는 랙커터의 기준피치선( $\eta$  축)을 따라 변화하게 된다. 피치곡선의 단반경은  $\eta=0$ 에서, 장반경은  $\eta=S_q$ 일 때, 랙커터와 맞물린다.  $S_q$ 는 피치곡선 전체길이의  $1/(2N)$ 이다.

전위가 대칭이 될 수 있도록 Fig.2에 나타낸 바와 같이 최대 전위계수를  $\xi_{max}$  만큼 줄때,  $\xi$ 와  $\eta$ 의 관계는 모듈이  $m$ 이면

$$\eta = \frac{S_q/2 - \pi m/4}{\xi_{max}} \xi + \frac{S_q}{2} + \frac{\pi m}{4}$$

가 된다. 따라서 임의의  $\eta$ 에서의 전위계수  $\xi$ 는

$$\xi = \frac{\xi_{max}(\eta - S_q/2 - \pi m/4)}{S_q/2 - \pi m/4} \quad (8)$$

랙커터의 이웃한 이(齒)사이의  $X_1$ 방향의 거리 증가는

$$\xi_s = \xi_{max} \frac{\pi m}{S_q/2 - \pi m/4}$$

### 3.2 랙커터의 설계

랙커터의 형상은 Fig.3과 같이  $X_1$ 축과 압력각  $\alpha$  만큼 경사진 2개의 직선으로 인벌류우트 곡선을 창성하는 부분과 트로코이드 곡선을 만드는 반경  $z$ 의 필렛부로 이루어지고, 타원 기어의 이끝곡선과 이끝곡선을 이루는 수직 부분으로 구별할 수 있다. (직선 및 원호의 매개변수 방정식은 참고문헌[10] 참조)

#### (a) 이끝곡선(①,⑦)과 이밀곡선(④)

Fig.3에서 랙커터의 ①과 ⑦의 부분은 이끝곡선을 결정하고, ④부분은 이밀곡선을 창성하게 된다. 먼저 ①, ⑦부분의 랙의 좌표를 매개변수  $u$ 의 함수로 나타내면

$$\begin{aligned} P_1(u) &= x_1(u)\mathbf{i} + y_1(u)\mathbf{j} \\ &= m(1 + \xi)\mathbf{i} + \{u + \pi m(k+l)\}\mathbf{j} \end{aligned} \quad (9)$$

$$l = \begin{cases} 0 & \text{① 부분} \\ 1 & \text{⑦ 부분} \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

윗식에서  $k$ 는 단경에서부터의 이의 개수를 나타내고,  $u$ 의 범위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 0 \leq u \leq m(\pi/4 - \tan\alpha) & \quad \text{① 부분} \\ -m(\pi/4 - \tan\alpha) + \xi_s m \tan\alpha \leq u \leq 0 & \quad \text{⑦ 부분} \end{aligned}$$

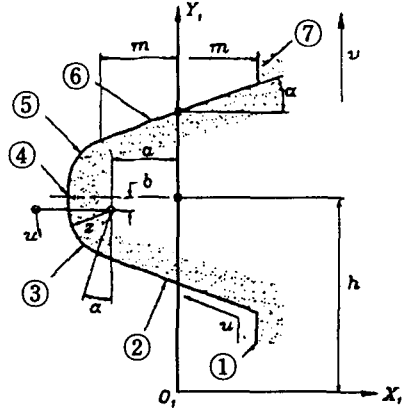


Fig. 3 Parametric representation of rack cutter

랙커터 ④부분의 매개변수 방정식은

$$\begin{aligned} P_1(u) &= x_1(u)\mathbf{i} + y_1(u)\mathbf{j} \\ &= -\{m(1 + \xi) + z(1 - \sin\alpha)\}\mathbf{i} \\ &\quad + \{u + \pi m(k+l) + \pi m/2\}\mathbf{j} \end{aligned} \quad (10)$$

이때의  $u$ 의 범위는 다음과 같다.

$$-m(\pi/4 - \tan\alpha) \leq u \leq m(\pi/4 - \tan\alpha)$$

접선벡터는 식(3)에 의해 구하면

$$\mathbf{T} = \frac{dx_1}{du}\mathbf{i} + \frac{dy_1}{du}\mathbf{j} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

이고, 법선벡터는 다음과 같이 유도된다.

$$\mathbf{N} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = [N_x N_y] = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

#### (b) 인벌류우트 부분

실제로 기어의 치형을 이루는 부분으로 랙의 ②과 ⑥부분은 인벌류우트를 창성한다. 타원기어에서는 두선에 의해서 창성되는 인벌류우트가 서로 대칭이 아니므로 두 경우를 모두 고려해야만 한다. ②(상부호)와 ⑥(하부호)의 표현은

$$\begin{aligned} P_1(u) &= (\mp u \cos\alpha + m\xi)\mathbf{i} \\ &\quad + (\text{usin}\alpha \mp \pi m/4 + h)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $h = k \times \pi m$  ( $k = 0, 2, 3$ )  
 $u$ 의 범위는 다음과 같다.

$$\frac{-m}{\cos\alpha} \leq u \leq \frac{m - z(1 - \sin\alpha)}{\cos\alpha} \quad \text{② 부분}$$

$$\frac{-m + z(1 - \sin\alpha)}{\cos\alpha} \leq u \leq \frac{m(1 + \xi)}{\cos\alpha} \quad \text{⑥ 부분}$$

법선벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{N} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = [N_x N_y] = \begin{Bmatrix} \sin\alpha \\ \pm \cos\alpha \end{Bmatrix}$$

(c) 트로코이드 부분

치형의 트로코이드 곡선은 랙커터의 필렛부인 ③, ⑤에 의해 생성되며, 이별류우트와 이밀곡선을 연결해 주는 부분이다.

③(상부호), ⑤(하부호)의 매개변수 방정식은

$$\mathbf{P}_1(u) = (-a - z\cos u + \xi m)\mathbf{i} + (h \mp b + z\sin u)\mathbf{j} \quad (12)$$

여기서  $a = m - z\sin\alpha$

$$b = \frac{\pi m}{4} - \frac{z}{\cos\alpha} - a \tan\alpha$$

u의 범위와 법선벡터는 다음과 같다.

$$-(\pi - \alpha) \leq u \leq 0 \quad \text{③ 부분}$$

$$0 \leq u \leq (\pi - \alpha) \quad \text{⑤ 부분}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \begin{Bmatrix} z\cos u \\ -z\sin u \end{Bmatrix}$$

3.3 물림 방정식

Fig.4에 나타낸 바와 같이 기준좌표계  $S_0(O_0X_0Y_0)$

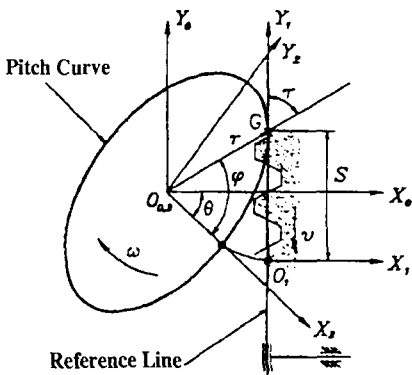


Fig. 4 Generation of elliptical gear and applied coordinate systems

와 랙커터의 좌표계  $S_1(O_1X_1Y_1)$ , 그리고 절삭되는 타원기어의 중심에 원점을 둔 좌표계  $S_2(O_2X_2Y_2)$ 를 잡는다. 타원기어의 피치곡선과 랙커터의 치절 기준선이 미끄럼이 없이 맞물려 움직인다고 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

우선  $S_0$ 와  $S_1$ 의 좌표계간의 변환행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_0^1 = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r(\varphi)\sin(\tau(\varphi)) \\ -S(\varphi) + r(\varphi)\cos(\tau(\varphi)) \end{Bmatrix}$$

$S_0$ 와  $S_2$ 간의 변환행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{R}_0^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_0^2 = \begin{Bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

이제  $S_1$ 와  $S_2$ 사이의 변환관계를 구하기 위해 먼저

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{P}_1 + \mathbf{d}_0^1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + d_{1x} \\ y_1 + d_{1y} \end{Bmatrix}$$

이고,  $\mathbf{P}_2$ 는

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{R}_0^2 \mathbf{P}_0 + \mathbf{d}_0^2$$

$$= \begin{Bmatrix} (x_1 + d_{1x})\cos\theta - (y_1 + d_{1y})\sin\theta \\ (x_1 + d_{1x})\sin\theta + (y_1 + d_{1y})\cos\theta \end{Bmatrix} \quad (13)$$

이렇게 구한  $\mathbf{P}_2$ 는 랙커터의 형상이  $S_2$ 에 표현된 교선군이고, 생성된 치형, 즉 포락선을 구하기 위한 조건식은 다음과 같이 유도된다.

앞서 기술한 물림조건식(6)을 만족하는  $u$ 와  $\varphi$ 의 관계를 구한다.

$$f(u, \varphi) = \frac{X_1 - x_1}{N_x} - \frac{Y_1 - y_1}{N_y} = 0 \quad (14)$$

여기서  $X_1 = 0, Y_1 = S(\varphi)$

윗식에서  $X_1, Y_1$ 는  $S_1$ 좌표계에서의 피치점(순간회전중심점)의 좌표이다.

벡터의  $\mathbf{P}_1$ 을 식(14)에 대입하여 정리해서 구한 각 경우의 물림조건식은 다음과 같다.

(a) 이끝곡선(①,⑦)

$$f(u, \varphi) = u - S(\varphi) + \pi m(k+l) \quad (15)$$

$$l = \begin{cases} 0 - \text{① 부분} \\ 1 - \text{⑦ 부분} \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots$$

(b) 이밑곡선(④)

$$f(u, \varphi) = u - S(\varphi) + \pi m(k+1) + \pi m/2 \quad (16)$$

(c) 인벌류우트 곡선(②,⑥)

$$f(u, \varphi) = u - \{S(\varphi) \pm \pi m/4 - h\} \sin \alpha \mp \xi m \cos \alpha \quad (17)$$

(d) 트로코이드 곡선(③,⑤)

$$f(u, \varphi) = (a + \xi m) \tan u + S(\varphi) - h \pm b \quad (18)$$

### 3.4 언더컷 방지를 위한 조건

언더컷이 가장 심하게 일어날 수 있는 부분은 곡률이 가장 큰 장경부이고, 이부분에 대해서만 확인한다. 전위를 주었을 경우에는 단경부에서는 그 만큼의 이의 언더컷이 조금 더 일어날 수 있지만 강도면에서 단경부보다는 장경부가 훨씬 위험하므로 무시할 수 있다. 따라서 언더컷 유무의 판별식은 인벌류우트 곡선을 창성하는 벡터의 경사면중 ②부분의 식(11)과 식(17)을 이용하여 구한다.

이제 언더컷을 피하기 위한 매개변수  $u$ 값을 구하기 위해 필요한 항을 먼저 구한다. 좌표계  $S_1, S_2$  대한 접촉점의 각각의 속도  $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= \omega r(\varphi) \cos \tau \mathbf{i} - \omega r(\varphi) \sin \tau \mathbf{j} \\ \mathbf{v}^{(2)} &= \omega \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{R} \times \omega \\ &= (\omega y_1 - \omega R_y) \mathbf{i} + (-\omega x_1 + \omega R_x) \mathbf{j} \end{aligned}$$

그리고 접촉점에서의 미끄럼속도벡터는

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(12)} &= \mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)} \\ &= \begin{Bmatrix} \omega \{-y_1 + S(\varphi)\} \\ \omega x_1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

이고, 뒷식에서  $\mathbf{R}$ 은  $O_2$ 점의  $S_1$ 좌표계에서의 좌표이다. 즉

$$\mathbf{R} = -r(\varphi) \sin \tau \mathbf{i} + \{S(\varphi) - r(\varphi) \cos \tau\} \mathbf{j}$$

절삭되는 타원기어를 일정한 각속도  $\omega$ 로 회전시키는 경우를 고려하면  $\omega = d\varphi / dt$ 이므로, 언더컷 유무를 판별하기 위한 조건은 식(7)에 의해 정리하면 다음과 같이  $\varphi$ 와  $u$ 의 관계를 얻는다.

$$u = \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ \sin^2 \alpha \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} \right\} + \frac{\xi m}{\cos \alpha} \quad (19)$$

## 4. 최소잇수의 결정

### 4.1 전위계수의 선택

모듈  $m$ 과 매개변수  $u$ 사이에는  $m = u \cos \alpha, \partial S / \partial \varphi$ 는 곡률반경  $\rho$ 이므로 식(19)는 다음과 같이 변형된다.

$$m = \frac{\rho}{(1-\xi)} \sin^2 \alpha \quad (20)$$

즉, 이심율과 전위계수의 변화에 따라 언더컷을 피하기 위해서 모듈은 뒷식에 의해 계산된 수치보다 작은 모듈을 사용하여 이(齒)를 절삭하여야만 언더컷을 피할 수 있다.

Fig.5와 Fig.6은 2엽과 3엽의 타원기어에서 이심율과 전위량에 따라 언더컷을 일으키지 않는 모듈의 변화를 나타내는 도표이다. 축간거리  $D=100\text{mm}$ , 압력각은  $\alpha = 20^\circ$ 일 때이고, 두 경우 모두 언더컷을 피하기 위한 모듈은 이심율이 커질수록 전위량에 의한 영향은 적어지는 것을 알 수 있다.

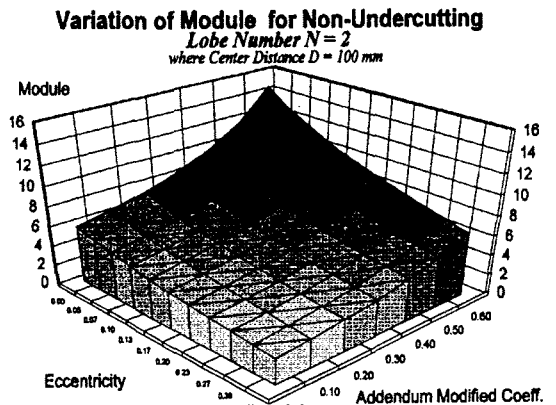


Fig. 5 Variation of module for non-undercutting ( $N=2$ )

Variation of Module for Non-Undercutting  
Lobe Number  $N=3$   
Where Center Distance  $D=100$  mm

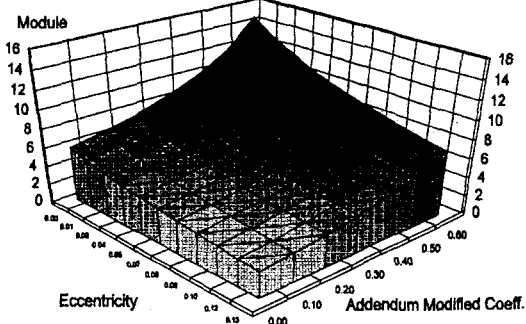


Fig. 6 Variation of module for non-undercutting ( $N=3$ )

4.2 최소잇수의 결정

식(20)에서 곡률은 원형기어에서는 일정한 피치곡선의 반경이고, 이것과 모듈과의 관계에서 최소잇수가 구해지지만, 타원기어에서는 이식에서 직접 잇수와 모듈의 관계를 구할 수 없고, 상당원형기어의 피치원을 상정하여 최소잇수를 구해야한다. 피치곡선의 전체길이를  $S_a$ 라고 하면 상당원형기어의 피치반경  $r_c$ 는

$$r_c = mZ / 2 = S_a / 2\pi$$

$$Z = \frac{S_a}{\pi m} = \frac{S_a(1-\xi)}{\pi \rho \sin^2 \alpha} \quad (21)$$

언더컷을 일으키지 않게 이(齒)를 절삭하기 위해서는 윗식에 의해 계산된 잇수 이상을 선택하여야 한다. 또한 타원기어의 잇수는 (2.3)절에서 말한 조건에 의해 우선 제약을 받게 된다.

Fig.7과 Fig.8은 2엽과 3엽 타원기어의 이심율과 전위량에 변화에 따른 언더컷을 피할 수 있는 최소잇수를 구한 도표이다. 2엽에 비해 3엽의 경우에는 잇수가 더 제한적이기 때문에 최소잇수의 변화가 거의 없음을 알 수 있다.  $\alpha = 20^\circ$ 이다.

Fig.9는 이심율 0.20, 축간거리 100mm의 2엽형 타원기어의 잇수가 18개 일때의 장경부에서의 치형이다. (a)는 전위시키지 않은 것이고, (b)는 전위계수 0.40일 때이다.

Fig.10은 3엽의 경우로 이심율 0.13, 축간거리 100mm, 잇수는 15개이다. (b)치형의 전위계수는 0.25이다.

Minimum Tooth Numbers to Avoid Undercutting  
Lobe Number  $N=2$   
Numbers are Based on a Normal Pressure Angle of  $20$  (deg)

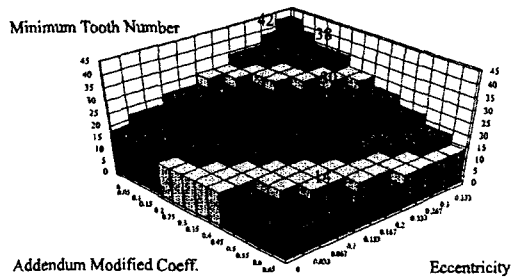


Fig. 7 Minimum tooth number to avoid undercutting ( $N=2$ )

Minimum Tooth Numbers to Avoid Undercutting  
Lobe Number  $N=3$   
Numbers are Based on a Normal Pressure Angle of  $20$  (deg)

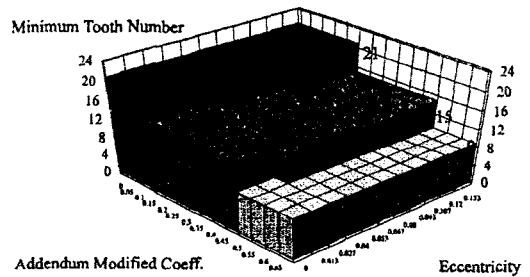


Fig. 8 Minimum tooth number to avoid undercutting ( $N=3$ )

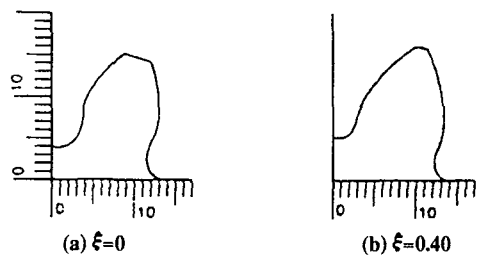


Fig. 9 Profile of elliptical gear ( $N=2, \epsilon = 0.20$ )

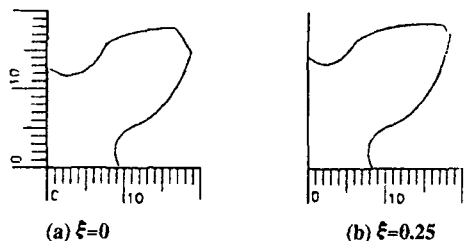


Fig. 10 Profile of elliptical gear ( $N=3, \epsilon = 0.13$ )

두 그림에서 Fig.7과 Fig.8의 조건에 맞도록 전위시켜 이(齒)를 절삭한 치형에서는 언더컷이 발생하지 않았음을 확인할 수 있다.

## 5. 결 론

타원계 엽형기어의 치형을 언더컷을 피하기 위해 전위를 시켜 모델링하고, 전위량과 이심율의 변화에 따른 최소잇수의 결정에 관해 연구한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 타원기어의 치형을 인벌류우트 곡선과 이뿌리부분을 트로코이드 곡선으로한 치형곡선을 수식화하였다.

2. 피치곡선을 따라 선형적으로 변화하고 장경부에서 (+), 단경부에서는 (-)의 같은 크기의 전위를 갖는 치형을 모델링하였다.

3. 수식화한 치형곡선을 전위시켜 언더컷을 피할수 있는 타원기어의 최소잇수를 이심율과 전위계수의 변화에 따라 구하였다.

랙터로 절삭할수 있는 이심율의 한계에서, 전위계수가 0.5이면 최소잇수는 엽수가 2일 때 18개, 엽수가 3일 때 9개이다.

## 참 고 문 헌

- Grant, Amer. Mach., Aug. 25, pp. 4, 1888.
- F. L. Litvin, "Noncircular Gears", 2nd ed. Gos Tech Isdat, 1956.
- Faydor L. Litvin, "Gear Geometry and Applied Theory", Prentice-Hall, 1994.
- 窪田雅男, "非圓形齒車에 관한 研究", 日本機械試驗所報告, No. 30, 3月, 1959.
- 香取英男, "非圓形齒車の 基礎와 應用", 日本機械學會 論文集, Vol 34., No. 13, 9月, 1990.
- 橫山良明, "非圓形齒車 機構의 設計, 製作", 日本機械學會 論文集, Vol. 22, No. 15, 5월, 1987.
- 新井哲夫, "橢圓系葉形齒車の 設計", 日本機械學會 論文集, Vol 34, No. 6, 5월, 1987.
- 高允昊, "非圓形 橢圓系 葉形기어의 이심율 변화에 따른 特性에 관한 研究", 정밀공학회 추계학술대회 논문집, 1994.
- 柳明燮, "이심율 변화에 따른 橢圓系 葉形기어의 振動 特性에 관한 研究", 정밀공학회 추계학술대회 논문집, 1996.
- S. G. Dhande, K. P. Karunakaran, "Geometric Modeling of Manufacturing Processes Using Symbolic and Computational Conjugate Geometry", ASME J. Engrg. Indust., Vol. 117, pp. 288-296, 1995.
- H. L. Chang, Y. C. Tsai, "A Mathematical Model of Parametric Tooth Profiles for Spur Gears", ASME J. Mech. Design, Vol. 114, pp. 8-16, 1992.
- Zhao Xiong Chen, "Proof of the Undercutting Phenomenon for an Involute Tooth Profile on a Cylindrical Gear", Mech. Mach. Theory, Vol. 27, pp. 93-95, 1992.