

# Stress Stiffening Effect를 고려한 천마 연소관의 날개 부착부위 응력해석 기법연구

이방엽, 강문중, 문순일, 은일상  
국방과학연구소

## 요 약

본 연구에서는 얇은 마레이징강으로 제작된 천마 연소관에 브라켓이 용접되어 비행 날개를 볼트로 체결한 경우, 압력과 공력하중에 의해 브라켓 부위에 집중되는 응력의 해석기법을 정립하기 위하여 선형해석과 기하학적 비선형 해석을 수행하였다. 높은 압력에 의해 발생한 얇은 연소관의 면내 응력이 구조물의 강성을 증가시키는 응력의 강성보강효과(stress stiffening effect)를 고려한 기하학적 비선형 해석을 수행하여 선형해석 결과와 비교하였으며, 압력과 공력하중을 동시에 적용할 수 있는 복합하중시험기로 변형률을 측정하여 해석치의 정확성을 검토하였다. 얇은 연소관에 압력과 공력하중이 동시에 작용하는 경우는 응력의 강성보강효과를 고려한 기하학적 비선형 해석을 수행함으로써 보다 정확한 응력을 구할 수 있다는 결론을 얻었다.

## 1. 서론

천마 연소관은 Fig. 1과 같이 비행날개가 연소관에 용접된 전방브라켓과 후방브라켓에 볼트로 체결되어 있어 고압용기와 기체 역할을 동시에 수행하고 있다. 연소관에 브라켓이 용접되지 않고 최대압력(2500psi)만을 받을 경우 1.5mm의 두께로 충분히 안전하나 브라켓이 용접되어 브라켓 강성에 의해 응력집중이 일어나고 또한 비행시의

공력하중까지 추가되므로 전/후방브라켓이 용접된 부위의 튜브 두께를 2.5mm로 보강하고 용접부 길이는 공력하중의 분포를 고려하여 각각 다르게 설계되었다. 보강 설계된 두께와 전/후방브라켓 길이의 유용성은 튜브 부위와 전/후방브라켓 용접부위의 응력 수준을 비교하여 검토하였다.

선형해석에서는 압력과 공력하중의 영향을 단순히 중첩할 수 있으나, 비선형해석에서는 압력에 의한 축방향과 원주방향 인장응력의 증가가 연소관의 강성(stiffness)을 증가시키는 응력의 강성



Fig. 1. Configuration of combustion chamber with four fins

보강효과(stress stiffening effect)<sup>[1,2]</sup>로 인하여 응력 집중치가 감소하는 결과를 보였다. 브라켓을 모델링한 경우와 모델링하지 않고 공력하중을 적용하여 해석한 경우를 비교해 보면, 브라켓의 강성에 의해 응력집중이 심해짐을 볼 수 있으며, 강성 보강 효과도 증가하여 시험치와도 잘 일치하고 있다. 해석 모델링과 결과 분석은 HP735/9000 워크스테이션에 설치된 PATRAN 1.3-2<sup>[3]</sup>를 이용하였으며, 응력해석은 Cray Y-MP2E/232 컴퓨터에 설치된 구조해석 프로그램 ABAQUS 5.4<sup>[4]</sup>을 이용하였다.

## 2. 응력 해석

### 2.1 이론적 배경

Stress stiffening은 Geometric stiffening, incremental stiffening, initial stiffening, differential stiffening으로도 불리며 응력상태에 따라 구조물의 강성이 증가하거나 감소하는 효과를 말한다. 축방향 강성보다 굽힘 강성이 매우 작은 cable이나 얇은 beam의 경우 인장을 가할수록 강성이 증가하여 고유진동수가 커지는 현상도 stress stiffening 때문이다. 평면내의 강성보다 굽힘강성이 매우 작은 얇은 판재나 셸 구조물에서 평면응력이 증가하면 평면내의 강성이 증가하여 고유진동수도 커지고 하중 작용시 초기형상에 의해 계산되는 선형변형율보다 stress stiffening을 고려한 기하학적 대변형 해석에서의 변형율이 작아지게 된다.

판재에 평면내 하중(In-plane load)과 측면하중(Lateral load)이 작용할 경우 측면으로의 변형이 평면내 변형율을 증가시키므로 서로 연관되어야 한다. 측면방향의 변형(w)은 x와 y 방향의 평면내 변형율을 야기시킨다. Fourier series의 2차

항까지 고려한 변형율은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \theta_x &= - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \theta_y &= - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \theta_{xy} &= 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \theta_x, \theta_y, \theta_{xy}\}^T \quad (2)$$

$$= \begin{Bmatrix} \epsilon_o^p \\ \epsilon_o^b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon_L^p \\ 0 \end{Bmatrix}$$

여기서  $\{\epsilon_o^p\}$ 는 평면응력 선형변형율(linear inplane strain)이며

$$\begin{aligned} \{\epsilon_o^p\} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T \\ &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x}, 0 \right), \left( 0, \frac{\partial}{\partial y} \right), \left( \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^T \{u, v\} \\ &= [B]_o^p \{u, v\} \end{aligned} \quad (3)$$

굽힘 선형변형율(linear bending strain)은,

$$\begin{aligned} \{\epsilon_o^b\} &= \left\{ - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \\ &= \left\{ - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\}^T \{w\} \\ &= [B]_o^b \{w\} \end{aligned} \quad (4)$$

평면응력 비선형변형율(nonlinear inplane strain)은,

$$\begin{aligned} \{\epsilon_L^b\} &= \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\}^T \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2, \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\}^T \{w\} \quad (5) \\ &= [B]_L^b \{w\}^b \end{aligned}$$

여기서 변위벡터를  $\{a\} = \{u, v, w\}$ 로 표시하면

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_o^b \\ \epsilon_L^b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon_L^b \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [B]_o^b & 0 \\ 0 & [B]_L^b \end{bmatrix} \{u, v, w\} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & [B]_L^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{u, v, w\} \\ &= ([B]_o + [B]_L) \{a\} \quad (6) \end{aligned}$$

$[B] = [B]_o + [B]_L$ 로 하면

$$\{\epsilon\} = [B] \{a\}, \quad \{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (7)$$

일반적으로 Generalized force는

$$\Psi(\{a\}) = \int_v [B]^T \{\sigma\} dV - \{A\} = 0 \quad (8)$$

Newton-Raphson method를 적용하면

$$\begin{aligned} d\Psi &= \int_v d[B]^T \{\sigma\} dV + \int_v [B]^T d\{\sigma\} dV \\ &= [K]_T d\{a\} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d[B] &= d[B]_L, \quad d\{\sigma\} \\ &= [D] d\{\epsilon\} = [D][B] d\{a\} \quad (10) \end{aligned}$$

식(10)을 식(9)에 대입하면,

$$\begin{aligned} d\Psi &= \int_v d[B]_L^T \{\sigma\} dV \\ &\quad + \int_v [B]^T [D][B] d\{a\} dV \quad (11) \end{aligned}$$

식(7)을 식(11)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} d\Psi &= \int_v d[B]_L^T \{\sigma\} dV \\ &\quad + \left( \int_v [B]_o^T [D][B]_o dV \right) d\{a\} \\ &\quad + \left( \int_v [B]_o^T [D][B]_L dV \right. \\ &\quad (12) + \left. \int_v [B]_L^T [D][B]_L dV \right. \\ &\quad \left. + \int_v [B]_L^T [D][B]_o dV \right) d\{a\} \\ &= ([K]_o + [K]_L) d\{a\} \\ &= [K]_T d\{a\} \end{aligned}$$

여기서  $\int_v d[B]_L^T \{\sigma\} dV \equiv [K]_o d\{a\}$ 의

$[K]_o$ 항은 기하학적 비선형항을 고려할 때 평면 내 응력에 의해 발생된 stress stiffening 항이며 initial stress matrix 또는 geomatric matrix라 부르고 본 논문에서 브라켓 부위 변형율에 직접적으로 영향을 미치는 항이다.

$[K]_o = \int_v [B]_o^T [D][B]_o dV$ 는 일반적인 선형문제에서의 강성 matrix이고,

$$\begin{aligned} [K]_L &= \int_v \left( [B]_o^T [D][B]_L \right. \\ &\quad \left. + [B]_L^T [D][B]_L \right. \\ &\quad \left. + [B]_L^T [D][B]_o \right) dV \end{aligned}$$

## 논문/유도주기 부분

는 기하학적 비선형항을 고려하여 발생한 matrix로서 initial displacement matrix 또는 large

displacement matrix 라고 한다.  $[K]_T$ 는 total tangential stiffness matrix이다. ANSYS 프로

Table 2. Pressure and aerodynamic force

항 목	연소관	전방브라켓	후방브라켓	비 고
압 력 ( $\text{kg}/\text{mm}^2$ )	1.7581	-	-	최대압력 (2500psi)
굽힘 모멘트 ( $\text{kg}\cdot\text{mm}$ )	-	8081.6	13612.8	
비틀림 모멘트( $\text{kg}\cdot\text{mm}$ )	-	3254.5	6154.6	
전 단 력 (kg)	-	171.6	268.1	
스프링 상수 ( $\text{kg}/\text{mm}$ )	9.16	-	-	연소관 지지밴드

Table 3. Mechanical properties of maraging steel (250 grade)

항 목	기 호	SI 단위 ( $\text{kg}/\text{mm}^2$ )	US 단위 (ksi)
탄 성 계 수	E	18987.3	27000
포 아 송 비	$\nu$	0.3043	0.3043
전 단 계 수	G	7279.0	10350
항 복 응 력	$\sigma_y$	168.7	240
인 장 응 력	$\sigma_u$	175.8	250

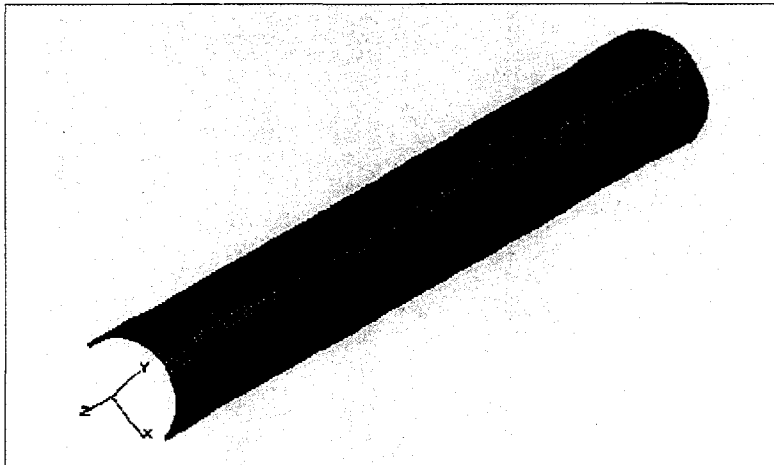


Fig. 2. Finite element model of cylinder without bracket

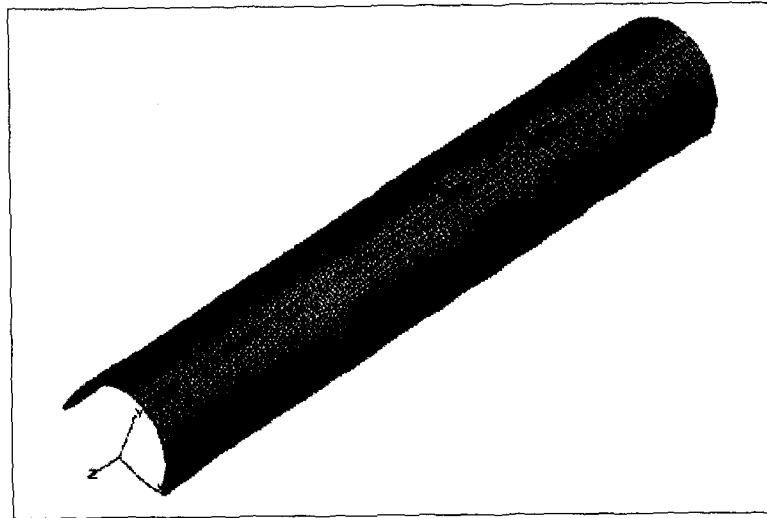


Fig. 3. Finite element model of cylinder with bracket

그림에서는 사용자가 stiffening option을 선택하도록 되어있으며 ABAQUS에서는 nonlinear option에 포함되어 있다.

2.2 수치응력해석

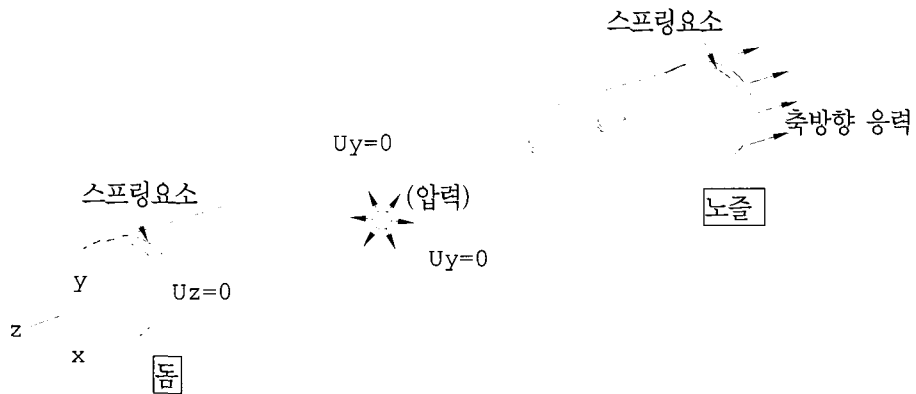
사용된 재료는 마레이징강 250급으로써 기계적 성질을 Table 1에, 브라켓 부위의 적용하중을 Table 2에 표시하였다. 브라켓 부위의 상세 응력 해석을 위하여 연소관의 돔과 노즐 체결 부위는 단순히 튜브로 모델링하여 경계 조건으로 처리하였으며, 원주방향은 대칭성을 고려하여 180° 만을 3차원 4절점 선형 고체 요소로 Fig. 2 및 3과

같이 모델링하였다. 브라켓에는 날개가 볼트로 고정되어 있으므로 내부 홈부위를 채우고 따로 모델링하여 용접 부위의 절점을 연소관과 일치시켰으며, 공력하중 적용시의 지지밴드는 연소관 양 끝단에 스프링 요소로 대체하였다. 스프링 상수는 공력하중 작동시 전체 변위가 1mm 정도 되는 값을 90° ~ 180° 부위에 적용하였다.

원주방향의 대칭면에는 원주방향 변위를 고정하였으며, 날개에서 연소관으로 전달되는 공력하중은 브라켓을 모델링하지 않은 모델에는 용접면에, 브라켓을 모델링한 모델에는 용접면과 브라켓 내면에서의 짝힘으로 Table 3 및 Fig.4와 같이

Table 73. Aerodynamic force applied to bracket

항목	모델	Cylinder without bracket				Cylinder with bracket				비고
		전방 브라켓 부위		후방 브라켓 부위		전방 브라켓 부위		후방 브라켓 부위		
		끝단	내면	끝단	내면	끝단	내면	끝단	내면	
전 단 력		5.3625	10.725	8.3781	16.7562	5.3625	10.725	8.3781	16.7562	Nodal force
벤딩 모멘트		25.2114	50.4228	42.5719	85.1438	30.7505y		51.7968y		
비틀림모멘트		24.6553	49.3106	32.0552	64.1104	0.2472z		0.2209z		element pressure
비 고		Nodal force(kg)				Field 이용한 pressure (kg/mm <sup>2</sup> )				



[브라켓 모델링하지 않은 연소관 (전방브라켓 부위) (후방브라켓 부위)]		[브라켓 모델링한 연소관 (전방브라켓 부위) (후방브라켓 부위)]	
(전단력)	(전단력)	(전단력)	(전단력)
(굽힘 모멘트)	(굽힘 모멘트)	(굽힘 모멘트)	(굽힘 모멘트)
(비틀림 모멘트)	(비틀림 모멘트)	(비틀림 모멘트)	(비틀림 모멘트)

Fig. 4 Boundary conditions and applied loads

Table 75. Finite element mesh and CPU time

모 델	Element		Node	스프링 요소 (Spring)	CPU (Cray)	비 고
	C3D8	C3D6				
Cylinder without bracket	5988	-	9306	48	4793초	선형 3 step
Cylinder with bracket	6140	16	9523	48	4872초	비선형 2 step

적용하였다. 돛쪽의 연소관 끝단은 축방향 변위를 고정시켰고, 연소관 내면에는 압력 1.7581 kg/mm<sup>2</sup>를, 노즐쪽 끝단에는 내압에 상당하는 축방향 응력을 적용하였다. 유한요소 모델의 유한요소 수와 Cray의 ABAQUS CPU 시간은 Table

4와 같다.

### 2.3 수압 및 공력시험

Fig. 5과 같이 수압 2만 psi와 횡하중 5톤까지 발생시킬 수 있는 복합하중시험기를 이용하여

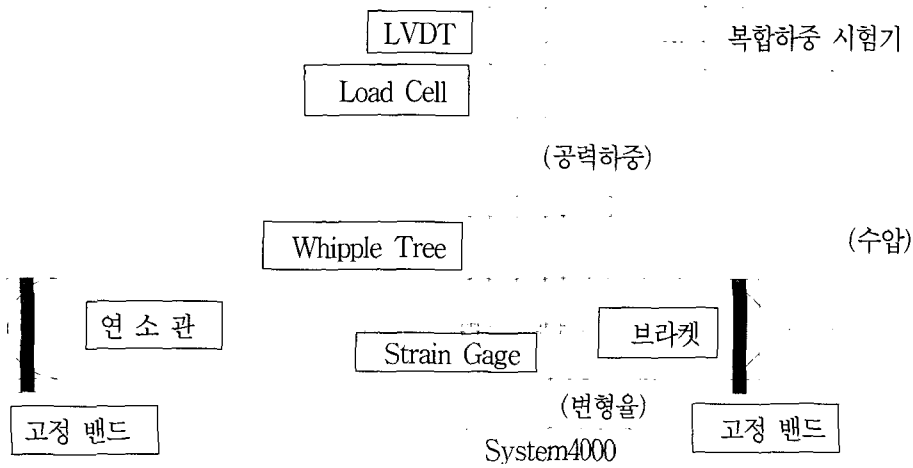


Fig. 217. Experimental apparatus

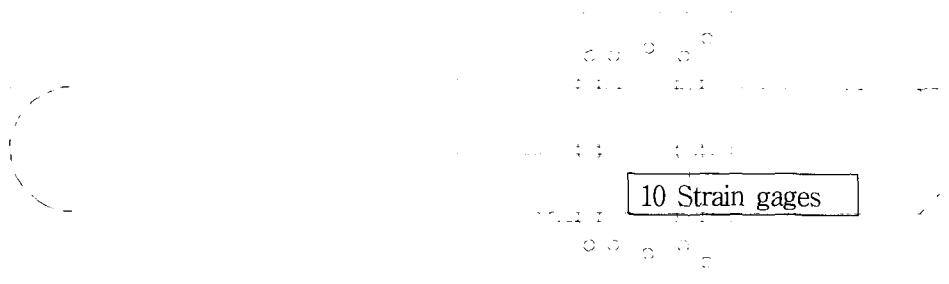


Fig. 6. Aerodynamic force distributions using whipple tree

Table 5. Specification of strain gages

항 목	게이지 규격	저항( $\Omega$ )	게이지 상수	게이지 형상	$K_t$
내 용	EA-06-031MF-120	120.0 $\pm$ 1.0%	2.04 $\pm$ 1.0%	10 elements	+1.1% NOM

MEOP(2500psi)까지의 수압시험과 공력시험 및 복합하중시험을 수행하였다. 연소관의 후방 브라켓 중앙 부위에 한 set로 된 10개의 변형률 게이지를 원주방향으로 부착하였으며, Fig. 6과 같이 Whipple tree를 이용하여 비행 날개에 작용하는 공력하중을 모사하였고, 연소관을 180° 회전시킴으로써 게이지 부착 부위가 공력하중에 의해 인장이나 압축을 받도록 하였다.

게이지 규격을 Table 5에 표시하였으며, 실험 데이터는 Measurement Group사의 System 4000과 PC로 획득하였다.

### 3. 결과 및 고찰

Table 6에 브라켓을 모델링하지 않은 연소관

과 모델링한 연소관의 해석 방법과 하중 조건에 따른 후방브라켓 중앙의 용접부 끝단 응력집중 부위의 원주방향 변형률을 실험치와 비교하였다. 압력하중만 가한 경우는 상대오차 6.6% 이내를 보이나 공력하중만 가한 경우 해석치가 최대 57% 작으며 복합하중을 가하면 비선형 해석의 경우 변형률이 인장부위에서는 실험치에 비해 22% 작으며, 압축부위에서는 28% 크게 나타났다. 이는 해석시 브라켓을 모델링하지 않은 경우 브라켓의 강성이 무시되어 브라켓을 모델링한 연소관의 실험치보다 작게 나타났음을 의미한다.

Fig. 7과 8은 각각 브라켓을 모델링하지 않은 연소관과 모델링한 연소관에 압력과 공력하중 또는 복합하중을 적용한 경우 선형 및 비선형해석에 의한 후방 브라켓 중앙부의 원주방향 변형률

Table 6. Hoop strains at edges of welded area

모델	부위	해석 방법	하 중 조 건									비고
			압 력			공 력 하 중			복 합 하 중			
			실험	해석	오차 (%)	실험	해석	오차 (%)	실험	해석	오차 (%)	
W/O Bracket	인장부	선 형	2550	2382	-6.6	1938	826	-57	3824	3209	-16	
		비선형		2421	-5.1		-	-		2986	-22	
	압축부	선 형	2550	2382	-6.6	-1828	-813	-55	1454	1569	7.9	
		비선형		2421	-5.1		-	-		1860	28	
With Bracket	인장부	선 형	2550	2573	0.9	1938	1746	-9.9	3824	4319	13	
		비선형		2653	4.0		-	-		3802	-0.6	
	압축부	선 형	2550	2568.6	0.7	-1828	-1684	-7.9	1454	884	-39	
		비선형		2645	3.7		-	-		1543	6.1	



분포를 나타낸다. 중첩하중은 압력과 공력을 각각 적용하여 결과를 단순히 더한 경우이며 복합하중은 압력과 공력을 동시에 적용한 경우이다. 복합하중을 가한 경우 비선형 해석치는 선형 해석치에 비해 응력집중 경향이 감소하고 있는데 이는 압력에 의해 연소관의 in-plane 응력이 발생하고 이 응력이 재료의 강성을 증가시킨 응력의 강성보강효과(stress stiffening effect) 때문이다. 브라켓을 모델링한 결과인 Fig. 8의 응력집중 경향이 브라켓을 모델링하지 않은 결과인 Fig.7의 응력집중 경향보다 심하므로 정확한 해석을 위해서는 브라켓의 모델링이 필요함을 알 수 있다.

복합하중을 가한 경우의 변형률은 선형 해석 결과의 인장부위에서 13%, 압축부위에서 39%의 오차를 보이나 비선형 해석에서는 각각 0.6%, 6.1%의 오차를 나타내어 비선형 해석 결과와 실험치가 잘 일치하고 있다. 이는 압력에 의한 응력의

강성보강 효과를 나타내며, 압력과 공력이 동시에 적용할 때에는 반드시 강성보강효과를 고려한 기하학적 비선형 해석을 해야함을 알 수 있다.

Fig. 7과 8에서 공력하중에 의한 응력집중 경향은 실험치에 비해 해석치가 크게 나타나 해석시의 브라켓 강성이 실험치구 보다 약간 크게 모델링되었음을 나타낸다. Fig. 8에서 보면 공력하중에 의한 인장부(브라켓 하부)에서 선형해석의 중첩결과보다 복합하중을 적용한 기하학적 비선형해석 결과가 원주방향응력이 감소하고 압축부(브라켓 상부)에서는 압축량의 감소(인장응력의 증가) 현상을 뚜렷이 볼 수 있다. 이는 압력이 야기시킨 원주방향과 축방향 면내응력이 재료의 강성을 증가시킨 stress stiffening effect 때문이다.

Fig. 9는 복합하중을 적용시킨 경우 원주방향 응력 분포를 나타내는데 공력하중에 의해 브라켓 용접부위에서 응력 집중 현상을 보이고 있다.

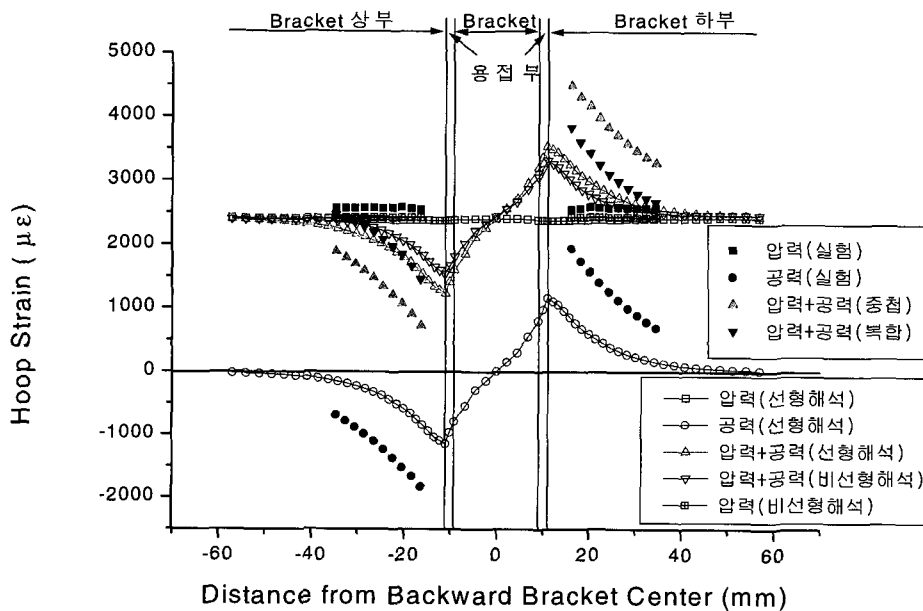


Fig.7. Hoop strain distribution on center of backward bracket without bracket for five load cases

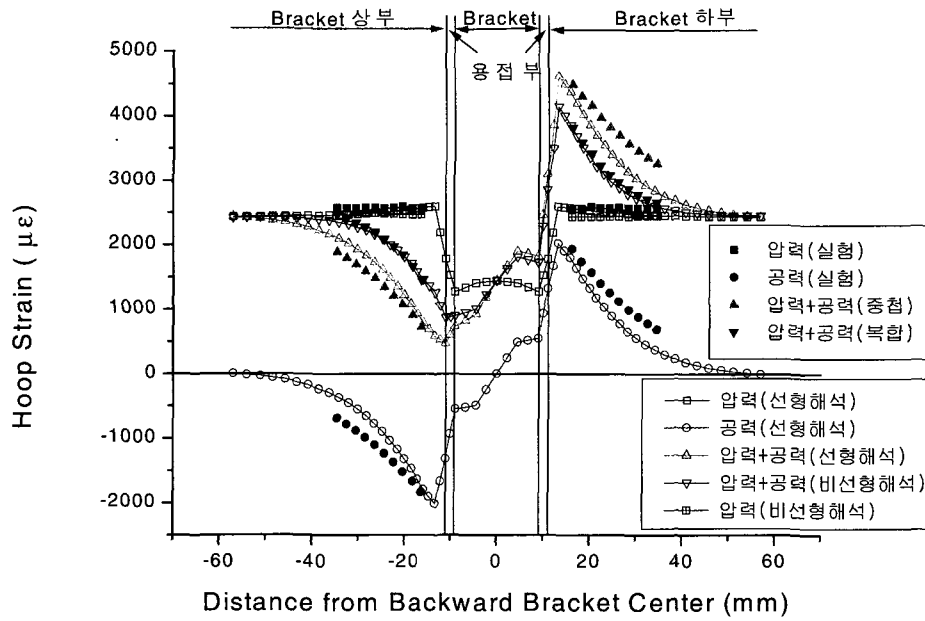


Fig.8. Hoop strain distribution on center of backward bracket with bracket for five load cases



Fig. 9. Hoop stress contour of a cylinder with bracket for combined load

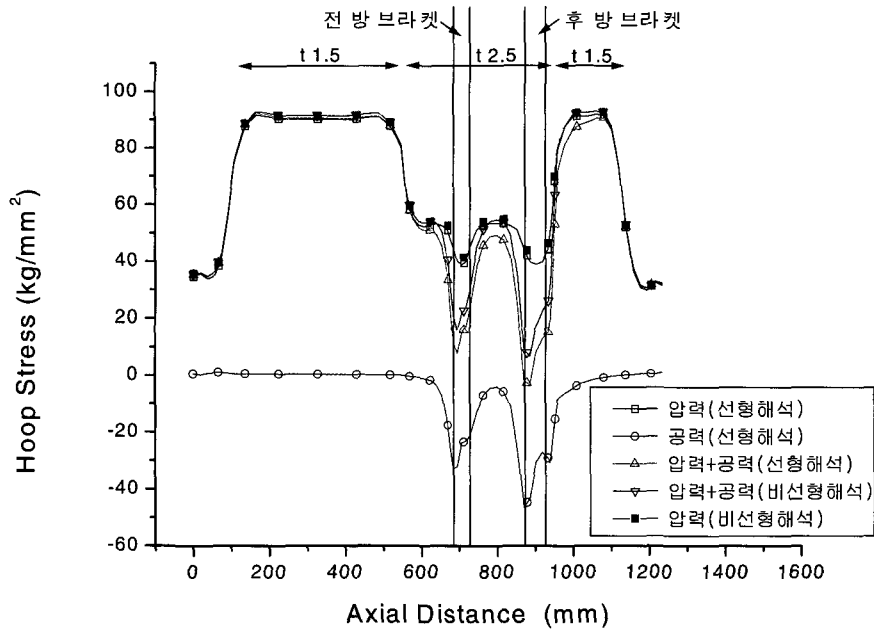


Fig. 10. Hoop stress distribution along axial line through upper

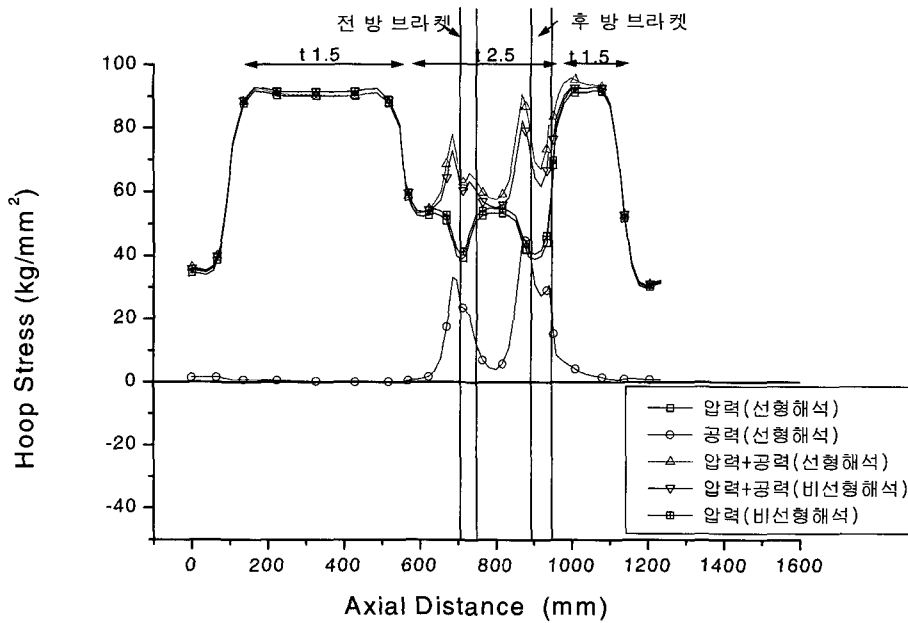


Fig. 11. Hoop stress distribution along axial line through lower edge of welded area with bracket for five load cases

Fig. 10은 브라켓의 상부 용접 끝단을 통과하는 축방향 선상의 원주방향 응력을, Fig. 11은 브라켓의 하부 용접 끝단을 통과하는 축방향 선상의 원주방향 응력을 나타낸다. 공력하중에 의해 상부 용접부위는 압축응력을 받아 응력이 감소하나 하부 용접부위는 인장응력이 증가되어 82.0kg/mm<sup>2</sup>가 되었다. 이는 튜브 부위(t1.5)의 92.9kg/mm<sup>2</sup>에 비해 88% 정도로 12% 만큼 두께를 감소시킬 수 있음을 나타낸다.

전방 브라켓 용접부위의 최대 응력은 72.8kg/mm<sup>2</sup>로 후방 브라켓 부위의 88% 정도이며 전방 브라켓의 길이를 늘리고 후방 브라켓의 길이를 적당히 줄이면 균등한 응력분포를 갖도록 설계할 수 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

날개가 부착된 천마 연소관을 유한요소법을 이용한 선형해석과 stress stiffening effect를 고려한 기하학적 비선형 3차원 응력해석 및 복합하중 시험장치를 이용한 구조시험 결과 다음의 결론을 얻었다.

1) 압력하중만 가한 경우는 모든 해석 경우의 오차가 6.6% 이내로 실험치와 해석치가 잘 일치하고 있다.

- 2) 브라켓을 모델링하지 않은 모델은 복합하중을 적용한 경우 해석치가 실험치에 비해 압축부위에서는 28% 크며, 인장부위에서는 22% 작게 나타나 응력집중을 야기시키는 브라켓 모델링의 필요성을 확인하였다.
- 3) 복합하중을 가한 경우 브라켓의 모델링 여부에 관계없이 비선형 해석치가 선형 해석치보다 인장부에서는 응력이 감소하고 압축부에서는 응력이 증가하여, 얇은 셸 구조물에서 압력이 발생시킨 면내 응력이 재료의 강성(stiffness)을 증가시키는 응력의 강성보강효과(stress stiffening effects)를 뚜렷이 나타낸다.
- 4) 압력과 공력이 동시에 작용하는 얇은 셸 구조물에서 정확한 응력해석을 위해서는 응력의 강성보강 효과를 고려한 기하학적 비선형 해석을 수행해야 한다.

#### 참고 문헌

1. ANSYS User's Manual, v. 5.0, Vol. IV, Theory, pp3.1-3.23, 1992
2. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, "The Finite Element Method", Vol. 2, Chap 8, pp 284-311, 1991
3. PATRAN User's Manual, v 1.3-2, 1995
4. ABAQUS/Standard User's Manual, v. 5.4, Vol. I & II, 1995