Historia Mathematica Vol. 11, No. 1, 1998, 47-51

무한으로의 접근(칸토르를 중심으로)*

한양대학교 이과대학 수학과 **임종록, 한정순**

Abstract

We consider how the speculation of infinity has been established through Cantor's idea. Also this paper deals with a problem of infinity in view of the application of our real life, as well as the theoretical meaning.

0. 서언

와일(H. Weyle 1885-1955)의 말에 의하면 "수학은 무한의 학문이다"고 말할 정도로 무한은 기원전 6세기부터 20세기 초까지 수학에서 논의되어 온 가장 중요하고 영향력 있는 논의의 대상이었다고 해도 과언이 아닐 것이다.

무한 개념을 모색하고 이해하기 위한 노력 속에서 때로는 허구의 대상으로 또는 두려움의 대상으로 우리가 다루어야 할 대상이 전혀 아닌 과정 속에서 그 무한을 적극적 사고의 대상으로 가져온 칸토르(Georg Cantor, 1845-1918)의 사상을 살펴보고자 한다. 우주는 유한인가 무한인가 하는 문제는 학문과 종교예술 생활 문제에까지 많은 영향을 가져왔다.

희랍 시대의 무한에 대한 인식은 한계를 넘는 것 한계를 부정하는 것으로 인식되어 왔으며 아리스토텔레스(Aristoteles)는 무한은 존재하는 것이 아니라 가능적으로 존재하는 것으로 보았다. 한편 근대 수학은 무한과 극한을 대담하게 받아들임으로써 미적분학을 중심으로 해석학을 확립할 수 있었다.

가능적 무한(potential infinite)이라는 소극적 개념으로부터 존재로서의 무한, 즉 한없이 많은 것 또는 무한히 큰 것을 하나의 완결된 존재로 생각하기는 매우 곤란한 것인데 이 문제를 논리적으로 엄밀하게 취급한 사람이 칸토르의 집합론이다. 더욱이 그는 존재로서의 무한에도 여러 종류가 있음을 밝힌다. 종교적인 관점에서는 무한성이야말로 신의 완전성의 표현으로서 나타난다. 즉 신은 무한 의식을 가지며 처음도 끝도 없고 시간도 없고 공간도 없으며 또한 운동도 없는 존재이다.

---

* 본 논문은 '97학년도 한양대학교 교내연구비의 지원을 받아 연구되었음

무한에 관한 논리는 유한 논리를 초월하여 원이 직선이 될 수도 있고 전체가 부분과 같아지는 소위 반대의 일치가 같아지는 구조를 갖는다.

칸토르가 우리에게 제시해 준 무한에 관한 적극적인 이해를 통하여 무한에 대한 확고부동한 논리 체계를 수립하고 그와 같은 자세가 우리의 삶에 우리의 신앙에 우리의 정신 체계 속에 어떻게 구체적인 변화를 가져올 방법은 없는 것일까 하는 문제에 대해서도 생각해 보고자 한다.

1. 칸토르의 무한에 관한 접근 방법

칸토르의 종교적인 가정 분위기는 신학에 관심을 가졌으며 이것은 무한의 성질과 무관하지 않았다. 그는 연속성과 무한성에 관심을 가지고 무한 개념을 전혀 새로운 개념으로 바꾸어 놓았다. 과거에는 무한을 오직 수의 의미로만 생각했다. 즉 모든 수보다 큰 수 무한 개념의 본질은 매우 큼 혹은 매우 작음과 연관 지워 있었다. 아리스토텔레스는 무한을 가능적 무한 즉 반복적으로 끝없이 수행될 수 있는 과정과 실제적 무한(actual infinite)으로 분류하고 무한은 가능적으로 존재한다. 그러나 실제적 무한은 앞으로도 없을 것이라고 지적하였다. 칸토르는 이와 같은 전통적 관념을 거부하고 실제적 무한을 이미 완성된 수학적 대상으로 수용했다. 무한 집합은 우리 정신이 전체로서 파악할 수 있는 어떤 것으로 여겨져야 한다고 생각하였다.

그것은 가능적 무한과 실제적 무한의 구분을 없애는 것을 뜻하며 이전까지의 지배적인 생각과 오직 하나의 무한이 있는 것이 아니라 여러 종류의 무한이 있음을 보였다. 그 무한들은 본질적으로 상이할 뿐만이 아니라 일상적인 수들이 비교되는 것과 거의 유사한 방식으로 서로 비교할 수 있다. 즉 무한에도 위계가 있으며 그 위계질서를 바탕으로 우리는 한 무한이 다른 무한보다 더 크다고 말할 수 있다고 지적하였다.

이와 같은 사상은 기원전 6세기부터 지금까지 내려온 무한에 관한 근본 개념을 바꿔 놓기에 충분하다. 무한이라는 것이 단순히 우리의 사고 영역 밖이 아니라 구체적인 사고의 영역 틀 속으로 가져 왔으며 이것은 동시에 우리의 사고 영역의 확장으로서 받아드릴 수 있다. 이와 같은 혁신적인 사고를 우리의 현실과 어떻게 긍정적으로 대비시켜 볼 것인가 하는 문제를 다루고자 한다.

여기서 베르누이(Jacques Bernoulli, 1654-1705)의 말을 인용해 보자.

"유한한 것이 무한한 계열을 감싸고 한계 없는 것에 한계가 나타나듯이, 끝없는 영혼은 사소함 속에 깃들고 아주 좁은 한계 안이지만 여기엔 한계가 없다. 무한 속에서 사소한 것을 구분해 내는 것은 얼마나 즐거운 일인가! 작은 것 속에서 광대함을 감지하는 일, 얼마나 신성한가!"

이 말은 유한한 인체 속에 무한한 인간 정신이 깃들여 짐을 말하는 것이 아닌가 나름대로 생각하며 이와 같은 생각은 칸토르의 무한의 관점을 이해하지 않고는 말해질 수 없는 경지

를 나타낸 것이 아닌가 하는 연상을 하게 된다. 막연하게 무한이 큰 것이라는 개념으로부터 실제적인 무한의 요소를 잡고 더욱이 그 무한을 유한 속에 가두고 있음을 말한다는 것은 무한 자체로 하나의 물건처럼 우리 사고 속에 실제적인 요소로서 취급할 수 있음을 암시한다고 보여진다. 끝없는 영혼이 유한한 육체에 감싸일 때 그 존재는 이미 유한의 존재가 아님을 암시한다. 이와 같은 형상이 우리 인간이 아닌가 하는 관점에 도달하면 인간은 과연 유한한 존재인가에 대한 심한 의문점을 던지게 된다. 그야말로 인간이 얼마 안 되는 유한한 육체 덩어리가 아니고 그 속에 내재된 조그만 속에 내재된 무한 존재임을 설명할 방법만 존재한다면 우리는 커다란 새로운 인식 속에 들게 될 것이다. 따라서 인간이란 물질적인 존재가 아니고 영혼의 존재임을 인식하는 계기가 될 수 도 있을 것이다. 더욱이 칸토르의 무한 집합에 관한 연구 결과는 그와 같은 설명을 어느 정도 가능하게 할 수 있다고 생각된다.

칸토르의 기본 개념은 두 집합 사이에 1:1 대응이 존재하면 두 집합의 개수가 같다. 그리고 무한 집합은 자신의 진부분집합과 1:1 대응을 이룬다 라고 정의하였다. 이러한 관점에서 보면 이제까지의 단순한 무한집합들이 서로 구별되어질 수 있다. 몇 개의 예를 들면,

1) $N=\{1,2,3,\cdots\}$을 모든 자연수의 집합 $E=\{2,4,6,\cdots\}$을 짝수인 자연수의 집합이라고 가정하자. 이들 사이에 다음과 같이 1:1 대응 규칙을 찾음으로써

$$\begin{array}{cccccccc} N: & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ E: & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

N과 E는 같은 기수($N\sim E$로 표시)를 갖고 있음을 보일 수 있다.

2) $N=\{1,2,3,\cdots\}$을 모든 자연수의 집합, $Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$를 정수 전체의 집합이라 한다면 이들 사이에 다음과 같이 1:1대응 규칙을 찾음으로써

$$\begin{array}{cccccccccc} N: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & n & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ Z: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & \dfrac{1+(-1)^n(2n-1)}{4} & \cdots \end{array}$$

N과 Z는 같은 기수를 갖고 있음을 보일 수 있다.

3) $N=\{1,2,3,\cdots\}$을 모든 자연수의 집합, $Q=\left\{\frac{m}{n}\mid (n,m)=1,\ n,m\in Z,\ n\neq 0\right\}$을 모든 유리수의 집합이라 한다면 이들 사이에 다음과 같이 1:1 대응 규칙을 찾음으로써

$$\begin{array}{cccccccccccccc} N: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \cdots \\ Q: & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -2 & 3 & \frac{2}{3} & \cdots \end{array}$$

$N\sim Q$이다.

N과 대등한 집합은 가부번집합(denumerable)이라고 하고 기호 $\aleph_0$로서 표시하였다.
이와 같은 증명은 한편 간단해 보이지만 이러한 사실들은 모든 분야에 대단히 큰 변화를 가져왔다.
이어서 비가부번인 무한집합은 모든 실수의 집합이었다.
실수의 어떤 구간도 그것이 아무리 짧다고 할지라도 자연수 N과 1:1 대응되는 구간은 없다는 것을 밝혔다.

$(0,1)=\{0<x<1$를 만족하는 모든 실수 x들의 집합$\}$은 비가부번이다.

(증명) "칸토르의 대각화 과정"에 의해서 (0, 1)은 비가부번임이 밝혀질 수 있다.
즉 (0, 1)의 기수는 $\aleph_0$보다 더 많은 점을 갖고 있는 무한 집합이라고 볼 수 있다. (0, 1)의 초한기수를 C로 표시하였다. 더욱이 놀라운 것은 단위구간 (0, 1)과 단위평면 $(0,1)\times(0,1)$ 사이에 1:1 대응 관계가 성립함이 밝혀졌다.

결국 단위 평면상의 모든 점과 단위 구간의 부분집합 사이에 1:1 대응이 존재하게 된다. 즉 차원이 다르다고 할지라도 정사각형인 단위 평면에 있는 점들은 결코 단위 구간 내에 있는 점보다 많지 않으며 그들의 기수는 다같이 C라는 것이 된다.
초한기수로서는 C가 가장 큰 것이 아닐까 생각될 수도 있으나, 이 가정이 역시 칸토르에 의해서 부정되었다.
이 정리가 칸토르의 정리이다.

집합 A가 임의의 집합일 때 A의 기수는 $\wp(A)$의 기수보다 작다. 즉 C보다 큰 무한 기수가 존재할 수 있다.

$C=Card(0,1)<Card\,\wp(0,1)$　　(*Card* A는 A의 기수를 뜻함)

결국 $\aleph_0<C<\wp(0,1)<Card\wp(\wp(0,1))<Card\wp(\wp(\wp(0,1)))<\cdots$이 되므로 얼마든지 더 큰 기수의 초한기수들이 존재할 수 있다.

2. 칸토르 무한의 현실로의 접근

지금까지 칸토르를 중심으로 무한에 관한 분석과 변화를 개괄적으로 살펴보았는데 이것들은 가히 이전까지의 무한에 관한 모든 생각들을 송두리째 흔들어 놓고 수학에 관한 각분야에 커다란 영향을 미쳐 왔으며 앞으로도 그 영향은 지대하리라 기대된다. 이제까지의 매우 제한적인 무한의 개념이 마치 유한한 어떤 기존의 숫자를 다루는 것과 비슷한 방법으로 다루어지도록 길을 마련했다고 볼 수 있으며 무한에도 수많은 계층의 무한이 존재함을 알게

되었다. 부분과 전체에 대한 개념도 근본부터 바뀌기 시작하였다. 무한집합에서는 자신의 진부분집합과 1:1 대응을 이루므로 기존의 크기 개념이 바뀌었다고 할 수 있다. 유한한 인체 속에 무한한 마음의 세계가 포함됨으로써 사람은 유한의 존재로서 단정지을 수 없다. 우리의 인식이 무한이라는 거대한 영역을 포함한다면 유한이라는 제약 조건 부자유 속에서 벗어날 수도 있을 것이다. 유한이라는 뿌리 깊은 인식 속에서 항상 우리는 투쟁하고 쟁취하려는 편협한 마음속에 묶여 있지나 않는가? 본래의 무한의 인식이 막연한 무한이 아니고 실무한의 존재로서 우리 인식 속에 다가올 때 그때부터 보다 더 고차원적인 다양한 형태 즉 투쟁으로부터 서로를 살리고 서로를 돕는 상대를 배려하는 상대의 고통을 같이 나누는 이상의 세계로의 전환점이 마련되지 않을까?

우리가 보고 있는 이 우주 자체가 편협하고 구속되고 조그만 세계가 아니라 보이는 그대로가 무한한 우주의 한 모습이며 서로 투쟁을 넘어서 충분히 서로 나누어 줄 수 있는 세계가 아니었을까? 이제는 마음의 세계도 그 나름대로의 속성과 법칙이 존재할진대 적극적인 자세로 그 세계를 연구하고 그것을 생활 속에 응용할 수 있는 하나의 계기가 되었으면 한다.

참고문헌

1. 모리스 클라인저, 朴世熙譯, 수학의 확실성, 民音社, 1984
2. 李星憲, 世界數學史, 교학사, 1969
3. Moor, Eli, *To infinity and beyond*, Birkhäuster Boston, 1987
4. Boyer, Carl B., *A history of mathematics*, 2nd ed., New York, John Wiley & Sons, Inc. 1991
5. Heath, Sir Thomas L., *A history of Greek mathematics*, New York Dover, 1981
6. Aris, R., *Mathematical modelling techiques*, San Francisco, Pitman, 1978
7. Bell, E.T., *Man of mathematics*, New York, Simon and Schuster, 1937
8. Cohen, P.J., *Set theory and continuum hypothesis*, New York, W. A. Benjami, 1966