Historia Mathematica Vol. 11. No. 1, 1998, 19-26

계산가능성 이론 형성에서의 Church's Thesis와 Turing's Thesis*

연세대 인지과학연구소 **현우식**

Abstract

We investigate "Church's Thesis" and "Turing's Thesis", which are commonly considered as equivalent foundations of computability theory or recursion theory in mathematical logic and computer science. A careful historical and logical analysis of Gödel's recursiveness, Church's λ-definability and Turing computability should distinguish between Church's Thesis and Turing's Thesis.

0. 서 언

계산가능성(computability, effective calculability)은 유한한 기계적 절차(finite mechanical procedure)의 존재에 의해 규정된다. 따라서 계산가능성은 바로 알고리즘(algorithm)과 관련된 문제이며, 수학을 구성하는 하나의 필수적인 방법과 절차에 관한 주제이다. 알고리즘이란 용어는 본래 9세기 아랍인 수학자 Abu Abdullah abu Jafar Muhammad ibn Musa *al-Khowarizmi*의 이름에서 유래된 것으로 오늘날에는 계산절차(computational procedure)와 같은 의미로 사용된다.

그 내용의 측면에서 알고리즘의 문제는 유클리드(c. 330 B.C.)의 greatest common divisor algorithm에서 역사적 기원을 찾아볼 수 있다. a, b, c가 양의 정수이고 방정식 $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 정수해를 구할 수 있을 때 디오판토스(c. A.D. 250)의 이름을 따라 Diophantine equation이라 하는데 이 문제에 대한 decidable algorithm이 존재하지 않는 것으로 알려지고 있다. 그래서 이 방정식은 언급한 문제가 해결되었을 때 그것을 결정할 수 있는 계산절차를 구하는 문제, 즉 힐베르트(Hilbert)의 10번째 문제에 해당하는 '결정가능성문제(Entscheidungsproblem)'에 대한 하나의 부정적인 사례로 제시된다. 1920년대 힐

* 본 연구는 대우재단의 연구비 지원으로 이루어진 것임.

베르트는 First-order logic에 대한 결정절차가 존재하면 그 체계 내에서 참이 되는 즉 타당성(validity)을 결정할 수 있을 것으로 보았었다. 그러나 이러한 기대는 1931년 괴델의 불완전성 정리에 의해 실현될 수 없음이 증명되었다.

오늘날 컴퓨터과학의 이론적 기초가 되는 계산가능성이론(computability theory)은 1930년대에 수리논리에서 형성되었으며 그 창시자들이 괴델(Kurt Gödel), 처치(Alonzo Church), 클린(Stephen Kleene), 튜링(Alan Turing), 포스트(Emil Post)와 같은 수리논리학자들이었다 [12]. 후에 독립적인 이들의 작업은 모두 수학적으로 동치인 것으로 인정되었다. 그러나 이것이 외연적 동치(extensional equivalence)를 의미할 뿐 내포적 동치(intensional equivalence)를 의미하는 것은 아니다[9]. 본 소고에서는 역사적 고찰과 논리적 분석을 통해서 볼 때, 처치와 튜링의 주장(Thesis)을 획일적으로 동등하게 평가할 수 없다는 것을 보이고자 한다.

고전적 계산가능성이론의 주제는 '기계적으로 계산가능한 것', 즉 형식적으로 결정가능한 것에 대한 정의와 문제였다. 이것은 해결가능한 문제와 해결불가능한 문제에 대한 논리적 연구라고 할 수 있다. 그러나 1960년대 이후에는 논리적으로는 불가능하다고 할 수 없으나 실제 계산수행도의 관점에서 현실적으로 다루기 수월한 문제(tractable problems)와 다루기 어려운 문제(intractable problems)를 중점적으로 연구하는 Complexity theory로 발전하였다. 계산가능성이론은 현대 수리논리에서 중요한 한 부분을 이루고 있으며 또한 컴퓨터과학에서 이론과 실제상 매우 영향력있는 주제를 다루고 있다.

본 소고의 연구범위는 자연수 $\boldsymbol{N}$을 전제로 한 ω-computability theory에 한정되며 특히 1930년대 그 이론이 형성되는데 결정적인 역할을 했던 괴델, 처치, 튜링에 입장과 주장을 분석한다. 그 결과에 따라 Church's Thesis와 Turing's Thesis의 수학사적 의미와 그에 대한 평가가 구별되어야 한다는 것을 강조하고자 한다.

1. Church's Thesis

1.1 1930년대에 처치는 λ-calculus를 이용하여 계산가능성을 정의하고자 하였다. 이것은 수학의 기초를 이루는 집합론에 하나의 대안을 제공하기 위한 것으로써 collection 개념보다 operation 개념에 근거한 계획이었다. 이를 위하여 구상한 것이 λ-operator에 의한 λ-abstraction 방법이었다. 이것은 함수를 도입하기 위한 일종의 표기법으로 $\lambda x_1, \cdots, x_n A$와 같은 형식으로 되어 있다. 여기에서 A는 특정한 언어 내의 논항(term)이다. 그러므로 이러한 λ-abstraction은 자유변항(arguments)의 값을 논항 A에 의해 표현되는 대상으로 변환시키는 함수를 정의해 주는 것이다. 예를 들면, k-place 함수 f: $\boldsymbol{N}^k \rightarrow \boldsymbol{N}$는 $f = \lambda x_1, \cdots, x_k[f(x_1, \cdots, x_k)]$로 표현된다. λ-operator가 자유변항을 포함하고 있는 표현을

하나의 함수를 나타내는 표현으로 바꾸어 주고 있다. 이렇게 함수를 λ-operator로 정의하는 λ-abstraction이 존재할 때 그 함수는 λ-definable하다고 한다.

1.2 1930년대 초기 처치의 계산가능성 연구는 λ-definability의 개념 아래서 진행되었다. 그는 λ-definable 함수가 효과적으로 계산가능한 함수(effectively computable function)라고 보았던 것이다. 그러나 Church's Thesis는 모든 계산가능한 함수들은 부분회귀함수(partial recursive functions)라는 주장이다. 그러므로 문제의 핵심은 Church's Thesis가 자신이 정의한 λ-definability가 아니라 괴델이 1934년에 정의한 회귀성(recursiveness)[4]에 의해 이루어진 이유를 해명하는 것이다.

원래 회귀함수는 괴델이 불완전성 정리를 증명하기 위해 정의하였던 기초회귀함수(primitive recursive function)를 확장한 것으로, 괴델의 [4]의 §9에 의하면 Herbrand의 제안을 수정한 것이었다. 그 제안은 Ackermann function $\lambda nx[F_n(x)]$과 같은 이중적 회귀에 의한 함수는 계산가능하지만 기초회귀적 함수가 아니라는 것이었다. 그러므로 회귀함수에 대한 정의가 Ackermann function과 같은 함수를 포함해서 정의할 수 있어야 한다는 것이었다. 일반회귀함수를 Herbrand-괴델이 정의한 회귀함수 또는 회귀함수라고 부른다. 다음 (I)에서 (V)까지에 의해 정의되는 함수를 기초회귀함수라 한다.

(I) successor $\lambda x[x+1]$;

(II) constant functions $\lambda x_1 \cdots x_n[k]$;

(III) projections $\lambda x_1 \cdots x_n[x_i]$;

(IV) composition $\lambda x_1 \cdots x_n[g(h_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, h_m(x_1, \cdots, x_n))]$;

(V) primitive recursion $\lambda x_1 \cdots x_n[g(x_1, \cdots, x_n)]$ & $\lambda yzx_1 \cdots x_n[h(y, z, x_1, \cdots, x_n)]$.

이러한 기초회귀함수에 Ackermann function과 같은 함수들을 포함하여 확장된 회귀함수가 일반회귀함수이다. 이것은 다음의 (VI)를 추가한 것과 같다.

(VI) minimalization (least number operator) $(\mu y)[g(x, y)=0]$, where $g(x, y)$ is total and is in the smallest class of partial function.

결국 회귀함수의 기본 개념은 일종의 equation system을 사용하여 계산가능성에 대한 가장 일반적인 개념을 정의하는 것이다. 그러나 괴델 자신은 이러한 회귀적 속성과 계산가능성의 일치시키는 작업은 단지 하나의 "발견적 법칙(heuristic principle)"에 불과하다고 보았다. 즉 그 개연성은 인정하되 필연성은 인정하지 않았다고 볼 수 있다.

1.3 Church's Thesis는 원래 1935년 4월 19일 뉴욕 시에서 열렸던 미국수학협회(the American Mathematical Society)의 학회에서 발표되었다. 그리고 이것의 완전한 형태의 논문이 American Journal of Mathematics에 발표된 것이 1936년의 [1]이었다.

그런데 1935년 11월 처치의 편지내용에서 1934년 봄에 처치가 괴델에게 했던 제안을 알 수 있다. 1934년 2월에서 5월까지는 괴델이 프린스턴의 고등학문연구소(Institute for Advanced Study)에서 특별강의를 했던 시기였다. 그 제안은 효과적으로 계산가능하다는 것은 바로 λ-definability와 일치한다는 것이었다[8].

처치의 이러한 제안에 대한 괴델의 반응은 대단히 부정적이었다. 괴델은 처치의 제안이 '완전히 불만족스러운(thoroughly unsatisfactory)' 것이라고 평가했기 때문이다[8]. 괴델이 보기에는 먼저 효과적 계산가능성의 개념에 대해서 보편적으로 수용될 만한 속성을 보여야 하는데 처치는 이 과정을 생략한 채 λ-definability를 계산가능성과 일치시키고자 하였다는 것이다. 당시의 이 비판은 적절한 것이었다고 생각된다. 결국 처치는 효과적 계산가능하다는 것과 λ-definability의 동치성에 대한 괴델의 동의를 구할 수 없었다.

1.4 처치는 λ-definability와 회귀성의 동치를 증명한 후에 자신의 주장을 발표한 것이 아니었다. 두 개념의 동치성은 1935년 6월말 그의 제자 클린에 의해 처음으로 증명된 것이다[10]. 이 결과는 Church's Thesis가 처음 발표되었던 1935년 4월 이후의 일이었다. 물론 클린는 1934년 괴델의 강의를 들었고 [4]는 그와 로서(J.B. Rosser)에 의해 작성된 기록이었다. 그러므로 단순히 Church's Thesis라는 명칭보다는 Church-Kleene's Thesis라는 명칭이 보다 정확하고 공정한 표현이라고 할 수 있다. 처치가 1935년 4월 발표했던 시점에서 본다면 그가 정의한 λ-definability 대신에 괴델이 정의한 recursiveness를 채택하여 계산가능성을 정의하고자 한 시도는 완성된 것이 아니었다.

1.5 논리적 관점에서 처치의 주장에는 중대한 약점이 지적될 수 있다[9, 11]. 그는 기초단계가 단계적으로 회귀적이면 전체과정이 회귀적이라는 것을 논증하고자 하였다. 그러나 처치는 여기에서 기초단계의 회귀성을 전제했을 뿐 그것을 정당화하지는 못했다. 그러므로 Church's Thesis에는 논리상 결함이 존재하게 된다. 이러한 기초단계의 회귀성 문제는 튜링에 의해 전혀 다른 방식으로 다루어졌다.

2. Turing's Thesis

2.1 Turing's Thesis는 어떤 함수가 비형식적으로 계산가능하면(informally computable), 그 함수는 Turing-계산가능하다는 주장이다. 즉 어떤 함수가 유한의 기계적 절차(a finite mechanical procedure) 또는 algorithm에 의해 정의될 수 있으면 그 함수는 Turing machine에 의해 계산가능하다는 것이다. 이것이 의미하는 것은 모든 직관적으로 계산가능한 함수는 Turing machine에 의해 계산가능하다는 것이다. 따라서 효과적으로 계산가능하다는 것은 곧 Turing-계산가능하다는 것이다.

2.2 튜링은 먼저 계산하는 인간(human computer)에 의해 수행되는 연산들을 분석하여 그것을 추상화하였다. 다시 말하면 인간의 계산을 순수하게 기계적인 방법으로 이상화하고자 하였던 것이다. 간략하게 말하자면 인간의 계산은 다음의 3가지 요소에 의해서 설명될 수 있다는 것이다. (I) a list of states(Turing-configurations); (II) a finite alphabet of symbols; (III) a finite list of instructions. 이 세 가지 요소에 의해 정의된 계산모델이 오늘날 Turing machine으로 불리는 형식체계이며 그 수학적 정의는 다음과 같다.

Let Σ be a finite set of symbols, including Blank 0 and Stroke 1, and let $q_1, q_2, \cdots$ be symbols of states not in Σ. Then a Turing machine TM is a finite set of quintuples $(q_i, \sigma, \tau, \Phi, q_j)$, where σ, τ are in Σ and Φ is one of the symbols "D (don't move)", "R(move one right)", or "L(move one left)", such that no two distinct quintuples have the same first two members. The symbol q_i stands for state i.

따라서 Turing machine은 자연수 n에 대하여 다음과 같은 하나의 함수로 정의될 수 있다. $TM: \{1,2,\cdots,n\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\} \times \{L,R,D\} \times \{1,2,\cdots,n\}$.

2.3 튜링은 처치와는 전혀 다른 방식으로 계산가능성의 개념을 정의하였다. 분명히 튜링이 1936년 여름에서 1937년 봄까지 프린스턴에서 처치의 지도를 받았으나 그가 발견한 보편계산기계의 정의와 계산가능성의 개념에 대한 분석은 독창적인 것이었다. 그래서 괴델은 처치의 제안을 불충분한 것으로 보았으나 튜링의 분석을 옳은 것으로 인정할 수 있었던 것이다. 그 당시에 괴델과 튜링은 한번도 서로 만난 일이 없었다.

일부에서 튜링의 지도교수가 처치이었다는 사실 때문에 튜링의 초기 연구가 프린스턴에서 이루어진 것으로 알려진 것은 잘못된 것이다. 특히 [2]의 부록에 나오는 Turing computability와 처치의 λ-definability의 동치를 증명하는 내용조차도 그가 영국을 떠나기 전에 완성된 것이 틀림없다. 왜냐하면 부록이 논문에 추가된 일자가 1936년 8월 28일이지만 튜링이 프린스턴을 향하여 영국을 떠난 일자는 9월 23일이었기 때문이다.

2.4 튜링은 '효과적'이라는 수학 외적 개념과 '계산'이라는 수학 내적 개념을 Turing machine이라는 독창적인 형식체계에서 성공적으로 통합시켜 설명했다. 그리고 그는 자신이 정의한 Turing machine으로 계산을 가장 기초적 단위와 기초적 단계로부터 설명하였기 때문에 처치의 논증이 지니고 있는 논리적인 결함을 극복하여 처치의 논증을 가장 잘 정당화

시키는 공헌을 했다. 또한 처치가 인간의 계산구조의 본성을 고려하지 않고 계산가능성의 개념을 정리하려고 한 것과는 달리, 튜링은 인간의 계산모형을 근거로 정신적 계산과정의 본질과 실제 계산의 본질에 대한 개념을 연결시켜 계산가능성의 개념을 완성했던 것이다. 이러한 튜링의 공헌은 매우 중요하며 그의 작업은 놀라운 것이었다.

2.5 괴델은 자신이 정의한 회귀성이 계산가능성을 정의한다고 생각하지 않았다. 그래서 괴델 자신은 한번도 회귀성이란 용어를 계산가능성을 의미하는 것으로 사용하지 않았다. 반면에 그는 튜링의 계산가능성에 대한 분석과 설명을 높이 평가하고 보편적으로 수용할 만한 개념으로 인정하였다. 즉 이 문제에 관한 한 괴델은 자신의 정의보다는 튜링의 정의가 더 적절하다고 생각하였으며 이점을 기회있을 때마다 분명히 밝혔다[5, 6, 7]. 괴델에 의하면 튜링의 분석과 주장을 긍정적으로 받아들여야 하며 기계적 계산가능성과 계산가능함수에 대한 '정확한' 정의로 평가해야 한다.

> Turing's work gives an analysis of the concept of mechanical procedure (alias "algorithm" or "computation procedure" or "finite combinatorial procedure"). This concept is shown to be equivalent with that of a "Turing machine"(Postscriptum, 3 June 1964 [4]).

괴델과 튜링은 '계산가능성'을 설명하거나 표현하는데 결코 '회귀이론'이나 '회귀함수론'이란 용어를 사용하지 않았다.

3. 결 어

처치의 λ-calculus의 개념은 인공지능 언어인 LISP의 이론적 기초가 되었고 Turing machine은 현대 컴퓨터의 이론적 모형이 되었다. Church's Thesis와 Turing's Thesis는 현대 컴퓨터과학과 수리논리학의 기본적 전제로 받아들여지고 있다. 그러나 수학사와 논리적 관점에서 두 주장은 결코 동등하게 평가될 수 없다.

Church's Thesis에 의하면 그는 자신이 개념화한 λ-definability라는 장치 대신 괴델이 제공한 개념인 recursiveness라는 장치를 선택하여 '계산가능성'이라는 개념을 정의하고자 했다. 더욱이 자신이 주장해 오던 바를 완전히 포기한 것이 아니라 단지 괴델의 개념을 선택한 것이었다. 이것은 그후의 이 주제에 대한 연구결과에 의하면 불가피했던 선택이었다기보다는 결국 자신의 성과를 보류시키고 자신의 입장을 성급하게 변경한 셈이 되었다. 이에 비하여 Turing's Thesis는 구조적으로 자신이 정의한 기초 위에서 '계산가능성'이란 문제를 분석하여 보편적으로 수용할 수 있을만한 개념을 제공했다고 평가할 수 있다. 그의 주장은 순수하게 자신의 입장 위에서 자신이 정의한 도구에 의해 이루어졌다는 점에서 높이 평가할

만하다.

오늘의 관점에서 본다면 Church's Thesis와 Turing's Thesis는 결합된 형태로 사용될 수도 있다. 그래서 알고리즘, effective procedure, computability의 개념은 모두 Turing computable또는 recursiveness로 설명되고 있다. 그러나 두 사람의 주장이 형성되는 과정을 동시대의 눈으로 볼 때, 두 주장을 동등하게 평가할 수는 없다. 엄격히 말하자면 Turing's Thesis는 존재했으나 Church's Thesis는 존재하지 않았다. 다만 Kleene's Thesis가 존재했던 것이다.

참고문헌

1. Church, A., An unsolvable problem of elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, vol. 58 (1936), 345-363, in M. Davis(editor), *The undecidable*, New York: Raven Press, 1965.
2. Turing, A., On Computable Numbers, with an application to the Entschei dungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, vol. 42 (1936), 230-265; A correction, ibid., vol.43, 54-546, in M. Davis(editor), *The undecidable*, New York: Raven Press, 1965.
3. Post, E.L.,. Finite combinatory processes-formulation I, Journal of Symbolic Logic, vol. 1, 103-105, in M. Davis(editor), *The undecidable*, New York: Raven Press, 1965.
4. Gödel, K. On undecidable propositions of formal mathematical systems, notes by S. C. Kleene, and J. B. Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, (1934) in K. Gödel, *Collected Works I: Publications 1929-36* (S. Feferman et al., editors), Oxford: Oxford University Press, 1986, 346-371.
5. Gödel, K., Postscriptum to Gödel 1931(1963), in K. Gödel, *Collected Works I: Publications 1929-36* (S. Feferman et al., editors), Oxford: Oxford University Press, 1986, 195.
6. Gödel, K., Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics (1946), in K. Gödel, *Collected Works II: Publications 1938-74* (S. Feferman et al., editors), Oxford: Oxford University Press, 1990, 150-153.
7. Gödel, K., Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications(1951), in K. Gödel, *Collected Works III: Unpublished essays and lectures* (S. Feferman et al., editors), Oxford: Oxford University Press, 1990, 304-323.
8. Davis, M., Why Gödel did not have Church's Thesis, *Information and Control*, vol. 4 (1982), 3-24.
9. Soare, R.I., Computability and Recursion, *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol.2, no. 3

(1996), 284-321.

10. Kleene, S.C., λ-definability and recursiveness, *Duke mathematical journal*, 2(1936), 340-353.
11. Sieg, W., Mechanical procedures and mathematical experience, *Mathematics and Mind* (A. George, editor), Oxford: Oxford University Press, 1994.
12. Davis, M., Mathematical Logic and the Origin of Modern Computer, in Herken(editor) *The Universal Turing Machine. A Half-Century Survey*, New York: Springer-Verlag, 1994, 135-158.