한국학교수학회논문집 제 1 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 1, Number 1, 175-184, 1998

Van Hiele 理論에 依한 實業系 高等學生들의 幾何 水準 考察

鄭 永 哲[1)]

I. 서 론

A. 연구의 필요성

학생들이 기하 학습에 실패하는 이유를 설명하기 위해 1957년 네덜란드의 부부 수학교사에 의해 제안된 Van Hiele 이론은 기하 학습의 한 모델을 설정했다. 이에 의하면 학생들은 기하 학습에서 일정한 발달 단계를 거치는데 학생들의 발달 단계에 맞도록 기하 교육을 재편성해야 한다는 것이다.

Van Hiele의 이론으로 알려진 이 모델은 많은 연구자들의 주목을 받았고 소련 등 여러 나라에서 교육과정에 적용되기도 하였다.

우리 나라에서도 한태식 등 많은 연구자들이 이 이론의 타당성과 이 이론에 입각한 교수 학습 활동의 가능성을 연구하였고, 최근에도 이루어지고 있다.

한편, 이러한 연구는 초등학교, 중학교, 인문계 고등학교 학생들을 대상으로만 연구되었고, 실업계 고등학교 학생들은 대상에서 제외된 듯 하다. 최근에 인문계 고등학교를 선호하는 경향으로 과거에 비해 실업계 고등학교 학생들의 입학 성적이 점차 하향 곡선을 그리고 있으며 실업계 고등학교에 입학한 학생들은 수학의 필요성을 인식하지 못하여 과목에 대한 관심을 거의 갖지 않는 상태이지만 실업계 고등학교 학생들의 대학 진학률이 높아지고 있음을 고려하면, 실업계 고등학생들에게도 논리적사고 능력을 신장시킬 수 있는 효과적인 수학교육(기하교육)의 방안이 연구되어 사회에 진출하여서는 능동적으로 현실에 대처하는 능력과 태도를 길러주고 대학에 진학하여서는 수학이 도구 과목으로서의 역할을 다 할 수 있도록 하여야 할 것이다.

그러한 면에서 이러한 Van Hiele 이론에 근거해서 실업계 고등학생들의 기하 사고 수준을 살펴봄으로써 실업계 고등학교에서의 기하교육의 문제점을 찾아내어 기하적 사고를 바르게 가르치기 위한 새로운 전략을 세우는 것은 매우 의미 있는 일이라 하겠다.

B. 연구 목적

본 연구는 실업계 고등학교 학생들에게도 Van Hiele 이론을 적용할 수 있는지 알아보고, 이미 연구된 중학교 학생 및 인문계 고등학교 학생들과의 Van Hiele 수준 분포 비교를 통해 Van Hiele 이론에 근거한 실업계 고등학생들의 기하 수준을 살펴보고 분석하여 효과적인 기하교육 방법을 찾는데 있다.

C. 연구 내용

1) 충남 주산상고; yc1111 @clollian.net

본 논문에서의 연구내용은 다음과 같다.

(1) 연구 대상 학생들 중 Van Hiele 이론을 적용할 수 있는 학생의 비율은 얼마나 되는지 살펴본다.

(2) 연구 대상 학생들의 Van Hiele 수준 검사를 통한 기하학 수준을 알아본다.

(3) 연구 대상 학생들의 Van Hiele 수준과 중학생 및 인문계 고등학생(2학년)들의 Van Hiele 수준의 차이를 비교 고찰한다.

D. 연구의 제한점

본 연구는 충청남도 보령시에 소재한 3개의 실업계 고등학교(상업고, 산업고, 수산업고)의 각 학년 1개반씩 임의 선택하여 연구대상으로 삼아 최대한 신뢰성 있는 결과를 얻고자 하였으나, 타지역의 실업계 고등학교 학생들을 위한 일반화에는 제한이 있고, 서울 지역 소재 중등 학생들을 대상으로 연구한 김미정(1994)과 정연석(1992)의 대학원 연구 논문의 자료를 이용하여 연구 대상과 비교하였으므로 역시 일반화에는 제한이 따른다.

Ⅱ. 이론적 배경

A. Van Hiele 이론

학생들이 기하 학습에서 어려움을 겪는 이유는 그들의 사고 수준보다 높은 수준에서 가르쳐지기 때문이라는 이 이론은 다음의 세 가지 요소로 구성되어 있다.

(1) 통찰력

Van Hiele 부부는 통찰력을 다음과 같이 정의하고 있다. 어떤 사람이 다분히 생소한 상황에서도 주어진 과제를 수행할 수 있고, 그 상황에서 요구되는 행동을 능숙하게(정확하고 적절하게) 실행하며, 그 상황을 해결하는 방법에 따라 계획적으로(신중하고도 의식적으로) 과제를 수행한다면 그 사람은 통찰력을 보여 주고 있는 것이다. 학생들이 통찰력을 가지고 있다는 것이 무엇이며, 그들이 그것을 왜 하는지, 그리고 그들이 그것을 언제 할 것인지를 이해하고 있다는 것이다. 통찰력을 가지고 있는 학생들은 문제해결에 그들의 지식을 응용할 수 있게 된다.

(2) 사고 수준

Van Hiele은 학생들의 기하에 대한 사고 수준을 다음과 같은 다섯 수준으로 구분하였다.

<u>제1수준(시각적 인식 수준)</u>: 도형을 그 구성 요소에 대한 명확한 고려 없이 전체로서 시각적 외관에 의해 판별하는 수준이다.

<u>제2수준(도형의 분석적 수준)</u>: 주변 대상의 정리 수단이던 모양(도형)이 연구의 대상이 되어 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악하는 단계이다. 이 수준의 학생은 도형을 형식적으로 정의할 수는 없지만 경험에 의해 도형의 성질을 분석하여 기술할 수 있고, 이렇게 얻어진 성질들을 관련 지우지는 못한다.

<u>제3수준(이론적 배열 수준)</u>: 도형의 성질들과 도형들 사이의 관계가 연구의 대상이 되어 도형의 여러 가지 성질 및 관계를 파악하고 정의를 이해하는 단계이다. 도형과 그 성질들 사이의 논리적인 관계가 정의를 통해 확립되지만 아직 완전한 관계를 이해하지는 못한다. 즉 도형의 한 성질로부터 다른 성질이 도출될 수 있음을 알게 되며 도형에 대한 정의를 내릴 수는 있지만, 공리나 정리들의 의미를 이해하지 못하며 경험적이고 실험적인 방법으로 추론을 이해하는 단계여서 추론의 훈련에는 많은 도움이 필요한 상태이다.

<u>제4수준(연역적 추론 수준)</u>: 명제가 연구의 대상이 되며 명제들 사이의 논리적 관계를 통해 공리, 정리, 정의의 역할을 이해하고 증명의 논리적 구성을 이해하며 기하학적 사고의 전개와 형성의 수단인 연역의 의미를 이해하고, 생소한 정의로부터 연역적 사고를 할 수 있는 단계이다.

제5수준(기하학의 엄밀화 수준): 기하학의 체계 그 자체가 연구의 대상이 되며 여러 가지 공리 체계를 비교할 수 있는 수준이다. 이 수준에 이르면 구체적인 도형이 없어도 이론을 전개해 나갈 수 있을 정도로 사물에 대한 추상화가 발달된 단계이다. 따라서 학생들은 기하학적 대상의 구체적인 특성과 이 대상들 사이의 관계에 대한 구체적인 의미로부터 추상적이고 일반적인 수학적 사고를 하게 되어 비유클리트 기하학의 이해가 가능한 단계이다. 그러나 이 수준에 대해 Van Hiele 자신이 후에 그 존재를 부인하였고, Z.Usiskin은 그것이 존재한다 해도 테스트될 수 있을지 의심스럽다는 결론을 내렸다. 일반적으로 중등학교 기하교육을 통하여 제5수준에 도달하는 학생은 거의 없고, 중등학교 기하교육의 목표는 학생을 제4수준, 즉 증명의 의미를 이해할 수 있도록 하는 것으로 알려져 있다.

(3) 학습 단계

Van Hiele의 학습 국면은 직접적인 교사의 지도에서 교사로부터 독립하는 이동을 의미하는데 그 내용은 다음과 같다.

국면1. 안내 단계(Inquiry): 자료를 제시받고 필요한 논의를 통해 탐구할 분야에 친숙해지기 위한 활동을 한다. 이 때, 교사는 학생이 용어를 어떻게 파악하고 있는지를 확인하고 학생이 이해하도록 도움을 주며 좀 더 깊은 연구를 위해 질문과 관찰이 수행된다.

국면2. 직접 지도(Directed Orientation): 제시된 자료를 통해 탐구 분야를 연구하면서 그 진행 방향을 감지하고 탐구 분야의 구조가 점진적으로 파악된다. 교사는 학생이 연구의 진행 방향을 깨닫게 하고, 구조와 친숙해 지도록 하기 위해 설명을 조심스럽게 해 나간다. 여기서의 대부분의 활동은 특별한 반응을 유도하는 한 단계 과제이다.

국면3. 명확화 단계(Explication): 발견된 자료를 표현하는 활동을 통해 그것을 명확히 하며 전문적인 용어를 학습한다. 학생들은 예전 경험과 교사로부터 최소한의 힌트를 얻어서 구조에 대한 자신들의 견해를 표현하며, 관계 체계를 형성하기 시작한다.

국면4. 자유로운 탐구 단계(Free Orientation): 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 된다. 학생들은 다중 단계 과제나 혹은 여러 방식으로 완수될 수 있는 과제와 접하면서 자신만의 방식을 찾는 경험을 하게 된다. 그러므로 연구 대상 사이의 많은 관계들이 학생들에게 더욱 명확해진다.

국면5. 통합 단계(Integration): 탐구 활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고 수준 비약에 이르게 된다. 방법을 재고하고 검토한다. 대상과 관계는 통합되고 사고의 새로운 영역으로 내면화된다. 교사는 전혀 새롭거나 혹은 자연스럽지 못한 아이디어를 내놓지 않도록 주의하면서, 학생들이 이미 알고 있는 것에 대한 전체적인 개관을 제시하여 이 과정을 돕는다.

B. Van Hiele 이론을 기초로 한 연구

(1) 외국에서의 연구

Van Hiele 이론에 대한 연구는 1960년대 소련의 교육학자들에 의해 그 타당성이 인정된 이래, Usiskin(1982), Mayberry(1983), Senk(1983)등에 의해 그 타당성에 관한 연구가 이루어져 왔다.

Usiskin은 Van Hiele 부부의 논문에서 각 수준별 아동의 행동을 기술한 광범위한 인용 문구를 발췌 분석하여 Van Hiele이 제시한 사고 수준의 도달 여부를 평가할 수 있는 구체적인 문항을 개발하여 Chicago project에 적용하였다. 그의 Chicago project의 주 관심은 Van Hiele의 발달 수준과 학생의 기하학적 개념에 대한 성취도 및 증명능력 사이의 관계를 보는 데 있었다. 이 연구에서 많은 학생들이 기하학 과정을 수행하는데 어려움을 느끼는 이유와 관련하여 Van Hiele 이론의 유용성과 기하학 과정 중학생들이 더 많

은 기하학 지식과 증명에 성공을 거두기 위해 고등학교 전에 행해야 할 체계적인 기하학 교육의 필요성을 입증하였다.

Mayberry는 직접 개발한 62개 문항을 사용하여 인터뷰를 실시하였는데, 각 수준(1수준-4수준)에서 7개의 개념(사각형, 직각삼각형, 이등변삼각형, 원, 평행선, 닮음, 합동)을 테스트했다. 이 결과, ①학생이 각각 앞선 수준에서 직관적으로 사고 할 수 있는 경험을 갖지 않고선 현 수준에서 적절하게 기능을 할 수 없다. ②만약 교육의 언어가 학생의 사고 과정 보다 더 높은 수준이라면 학생은 이 교육을 이해 할 수 없다. 등의 결론으로 다시 한번 Van Hiele 수준의 존재와 그 유용성을 입증하였다.

Brooklyn project는 세 개의 K-8 교과서를 분석한 후 이러한 교과서가 학생들의 Van Hiele 수준 향상에 별 도움을 주지 못하게 구성되어 있다고 밝혔다. 또한 6-9학년 학생들과의 임상 면담을 통하여 학생이 기하를 어떻게 학습하며 기하를 학습할 때 어떤 어려움을 겪는지를 살피고 Van Hiele 수준을 향상시키기 위한 교육적인 지도 모델을 제시하였다.

또 Oregon project는 학생들의 기하에 대한 이해를 측정하기 위하여 1-12학년 학생을 대상으로 인터뷰 작업을 실시하였으며, Van Hiele 이론이 기하 과제에 대한 학생들의 사고 과정을 나타내는데 유용한가를 밝히고자 하였다.

(2) 우리 나라에서의 연구

우리 나라에서 Van Hiele 이론에 근거한 연구는 아직 많지 않다. 지금까지 우리 나라에서 Van Hiele 이론에 근거하여 실험된 연구 결과를 살펴보면 다음과 같다.

김선렬(1992)은 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 Chicago project의 Van Hiele 수준 검사를 실시하여 Van Hiele이론이 타당성이 있음을 검증하였으며, Van Hiele수준과 기하 학습 성취도와는 상관관계가 있음을 밝혔다.

최혜정(1990)도 중학교 2학년과 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 Van Hiele 수준 검사를 실시하여 Van Hiele이론이 타당성이 있음을 검증하였으며, 교과서의 기하 단원을 분석하여 현행 중학교 교과서 중 몇몇 단원이 Van Hiele 이론과 일치하지 않고 있음을 지적했다.

정연석(1992)은 중학교 3학년 학생에게 Van Hiele 수준 검사를 실시하고, 인문계 고등학교 2학년 학생에게 Van Hiele 수준 검사와 증명 검사를 실시하여 중학교 3학년 학생에게 증명을 도입하는 것은 무리이며, 문과와 이과 간에 Van Hiele 수준 및 증명능력에 차이가 없음을 밝혔다.

김효정(1993) 등의 연구는 중학생들을 대상으로 Van Hiele 수준 검사를 실시하여 학생들의 Van Hiele 수준을 살펴보고, 이들 중 10명을 대상으로 Oregon project에 의해 임상 면담을 실시하여 중학교 2학년의 수업에서 증명 수업이 수준의 진보에 별로 효과적이지 못했음을 밝혔다.

이상의 연구 결과들은 초등학교, 중학교, 인문계 고등학교 학생들을 대상으로 학생들의 기하학적 사고 과정을 설명하고 있는 Van Hiele이론이 유용함을 지지하고 있으며, 기하 학습시 Van Hiele 이론에 바탕을 두고 지도되어야 함을 지적하고 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

A. 연구 대상

본 연구는 충남 보령시의 실업계 고등학교 3개교에서 취업생, 한글 미해득자, 무성의한 응답자 등을 제외한, 남자 240명, 여자 120명, 총 360명을 대상으로 실시하였고, 중학생 및 인문계 고등학교(2학년) Van Hiele수준 분포 비교는 이미 연구된 김미정(1994)과 정연석(1992)의 대학원 논문을 참고로 하여 비교하였다.

B. 연구 절차

대상 학생들에게 Van Hiele 수준 검사를 1997년 8월 22일부터 9월 5일 사이에 연구 대상의 각 학교 수학 교사의 협조로 통제 실시하였다.

C. 검사 도구

본 연구에서 사용한 도구는 Van Hiele 수준 검사지이다.

기하학의 개념 이해를 측정하기 위해 1982년 Chicago 대학에서 CDASSG project를 통해 Z. Usiskin 등이 개발한 문항을 기초로 하여 구성한 Van Hiele 수준 검사지는 5지 선다형 문항으로 제1수준에서 제5수준까지 각 5문항씩, 총 25문항으로 구성되어 있으나 여기서는 1수준부터 4수준까지에 해당하는 20문항을 채택하고 5수준에 해당하는 5문항을 제외시켰고 제한 시간은 20분으로 하였다.

D. 결과 처리

검사 문항은 객관식이므로 본 연구자가 직접 채점하였으며, 채점 방법은 다음과 같다.

학생들의 Van Hiele 수준을 정하기 위해, 원칙적으로 Chicago project에서 사용한 합산 방법을 이용했다. 이 방법에 따라 다음과 같이 합산점이 주어진다.

문항 1번~5번(1수준)에서 기준에 도달하면 1점,

문항 6번~10번(2수준)에서 기준에 도달하면 2점,

문항 11번~15번(3수준)에서 기준에 도달하면 4점,

문항16번~20번(4수준)에서 기준에 도달하면 8점.

Chicago project는 각 수준에서 기준(Criterion)을 한 수준의 5문제 중 3문제를 정답으로 하는 경우와 5문제 중 4문제를 정답으로 하는 경우 두 가지를 모두 조사하였는데, 본 연구에서는 이미 Van Hiele 수준 분포를 연구한 논문과의 비교를 위해 후자의 경우를 기준에 도달한 것으로 간주하였다.

또한, 각 학생에게 주어진 합산점은 그 학생이 도달한 수준을 나타내준다. 즉, 하위 수준부터 차례로 통과(득점)한 1점, 3점, 7점, 15점에 따라 1점이면 1수준, 3점이면 2수준, 7점이면 3수준, 15점이면 4수준을 부여했다. 또한 총 득점이 0점인 학생은 0수준으로 분류하는데 0수준은 아직 1수준(시각적 수준)에도 이르지 못한 것을 의미한다.

그리고 Chicago project에서는 Van Hiele 이론에 맞지 않으면, 즉 연속적으로 Van Hiele 수준에 도달하지 않는 학생은 제외시켰으나, 본 연구에서는 한태식(1986)논문에서 사용한 방법을 이용하여, Van Hiele 수준에 연속적으로 도달한 학생(fitters)과 비연속적으로 도달한 학생(non-fitters)의 두 그룹으로 나누어 조사했다. 예를 들어 총 득점 5점은 1수준은 통과하고 2수준을 통과하지 못한 채로 3수준을 통과한 것을 의미하는데, 이는 "n수준은 반드시 n-1수준을 통과한다" 라는 Van Hiele의 이론에 어긋나는 것이므로 이러한 학생은 non-fitter로 분류했다.

비연속적으로 도달한 학생의 Van Hiele수준은 그 학생이 도달한 비연속적 수준 중 가장 높은 수준으로 정하고 "준수준"이라 정의하였다. 그러므로 합산점 2는 준수준 2를, 합산점 4, 5 ,6은 준수준 3, 합산점 9, 11, 13, 14는 준수준 4를 나타낸다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

본 장은 제Ⅲ장에서의 절차에 의해 얻어진 자료를 통계적인 방법에 의해 다루고 그 결과를 분석하기 위한 장이다. 연구 결과 분석은 제Ⅰ장에서 제시한 3개의 연구 내용을 중

심으로 한다.

A. 연구 결과 및 분석

연구 내용1 : 연구 대상 학생들 중 Van Hiele 이론을 적용할 수 있는 학생의 비율은 얼마나 되는가?

Van Hiele 이론을 적용할 수 있는 학생은 Van Hiele 수준에 연속적으로 도달한 학생(fitters)이고, 비연속적으로 도달한 학생(non-fitters)은 적용할 수 없는 학생이다.

<표1> fitter 와 non-fitter의 수

구 분	fitter	non-fitter	계
1 학 년	100 (83.3)	20 (16.7)	120 (100)
2 학 년	103 (85.8)	17 (14.2)	120 (100)
3 학 년	105 (87.5)	15 (12.5)	120 (100)
계	308 (85.6)	52 (14.4)	360 (100)

* ( )의 숫자는 비율(%)을 나타냄.

<표1>에서 나타난 바와 같이 연구 대상 학생들의 85.6%가 연속적으로 Van Hiele 수준에 도달하여 Van Hiele 이론에 따라 수준을 정할 수 있는 것으로 나타났다.

Chicago project(1982)에서는 약 88%, 한태식 논문(1986)에서는 약 80%로 나타났으며, 우리 나라 학생들을 대상으로 한 연구 중 최현호 논문(1990)에서는 86%, 최혜정 논문(1990)에서는 82%, 김효정 등의 논문(1993)에서는 88%, 초등학교 학생들을 대상으로 연구한 김선렬 논문(1992)에서는 82.7%, 중학생들을 대상으로 연구한 김미정 논문(1994)에서는 86.5%, 인문계 고등학생(2학년)들을 대상으로 한 정연석 논문(1992)에서는 84.6%로 나타났다.

이런 점에서 볼 때, 본 연구 결과는「n-1 수준을 거쳐야만 n수준을 갈 수 있다」라는 Van Hiele 이론의 타당성이 다시 한 번 입증되었다고 보여진다.

연구 내용2 : 연구 대상 학생들의 Van Hiele 수준 분포는 어떠한가?

연구 대상 학생들의 기하학 수준을 알아보기 위해 Van Hiele 수준 검사지를 통한 Van Hiele 수준을 조사하였다.

<표2> 각 수준의 fitters의 Van Hiele 수준 분포

구분	0수준	1수준	2수준	3수준	4수준	계
1학년	31(31.0)	40(40.0)	17(17.0)	12(12.0)	0 (0)	100
2학년	28(27.2)	41(39.8)	16(15.5)	18(17.5)	0 (0)	103
3학년	19(18.1)	52(49.5)	26(24.8)	8(7.6)	0 (0)	105
계	78(25.3)	133(43.2)	59(19.2)	38(12.3)	0 (0)	308

* ( )안의 숫자는 비율(%)을 나타냄.

<표2>를 기초로 하여 다음 몇 가지를 생각할 수 있었다.

첫째, 1수준(시각적 수준)에도 도달하지 못한 0수준의 학생이 1학년의 경우 31%로 나타났고, 학년이 올라 갈수록 어느 정도 기하학 수준이 진보했다고 할 수 있으나 전체적으로 25.3%의 학생들이 0수준에 머무르고 있어 인문계 고등학생(약 13%)들의 2배 정도 된다는 것은 수학 교과에 대한 관심이 극히 부족하고, 수학 과목의 필요성을 인식하지 못한 실업계 고등학생들의 현실태를 반영한 결과라고 할 수 있겠다.

둘째, 0수준과 1수준에 머무르고 있는 학생이 68.5%가 해당되어 이들에게 형식적인 기하 내용이나 증명 등을 도입하기는 무의미하다고 보여진다.

셋째, 4수준에 해당하는 학생이 1명도 없는 것이 특징으로 어떤 도형의 정의를 토대로 하여 그 도형의 성질을 추론을 하지 못할 뿐 만 아니라, 정리에 대한 주어진 증명을 이해하기 힘들 것으로 판단된다.

참고로 <표3>은 비연속적으로 Van Hiele 수준에 도달한 non-fitters에게 준수준을 부여하여 비율별로 나타낸 것이다.

<표3> non-fitters의 준수준 분포

구 분	준 수 준			계
	2 수 준	3 수 준	4 수 준	
1 학 년	5 (25.0)	11 (55.0)	4 (20.0)	20 (100)
2 학 년	5 (29.4)	9 (52.9)	3 (17.7)	17 (100)
3 학 년	3 (20.0)	12 (80.0)	0 (0)	15 (100)
계	13 (25.0)	32 (61.5)	7 (13.5)	52 (100)

* ( )안의 숫자는 비율(%)을 나타냄.

<표3>에서 준수준 3의 학생이 61.5%로서 다른 연구들과 마찬가지로 비율이 높은 것을 알 수 있는데, 실업계 고등학생들 역시 도형의 성질들을 구체적으로 묻는 2수준의 문항들에 대해 불연속적으로 도달한 학생들(non-fitters)이, 이에 대한 명확한 개념 없이 3수준의 도형과 성질들 사이의 논리적인 관계를 형성했음을 알 수 있다. 따라서 교사는 교수 과정에서 좀 더 구체적인 도형의 개념 지도에 주의를 두어 지도하여야 할 것이다.

연구 내용3 : Van Hiele이론에 근거하여 실업계 고등학생과 중학생 및 인문계 고등학생들(2학년)의 기하 수준의 차이가 있는가?

연구 대상 학생들의 Van Hiele 수준과 중학생 및 인문계 고등학생들의 Van Hiele 수준 분포를 비교하여 실업계 고등학생들의 기하 수준을 알아보기 위해 중학생들을 대상으로 Van Hiele이론 적용을 연구한 김미정(1994)의 대학원 논문과 중학생과 고등학생의 Van Hiele 수준을 비교 분석 연구한 정연석(1992)의 대학원 논문을 참고로 하였다.

우선, 인문계 고등학교 2학년 학생들과 연구 대상 학생들간에 기하 수준(fitters)의 차이가 있는지를 살펴보면 다음과 같다.

<표4> 인문고 2학년 및 연구 대상의 Van Hiele 수준 분포표

구 분	0수준	1수준	2수준	3수준	4수준	계
인문고 2학년	13(6.3)	25(12)	40(19.2)	109(52.4)	21(10.1)	208
연구 대상	78(25.3)	133(43.2)	59(19.2)	38(12.3)	0(0)	308

* ( )안의 숫자는 비율(%)을 나타냄.

<표4>에서 연구 대상 학생들보다 인문계 고등학생들의 수준이 확연히 높게 분포되어 있는 것으로 보이는데 이를 구체적으로 알아보기 위해 다음의 가설을 설정하고 Kolmogorov-Smirnov의 two sample test를 실시하였다.

가설 1: 인문계 고등학생들과 실업계 고등학생들간의 기하 수준의 차이가 없다.

두 자료들간의 누적 비율의 차의 최대치가 만일 0.122보다 크면 가설 1을 유의수준 0.05에서 기각하고 그렇지 않으면 채택한다. 검증을 위해 두 집단의 Van Hiele 수준 누적 분포표를 만들면 <표5>과 같다.

<표5>인문고 2학년 및 연구 대상의 Van Hiele 수준 누적 분포표

구 분	0 수 준	1 수 준	2 수 준	3 수 준	4수준
인문계 2학년	13(0.063)	38(0.183)	78(0.375)	187(0.899)	208
연 구 대 상	78(0.253)	211(0.685)	270(0.877)	308(1.00)	308
누적 비율의 차	0.190	0.502	0.502	0.101	0.000

* ( )안의 숫자는 비율을 나타냄.

검증 결과 누적 비율의 차의 최대치는 0.502로 0.122보다 상당히 크게 되어 가설 1을 기각한다. 즉, 실업계 고등학생들의 기하 수준은 인문계 고등학교 2학년과 비교해 볼 때, 상당히 낮게 나타났다.

또, 중학교 학생들과 연구 대상 학생들의 기하 수준의 차이를 알아보면 다음과 같다.

<표6> 중학교 1,2,3학년과 연구 대상 학생들의 Van Hiele 수준 분포표

구 분	0 수 준	1 수 준	2 수 준	3 수 준	4수준	계
중 1	73(39.2)	89(47.9)	19(10.2)	5(2.7)	0(0)	186
중 2	47(25.3)	93(50.0)	34(18.3)	12(6.4)	0(0)	186
중 3	46(23.2)	58(29.3)	32(16.2)	58(29.3)	0(0)	198
연구 대상	78(25.3)	133(43.2)	59(19.2)	38(12.3)	0(0)	308

* ( )안의 숫자는 비율(%)을 나타냄.

<표6>에서 비교한 자료들의 기하 수준의 차이를 알아보기 위해 앞에서 실시했던 방법과 마찬가지로 다음의 가설들을 설정하고 이를 검증하기 위해 Kolmogorov- Smirnov의 two sample test를 실시하였다.

가설 2: 중학교 1학년 학생들과 실업계 고등학생들간의 수준 분포의 차이는 없다.

가설 3: 중학교 2학년 학생들과 실업계 고등학생들간의 수준 분포의 차이는 없다.

가설4: 중학교 3학년 학생들과 실업계 고등학생들간의 수준 분포의 차이는 없다.

중학교 1학년 학생들과 연구 대상 학생 및 중학교 2학년 학생들과 연구 대상 학생들의 누적 비율의 차의 최대치가 만일 0.126 보다 크면 가설 2와 가설 3을 유의수준 0.05에서 기각하고 그렇지 않으면 채택한다. 또, 중학교 3학년 학생들과 연구 대상 학생들의 누적 비율의 차의 최대치가 만일 0.123보다 크면 가설 4를 유의수준 0.05에서 기각하고 그렇지 않으면 채택한다.

<표7> 중학교 1,2,3학년 학생들과 연구대상 학생들의 Van Hiele 수준 누적 분포표

구 분	0 수 준	1 수 준	2 수 준	3 수 준	4 수 준
중 1	73(0.392)	162(0.871)	181(0.973)	186(1.000)	186(1.000)
중 2	47(0.253)	140(0.753)	174(0.936)	186(1.000)	186(1.000)
중 3	46(0.232)	104(0.525)	136(0.687)	194(0.980)	198(1.000)
연 구 대 상	78(0.253)	211(0.685)	270(0.877)	308(1.000)	308(1.000)

* (　)안의 숫자는 비율을 나타냄.

<표8> 중학교 1,2,3학년 학생들과 연구대상 학생들의 Van Hiele수준 누적비율의 차

구 분	0 수 준	1 수 준	2 수 준	3 수 준	4 수 준
중1과의 차	0.139	<u>0.186</u>	0.096	0.000	0.000
중2와의 차	0.000	<u>0.068</u>	0.059	0.000	0.000
중3과의 차	0.021	0.160	<u>0.190</u>	0.020	0.000

* 밑줄은 누적 비율의 차의 최대치를 나타냄.

<표8>에서 연구 대상과 중학생들의 Van Hiele 수준 누적 비율의 차이를 알아본 결과 중학교 1학년과의 누적 비율의 차의 최대치가 0.186으로 나타나 0.126보다 크게 되어 가설 2는 유의수준 0.05에서 기각된다. 즉, 실업계 고등학생들의 기하 수준은 중학교 1학년보다는 높은 것으로 나타났다.

마찬가지로 중학교 3학년 학생들과의 누적 비율의 차의 최대치가 0.190으로 0.123보다 크게 되어 가설 4 또한 기각된다. 즉, 실업계 고등학생들의 기하 수준은 중학교 3학년 학생들보다는 낮은 수준에서 사고하는 것으로 나타났다.

그러나 중학교 2학년과 비교해 본 결과 누적 비율의 차의 최대치가 0.068로 나타나 0.126보다 작아 가설 3은 채택된다.

결과적으로 실업계 고등학생들의 기하 수준은 중학교 2학년 수준으로 나타남을 알 수 있는데, 이미 연구된 논문에서 중학교 2학년 학생들에 대해 분석했던 것처럼 이들의 약 90%가 2수준 이하인 학생들이므로 이들에게 증명을 도입하기보다는 비형식적인 기하 내용을 통한 개념 위주의 학습 지도가 이루어져야 하겠다.

V. 결론 및 제언

A. 결론

본 연구는 Van Hiele 이론에 근거하여 실업계 학생들의 기하 수준을 알아보아 효과적인 기하교육 방법을 찾기 위한 것으로, 실업계 고등학생들의 Van Hiele 이론 적용 가능성 및 Van Hiele 수준 분포, 기하 수준 등을 충청남도 보령시에 있는 3개의 실업계 고등학생 360명을 대상으로 조사하였다. 한 지역을 설정하여 조사하였으므로 그 결과를 일반화시켜 말하기는 어렵다.

Van Hiele 수준 검사지와 이미 연구된 논문의 자료를 이용하여 비교 연구된 결과는 다음과 같다.

1. 연구 대상 학생의 약 86%가 「n-1수준

을 거쳐야만 n수준을 갈 수 있다」라는 Van Hiele 이론에 적용되어 Van Hiele이론의 타당성이 다시 한번 입증되었다.

2. 연구 대상의 약 88%가 2수준 이하에 해당되어 이들에게 중학교 2학년때부터 실시된 증명 수업을 이들은 거의 이해하지 못하고 과정을 겪어 온 것임을 보여주어 우리 나라 중등학교 기하교육의 문제점이 드러났다.

3. 실업계 고등학생들의 기하 수준은 중학교 2학년 수준이었다. 그러나 <표8>에서 알 수 있듯이 중학교 2학년생의 약 75%가 1수준(시각적 수준)에 머무르고 있어, 이들에게 기하 학습 내용 교수시 기본 개념을 위주로 학습시켜야 하겠다.

결론적으로, 실업계 고등학생들의 수학 학습 능력에 대해, 구체적인 수준 측정 도구를 통해 그들의 현수준을 점검하여 기하교육 뿐만 아니라 수학교육 전반에 걸쳐 실업계 고등학교 수학교육의 문제점을 찾으려 하고 그 개선 방향을 찾으려고 노력하는데 이 연구의 의미가 있다고 하겠다.

B. 제 언

지금까지 제시한 연구의 결론으로부터 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

1. Van Hiele 이론의 타당성이 검증된 만큼 이 이론을 좀 더 깊게 연구하여 Van Hiele이론에 입각한 (학생들의 수준에 맞고, 학생들의 수준을 진보시킬 수 있는) 다양한 기하 교육의 수업 모형이 개발되어 교육 현장에 보급·활용되어야 할 것이다.

2. 실업계 고등학생들의 기하 수준을 고려한 학습 교재 재편성을 통해 보다 효과적인 기하학습을 꾀해야 할 것이다.

3. 수학교육의 취약지라고 할수 있는 실업계 고등학교의 현실을 직시하여, 기하교육 뿐 만 아니라 수학 내용 전반에 걸쳐 실업계 고등학생들에 대한 좀 더 많은 연구가 이루어져야 하겠다.

참 고 문 헌

계영희(1994), Van Hiele이론에 근거한 대학생의 기하발달 수준의 측정, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육>.

김미정(1994), Van Hiele 이론에 의한 중학생들의 기하적 사고 수준에 관한 연구, 이화여자대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

김선렬(1992), 국민학교 기하학습에 Van Hiele 이론의 적용을 위한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

김응태, 박한식, 우정호(1985), 수학교육학 개론. 서울대학교 출판부.

김효정, 박완희, 채은주, 홍경아, 홍정희(1993), Van Hiele 이론에 근거한 우리나라 중학생의 기하 사고 수준 고찰, 추계 수학 교육학 연구발표 대회 논문집, 대한수학교육학회.

박문환(1991), 기하교육의 세계적인 동향, 제9회 수학교육 세미나.

우정호(1986), Van Hiele의 수학 학습 수준 이론에 대한 소고. 사대논총 제33집.

정연석(1992), 중등학교 학생들의 Van Hiele 수준과 증명능력에 관한 연구. 연세대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

최현호, 한태식(1990), 기하 영역의 Van Hiele 수준과 증명능력에 관한 연구. 수학교육논총 제8집.

최혜정(1990), Van Hiele 이론을 통한 기하학의 개념 이해 및 문제 풀이 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

한태식(1991), 기하교육과 Van Hiele 이론. 한국수학교육학회지 <수학교육>.

Usiskin. Z.(1982), Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. University of Chicago.

Study on Geomatric Level of Vocational High School Students Based on the Van Hiele Theory

Young cheol Jeong[1)]

Abstract

The purpose of this study is that the Van Hiele theory can be applied to even vocational high school students. Through the comparison of Van Hiele level distribution of middle school students and high school students, it is that the aims of this study is to study the geomatric level of vocational high school students and to analize them, even so it can be to find for them the effective method of Geomatric education.

The subject of study is three kinds of vocational high school - commercial high school, industrial high school, fisheries high shcool - boys (240), girls (120) in Boryeong city, Chungchong Nam Do. We referred to Kim Mi-cheong' thesis(1994) and Cheong Yean-sok's thesis(1992) and compared my result with them.

The method and the process of the study were based on the th method of CDASSG project. And we used Van Hiele Level Test as an instrument of measurement.

We got the following conclusion as the result of the study.

1. The 86% of the subject of the study was applied to the theory of Van Hiele - "Any students can reach level n just through level n-1." Even so the propriety of the theory proved to be from this study again.
2. The 88% of the subject of the study is applicable to below level 2. So if the proof is introduced to them in the class, it was very difficult for them to understand it.
3. The geometric level of vocational high school students is the same as the second grade of middle school. But we think to be desirable that a basic concept puts first in importance through recomposed teaching materials, because 68% of the students is seldom changed at level 1.

---

1) Jusan Industrial High School ; yc1111@chollian.net