한국학교수학회논문집 제 1 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 1, Number 1, 3-8, 1998

Digital時代의 2進法의 價値

李 華 永[1)]

1. 序 論

Y2K를 눈앞에 두고 있는 오늘날, 教育뿐만이 아니라 文化, 藝術의 모든 表現이 멀티미디어(multimedia)가 아니고서는 그 口實을 다하지 못하는 時代가 되었다.

앞으로의 教授方法(teaching mathod)은 여러 가지 形態를 假想할 수 있어서, 學習內容을 傳達하는 手段으로 종래의 黑板(때로는 白板)사용에서부터 OHP, 實物幻燈機 또 PC 등 점점 다양화되어 가는 현실이다. 어려서부터 만화를 즐겨보던 世代의 학생들은 文字보다 그림을, 黑白보다 다양한 색으로 나타낸 것을, 停止된 것보다 움직이는 것을 注目하고 興味있게 하는 것은 사실이다.

인터넷(internet)의 常用化로 학교에서 오늘날 指導하는 教授方法은 많은 변화가 다가오고 있다. 교수는 페이퍼(report)를 워드로 친 것을 받고 있으며, 아예 홈페이지를 開設한 研究室에 PC로 보내도록 하여 받는 경우도 있다. 이것은 요사이 우리 나라의 實情을 이야기한 것이다.

外國의 경우 인터넷으로 教育하는 것은 普通이고, 特定한 知識을 얻으려면 개인적인 PC住所에 찾아오게 하여 대가를 받고 情報를 提供하는 경우도 있다.

障碍者의 교육도 PC를 導入하여 대화를 하고 외롭지 않게 혼자서 이해하는데 즐거움을 느끼도록 하는 단계까지 이르고 있다.

앞으로 어쩌면 教師에게 배우는 것이 지루하니까 PC속의 人形(Cyber Idol)들이 主人公이 되어 가르치고 배우게 하여 그 것을 보면서 흥미를 끌도록 하는 시대가 올지도 모른다. 아니 벌서 싸이버 캐릭터가 나와서 CM도 하고 노래를 부르고 있지 않은가 그리고 그 인기도 대단하다.

以上 이야기한 內容以外에도 우리의 周邊을 살펴보면 멀티미디어의 洪水를 實感하게 된다. 색깔도 수만 가지로 나타낼 수 있고, 設計도 AutoCAD를 사용하여 3D로 마음대로 짓고, 自動車도 겉모양부터 附屬品까지 얼마든지 설계가 가능하고, 어떤 方向에서도 切斷이 되며 回轉도 자유자제이고 Photoshop을 이용하면 寫眞帖도 만들 수(크게, 작게, 진하게, 또는 여러 가지 사진을 結合하여)있고, 책의 組版도 집에서 혼자 얼마든지 만들 수 있고, 시뮬레이션으로 假想을 통하여 자동차 운전이나, 비행기 훈련등 현실을 맛보게 하고, 오디오를 高級으로 조립할 수 있다. 또 TV나 VTR을 볼 수 있고, 캠코더로 動畫像을 入力하고 停止畵面을 뽑아 낼 수도 있다.

21세기는 "文化와 藝術"의 世紀라고 한다. 사실 文化와 藝術은 物質的인 것이 아니라 精神的인 것이다. 앞에서 말한 것들은 보면 物質的인 것에 置重한 내용 같지만, 이것들을 이용하여 文化와 藝術分野를 맛보게 하고, 貯藏하고, 만들어 내게 하고 있다.

옛날 주판(abacus)을 잘치는 것을 보고 감탄한 일이 있었지만, 이것은 技能이지 創造가 아니었다. 그러나 컴퓨터는 기능인 面도

1) 공주대학교 명예교수

많이 있지만 創造의 힘도 얼마든지 있는 道具인 것이다.

時代가 變하면 文化가 변하고, 문화가 변하면 그에 맞는 學問도 변한다. 수학도 時代的으로 변해왔다. 물론 "數學"이야말로 人間의 高度의 抽象的인 頭腦 創造에서 나오는 産物이기 때문에 文化나 藝術이나 技術보다도 일단 앞서가는 것은 사실이다. 한참 시대가 흐른 뒤에 앞서서 發見했던 數學이 文化나 藝術이나 技術의 도약을 위하여 응용하게 되는 일은 얼마든지

예를 들자면, Topology의 생각이나 Group 같은 것이 그것이다.

이제 나는 Digital時代에서 2진법의 價値와 그 應用에 대하여 이야기하려고 한다.

Ⅱ. 2진법의 素數

다음 표는 10진법의 수와 그 수를 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 진법의 수로 나타냈을 때의 모든 값을 구한 것이다.

[표1] 각 집법 상호간의 양의 정수표

수 / 진법	1	2	3	4	5	6
2	1	10	11	100	101	110
3	1	2	10	11	12	20
4	1	2	3	10	11	12
5	1	2	3	4	10	11
6	1	2	3	4	5	10
7	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6
9	1	2	3	4	5	6
10	1	2	3	4	5	6
……	…	…	…	…	…	…

수 / 진법	7	8	9	10	11	…
2	111	1000	1001	1010	1011	…
3	21	22	100	101	110	…
4	13	20	21	22	23	…
5	12	13	14	20	21	…
6	11	12	13	14	15	…
7	10	11	12	13	14	…
8	7	10	11	12	13	…
9	7	8	10	11	12	…
10	7	8	9	10	11	…
…	…	…	…	…	…	…

定理1-1(Lee-Lemma) 같은 열(column)에 속하는 임의 진법의 정수들은 등호(=)에 관하여 동치관계를 이룬다.

증명 : 10진법의 정수 n이 들어있는 열을 기호 $c(n)$으로 나타내면

(1) $a \in c(n)$이면 $a = a$

(2) $a, b \in c(n)$라고 하면,

$a = b \rightarrow b = a$

(3) $a, b, c \in c(n)$라고 하면,

$a = b, b = c \rightarrow a = c$

정의(임의 진법의 소수) 1보다 큰 p진법의 정수 n_p이 소수인 것은 $1 < d_p < n_p$인 약수 d_p를 갖지 않는 것이다.

다음 정리는 앞으로의 이론전개에 매우 중요한 영향을 갖는 정리이다.

정리1-2(素數定理) 10진법의 소수가 있는 열의 각각의 수는 그 수가 속해있는 진법에서 소수이다.

증명 : 이 정리의 증명은 위의 정리 1-1로부터 용이하게 유도된다.

위의 정리로부터 2진법의 소수를 쉽게 구할 수 있다. 이것을 작은 것부터 적어보면

2진법의 소수 10, 11, 101, 111 1011, 1101, 10001. 10011. 10111. ……

整數論은 素數論이라고 말하는 사람이 있다. 사실 連分數만 제외하면 소수로부터 이론이 시작되고 전개되고있다. (約數, 倍數, Mŏbius함수, Euler함수, 合同式, Fermat의 정리, Legendre기호등)

진법을 연구하다보면 현재 우리가 사용하고 있는 정수론은 10진법의 정수론이고 일반론인 정수론은 “임의진법의 정수론”이야 한다는 생각을 하게된다.

예를 들어 나눗셈에서 순환절의 반을 접어 더하면 999…의 값이 나오는데 p진법에서는 그 합이 p-1의 값으로 된다는 것을 쉽게 알 수 있다. 또 소수의 분포를 조사하는데 1~100사이에 몇 개있는가를 알아보는 일이라든가 하는 것도 10진법을 기준으로 한 조사방법이다.

惑星에 있는 生物體 사이의 交信手段

우리가 사용하는 10진법은 인간의 두 손의 손가락이 10개있기 때문에 사용하게 되었다.

그러면 지구 以外의 다른 惑星에 존재하는 知的 生物體의 기수법은 무엇일까! 여기서 假想하여 볼 때 10진법이 아닐 確率이 훨씬 크다고 볼 수 있다. 그것은 그 생물체의 생김새가 인간과 같은 形態를 하고 있지 않을 것이기 때문이다. 또 하나 그렇다면 人間과 어떤 惑星의 知的 生物體와, 또는 혹성 상호간의 交信手段으로 무엇을 사용하여야 좋을까? 여기서 다음과 같은 것을 생각하게 된다.

L豫想 <u>宇宙에 存在하는 知的生物體가 사는 惑星에서 使用하는 基數法이 어떤 것이든, 모든 進法은 그 數가 屬해있는 列(column)에서 等號에 대하여 同値關係가 성립하므로, 基本이 되는 2進法을 整數體系로 갖으면, 서로 通하는 交信이 可能하다.</u>

2진법의 표현은 여러 가지

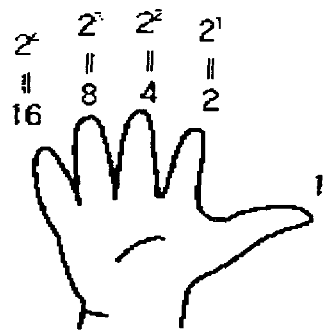
사실 2진법의 표현방법은 “1”과 “0”以外의 것을 얼마든지 생각할 수 있다. 알기 쉽게 “T”와 “F”, 古代 中國에서 생각한 “陽”과 “陰”, 이것을 기호화한 “—”과 “--”, 모스(Morse)信號 “—” 와 “-”, 그 밖에 두 가지 색깔(예를 들어 노란 색과 파란 색), 두 가지 소리, 두 가지 동작, …등 여러 가지를 생각할 수가 있다.

Ⅲ. Hand(Lee)-Diagram

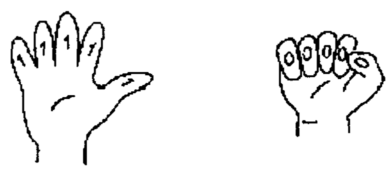
10진법의 수와 2진법의 수를 서로 고치는 새로운 방법

준비1. 먼저 오른손을 펴고 손바닥을 보면서 손가락이 위로 향하게 한다. 그리고 엄지, 검지, 중지, 약지, 새끼손가락의 끝 부분에다 차례대로 수 1, 2, 4, 8, 16을 연필이나 펜으로 기입한다.

이것은 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4과 같은 수이다.



준비2. 한편, 수 “1”을 다섯 손가락의 안쪽에다 잘 보이도록 빠짐없이 기입한다.



준비3. 다른 한편, 다섯 손가락을 주먹을 쥔 뒤, 수 "0"을 각각의 손가락의 뒤쪽에다 잘 보이도록 기입한다.

준비는 모두 끝이 났고, 익혀야 될 일이 있다.

[익힘 문제]

아래 도형4와 같은 손의 모양을 하고있을 때,

손가락 끝 부분의 수는 새끼손가락부터 차례로

(2^4), (2^3), (안 보임), (안 보임), (1)

이 된 것을 알 수 있다.

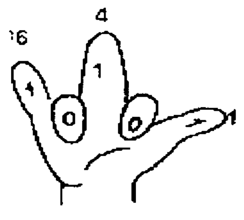
또 손가락 안쪽과 뒤쪽에 있는 수는 새끼손가락부터 차례로 1, 1, 0, 0, 1이 보일 것이다. 이들 손가락 끝 부분의 수를 합해보면

$$1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2+1 = 25$$

의 값이 됨을 알 수 있다.

보기1. 수 21을 2진법의 수로 고쳐라.

아래 도형을 보면서 아래 과정을 익힌다.



(1) 21에 가장 가까운 수 "16"을 21에서 뺀다. 21-16 = 5

(2) 5에 가장 가까운 수 "4"를 5에서 뺀다.
5-4 = 1

(3) 1은 끝 수와 같으므로 1-1 = 0 이다.

(4) 뺄 기회를 가졌던 16, 4, 1의 손가락은 편 채 그대로 두고, 뺄 기회를 못 가졌던 8과 2의 손가락은 쥐는 듯 구부린다.

그러면 도형과 같이 되어 다음 값을 얻는다.

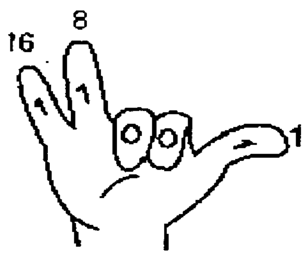
$$21 = 1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2+1 = 10101_2 \quad 즉 \quad 21 = 10101_2$$

문제1. 다음 수를 2진법의 수로 고쳐라.

(1) 5 (2) 13 (3) 19 (4) 29

보기2. 수 11001_2를 10진법의 수로 고쳐라.

(1) 11001_2를 손가락으로 나타내어 보면 오른쪽 도형과 같이 된다. (2) 손가락의 안쪽에 "1"의 숫자가 있는 손가락의 "끝 수"를 각각 큰 수부터 차례로 써보면 16, 8, 1이므로 이들 수를 더해보면 16+8+1 = 25 가 된다. 즉 $11001_2 = 25$



문제2. 다음 수를 10진법의 수로 고쳐라.

(1) 11_2 (2) 101_2 (3) 1010_2 (4) 10011_2

여기서 다음과 같은 "Hand-Diagram (=Lee-Diagram)"을 생각할 수 있다.

Hand-Diagram(=LEE-Diagram 1997.1.1)

위의 "핸 · 다이어그램"(발음이 그렇게 나올 것 같다)은 전세계의 모든 사람이 누구나 갖고 있는 손 계산기라고 말할 수 있다.

Ⅳ. Global Hand(Lee)-Diagram

(2 ↔ 4, 8, 16진법의 수를 고치는 법)

(1) 2진법의 수를 4진법의 수로 고치는 방법

지금 2진법의 수 110110_2이 있다고 하자. 이 수를 다음과 같이 1의 자리부터 두 자리씩 잘라서 생각하면

$$11\ 01\ 10_2 = 11\ 00\ 00_2 + 01\ 00_2 + 10_2$$

와 같이 된다. 그런데 2진법에서 두 자리 수는 00_2, 01_2, 10_2, 11_2의 4가지 경우만 나타나며, 이 수를 4진법의 수로 고치면

(2진법의 수)→(10진법의 수)═(4진법의 수)

0, 1, 2, 3이 된다. 그런데 0, 1, 2, 3은 4진법의 모든 수가되는 것을 알 수가 있다. 즉, 0, 1, 2, 3까지는 10진법의 수나 4진법의 수가 같게된다.

(1)'4진법의 수를 2진법의 수로 고치는 방법

위의 1에서 생각했던 순서의 역순을 밟으면 된다. 즉 4진법의 수 0, 1, 2, 3을 각각 00, 01, 10, 11로 고쳐서 쓰면 된다.

보기. 수 2103_4를 2진법의 수로 써라

$$2103_4 = 2\ 1\ 0\ 3_4 = 10\ 00\ 00\ 00_2 + 01\ 00\ 00_2 + 00\ 00_2 + 11_2 = 10010011_2$$

(2) 2진법의 수를 8진법의 수로 고치는 방법

지금 2진법의 수 110011001_2 이 있다고 하자. 이 수를 다음과 같이 1의 자리부터 세 자리씩 잘라서 생각하면

$$110\ 011\ 001_2 = 110\ 000\ 000_2 + 011\ 000_2 + 001_2$$

과 같이 된다. 그런데 2진법에서 세 자리 수는

000_2, 001_2, 010_2, 011_2, 100_2, 101_2, 110_2, 111_2

의 8가지의 경우만 나타나고 이 수를 8진법의 수로 고치면

(2진법의 수)→(10진법의 수)═(8진법의 수)

가 된다. 그리고 이들의 수는 차례대로

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

이 된다. 그런데 이들 수는 모두 8진법의 수가됨을 알 수가 있다.

(참고 사항) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7까지는 10진법의 수나 8진법의 수가 같게 된다.

그러므로 2진법의 수를 1의 자리부터 세 자리씩 잘라서 8진법의 수로 고치고, 앞에서 차례대로 쓰면, 그 수는 8진법의 수가되는 것이다.

보기. 수 110011001_2를 8진법의 수로 고쳐라.

$$110011001_2 = 110\ 011\ 001_2 = 110\ 000\ 000_2 + 011\ 000_2 + 001_2 = 600_8 + 30_8 + 1_8 = 631_8$$

(2)'8진법의 수를 2진법의 수로 고치는 방법

위의 2에서 밟았던 순서의 역순을 밟으면 된다. 즉 8진법의 수

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

을 각각 000 001 010 011 100 101 110 111로 고쳐서 쓰면 된다.

보기. 수 $473_8 = 4\ 7\ 3_8 = 100\ 000\ 000_2 + 111\ 000_2 + 011_2 = 100111011_2$

(3) 2진법의 수와 16진법의 수를 서로 고치는 방법

위에서 배운 내용에서 (2진법의 수) ↔ (16진법의 수)를 추출(抽出)할 수 가 있다.

16진법의 수를

1 2 3 4 5 6 7 8 9

a b c d e f 10 11 12 13 …

이라고 하자. (16진법에서는 열 여섯 번째의 수가 십이 된다)

보기 수 101011001110000010_2을 16진법의 수로 고쳐라.

2진법의 수를 1의 자리부터 네 자리씩 잘라서 16진법의 수로 고친다.

101011001110000010_2 = 1 0101 1001 1100 0010_2 = 159b2 〔16〕 ★

위의 내용을 "핸·다이어그램"으로 고쳐서 생각하여도 된다.

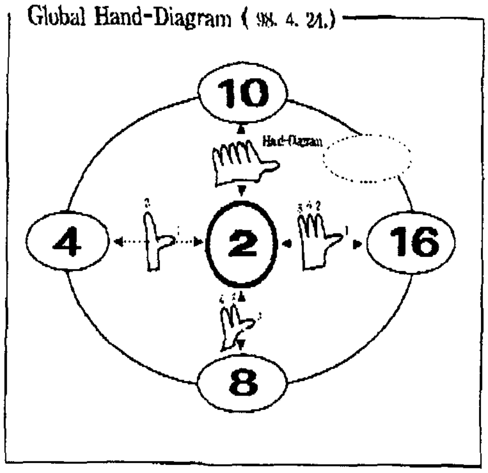
지금까지 배운 (1), (1)', (2), (2)', (3)의 내용을 보면 2진법을 중심으로 하여

2↔10, 2↔4, 2↔8, 2↔16

진법을 서로 고치는 방법을 알아보았다.

(참고 사항) 독자는 "2진법을 중심으로 하여" 라고 한 말을 "10진법을 중심으로 하여" 라고 쓰고 싶을 것이다. 그러나 나의 연구한 결과는 모든 기수법의 기본은 2진법이 기본이 된다는 것을 분명하게 말하고 싶다.

앞에서 배운 Hand-Diagram과 4.의 (1),(1)',(2),(2)',(3)의 내용을 다음과 같이 한 장의 도시(圖示 Diagram)로 만들 수 있다. 이것을 Global Hand(Lee)-Diagram이라고 이름지었다.



[예 제] 수 103을 2, 4, 8, 16진법의 수로 고쳐보면, $103_{10}=1100111_2$ 이 수를 1의 자리부터 두, 세, 네 자리 씩 각각 끊고서 4, 8, 16진법의 수를 각각 구해보면 1213_4, 147_8, 67_{16}의 값이 얻어진다.

(참고) 두 자리 씩 끊으면 1 10 01 11, 세 자리씩이면 1 100 111, 네 자리씩이면 110 0111

참 고 문 헌

Wha-Young Lee(1975), "A Study on the Number Theory of P-th System" K.N.T.C.

H. Eves.(1962), "An introduction to the HISTORY of MATHEMATICS" Holt Rinehart and Winston

Vinogradov(1955), "An Introduction to the Theory of Numbers" New York, Pergamon Press

L. Hogben(1943), "Mathematics for the Million" New York. W.W.Norton & Co.